АЛГОРИТМЫ ВЫСОКОТОЧНОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В.
НИИ прикладной математики и механики при Томском университете
634050 г. Томск, пр. Ленина, 36
тел.(3822) 410576, факс (3822) 410347
E-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru

В сообщении представлены алгоритмы долгосрочного высокоточного численного прогнозирования движения геодезических искусственных спутников Земли (ИСЗ). Алгоритмы основаны на применении преобразований стабилизирующих уравнения движения ИСЗ, обеспечивают миллиметровую и субмиллиметровую точность прогнозирования движения не длительных интервалах времени и могут быть успешно использованы в задачах определения геодинамических параметров.

Уравнения движения ИСЗ в прямоугольной геоцентрической системе координат можно представить в виде:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d} t^2} + \frac{\mu \mathbf{x}}{r^3} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор положения спутника, $r = |\mathbf{x}|$ — радиус вектор, t — физическое время, V — возмущения от геопотенциала, $\mathbf{P}$ — неконсервативные возмущающие силы, μ — гравитационный параметр.

Уравнения (1) неустойчивы по Ляпунову, даже в случае невозмущенного движения. При интегрировании таких уравнений неустойчивость создает благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом.

Простой, но мощный метод стабилизации был предложен Дж. Баумгартом [1]. Главная идея метода состоит во введении в уравнения движения дополнительных стабилизирующих возмущений, которые компенсируют отклонения за неустойчивость численного решения от точного. Коррекция численного решения выполняется по так называемой опорной (точной) энергии: чем дальше численное решение отклоняется от энергетической поверхности, тем больше стабилизирующие возмущения, “укладывающие” решение на поверхность. Исправление орбиты также предполагает интегрирование простого уравнения энергии совместно с исходной системой уравнений движения. Очевидно, для того чтобы метод был эффективным, опорная энергия должна слабо изменяться со временем.

Уравнения Баумгарта имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d} t^2} + \frac{\mu \mathbf{x}}{r^3} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} - (H - \overline{H})\frac{\gamma^2}{\dot{\mathbf{x}}^2}\dot{\mathbf{x}}, \\ \frac{\mathrm{d}\overline{H}}{\mathrm{d} t} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}), \quad H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} + V,\end{gathered} \tag{2}$$

где H — ошибочная энергия, вычисляемая явно по интегрируемым положению и скорости, а $\overline{H}$ — энергия точного (опорного) решения.

В общем случае нельзя утверждать, что полученная система (9) устойчива. Однако при слабых возмущениях "остаточная" неустойчивость после стабилизации будет малой в сравнении с устраняемой неустойчивостью.

Теми же свойствами будут обладать уравнения в переменных Кустаанхеймо-Штифеля (KS) [2]:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{dE^2}+\frac{1}{4}\mathbf{u}=\frac{r}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right]-\frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dE}\frac{d\mathbf{u}}{dE},\quad \frac{d\omega}{dE}=-\frac{r}{8\omega^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right],$$
$$\frac{d\tau}{dE}=\frac{1}{8\omega^3}\left[\mu-2rV-r\left(\mathbf{x},-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right)\right]-\frac{2}{\omega^2}\frac{d\omega}{dE}\left(\mathbf{u},\frac{d\mathbf{u}}{dE}\right),\quad \tau=t+\frac{1}{4\omega^2}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}), \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ — 4-мерный вектор положения спутника в KS-пространстве: $\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}$; $\mathbf{L}$ — матрица преобразования Кустаанхеймо-Штифеля, ω — частота динамической системы: $2\omega^2 = -H$; τ — временной элемент.

Как показывает практика, в спутниковых задачах требуемая точность при интегрировании стабилизированных уравнений (2), (3) достигается в 2–4 раза быстрее, нежели при интегрировании классических уравнений (1).

Точность интегрирования уравнений (1), (3) можно повысить, если к этим уравнениям применить известный метод Энке [3] (см., например, [4]). Однако метод Энке в классической интерпретации, для уравнений (1), имеет ряд недостатков. Во-первых, исходные уравнения не линейны, что усложняет преобразования уравнений к виду Энке. Во-вторых, опорное решение не выражается явно через независимую переменную (физическое время) и необходимо итерационным способом решать уравнение Кеплера.

Эти недостатки исчезают при применении метода Энке к уравнениям (3). Большая часть уравнений системы линейны, а опорное решение явно зависит от независимой переменной, в данном случае от обобщенной эксцентрической аномалии E, либо от ее аналога в эллиптическом движении фиктивного времени. Кроме того, исходные KS-системы уже стабилизированы.

Используя в методе кеплеровскую орбиту ($\mathbf{P} = \mathbf{0}$, $V = 0$):

$$\mathbf{u}_K=\boldsymbol{\alpha}_K\cos\frac{E}{2}+\boldsymbol{\beta}_K\sin\frac{E}{2},\ \omega_K=\text{const},\ \tau_K=\frac{\mu}{8\omega_K^3}E+\text{const}, \tag{4}$$

в качестве промежуточной, получим уравнения Энке [4]

$$\frac{d^2\delta\mathbf{u}}{dE^2}+\frac{1}{4}\delta\mathbf{u}=\frac{r}{8\omega^2}\mathbf{L}^T(\mathbf{u})\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right]-\frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2}-\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dE}\frac{d\mathbf{u}}{dE},\quad \frac{d\delta\omega}{dE}=-\frac{r}{8\omega^2}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{P})\right],$$
$$\frac{d\delta\tau}{dE}=\frac{1}{8\omega^3}\left[-\mu\frac{\delta\omega}{\omega_K}\left(\frac{\omega^2}{\omega_K^2}+\frac{\omega}{\omega_K}+1\right)-2rV-r\left(\mathbf{x},-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right)\right]-\frac{2}{\omega^2}\frac{d\omega}{dE}\left(\mathbf{u},\frac{d\mathbf{u}}{dE}\right) \tag{5}$$

Здесь символ δ обозначает отклонения возмущенных переменных от их опорных аналогов. Возмущенные переменные в уравнениях (5) есть исправление соответствующих опорных аналогов за вычисляемые возмущения.

Представленные методы были апробированы на примере численного моделирования движения двух спутников, Лагеос и Эталон, предназначенных для решения геодинамических задач. В процессе численного моделирования учитывались возмущения от геопотенциала и притяжения Солнца. Дифференциальные уравнения интегрировались методом Эверхарта 15-го порядка в арифметике с точностью 10^{-16} на интервале времени 2 года.

Таблица

Параметры орбит спутников

Объект	a, км	e	i,°
Эталон	26600	0.01	63.4
Лагеос	12271	0.004	109.8

Для каждой модели получены характеристики точность-быстродействие, которые представлены на рис. 1, 2. Точность методов оценивалась известным методом прямого и обратного интегрирования, а быстродействие — по числу обращения к процедуре правых частей уравнений.

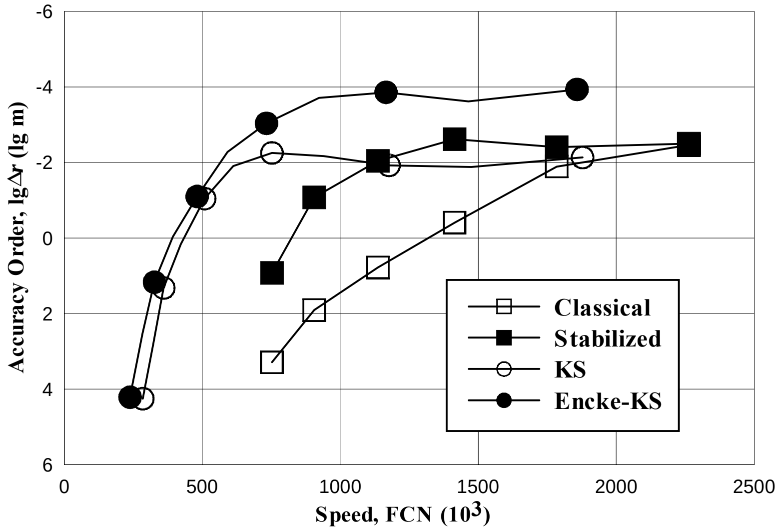

Рис. 1. Характеристики точности быстродействия различных методов на примере ИСЗ Эталон.

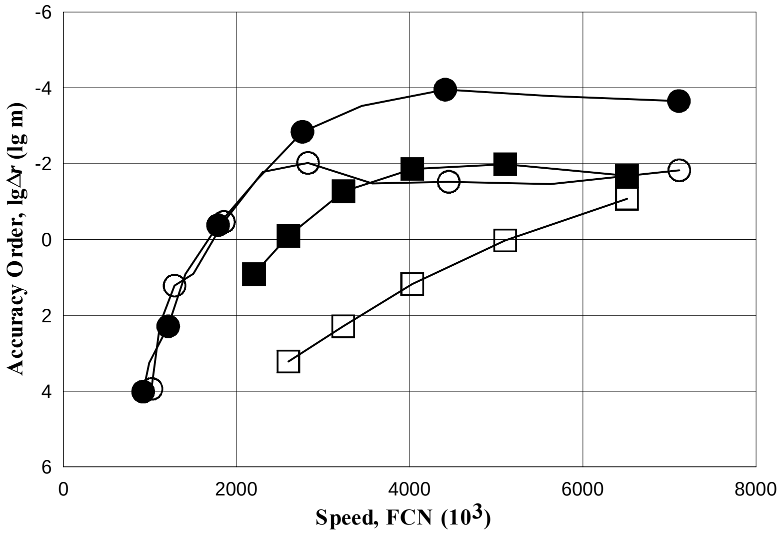

Рис. 2. Те же характеристики для ИСЗ Лагеос.

Как показывают приведенные на Рис.1,2 оценки предлагаемые алгоритмы позволяют удерживать миллиметровую и субмиллиметровую точность на интервале времени 2 года. А это в свою очередь расширяет класс задач геодинамики, которые могут решаться с привлечением лазерных наблюдений ИСЗ Лагеос и Эталон.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 01-02-17266.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баумгарт, Дж. (Baumgarte, J.): 1973, "Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion", *Cel. Mech.* **5**, 4, 490–501.
2. Штифель, Е.Л., Шайфель, Г. (Stiefel, E.L., Scheifele, G.): 1971, *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
3. Энке, И.Ф. (Encke, J.F.): 1852, "Uber eine neue Methode der Berechung der Planetenstorungen", *Astronomisches Nachrichten* **33**, 377–398.
4. Бордовицына, Т.В., Быкова, Л.Е., Авдюшев, В.А.: 1998, “Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет”, *Астрономия и геодезия* **16**, Томск: Изд-во ТГУ, 33–57.