

О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОРБИТ С КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Виктор А. АДЮШЕВ

Отдел небесной механики и астрометрии, НИИ прикладной математики и механики, пр. Ленина, 36, Томск, Россия, 634050, e-mail: sch@niipmt.tsu.ru

Аннотация. Рассматривается проблема, которая часто возникает при численном моделировании динамики далеких спутников, находящихся под влиянием близких массивных спутников типа галилеевых: близкие спутники вызывают в движении далеких короткопериодические возмущения, учет которых существенно понижает быстродействие численного процесса. На практике эта проблема разрешается двумя способами. В первом массы массивных спутников включают в массу планеты, во втором влияние от массивных спутников моделируется с помощью так называемых гауссовых колец. Несмотря на то, что второй способ точнее, в нем еще остаются неучтенными довольно большие вековые эффекты, которые становятся значительными в тех задачах, где орбиты близкого и далекого спутников достаточно близки. В данной работе на примере планетной и спутниковой динамики исследуется влияние этих остаточных вековых эффектов на точность представления орбитального движения, а также предлагается метод для их учета в численном моделировании орбит.

1. Введение

Появление данной работы обязано проблеме, которая нередко возникает на практике при численном моделировании динамики далеких планетных спутников, находящихся под влиянием близких массивных спутников типа галилеевых. Близкие спутники вызывают в движении далеких короткопериодические возмущения, учет которых существенно понижает быстродействие численного процесса.

На практике прибегают к одному из двух способов для разрешения этой трудности. Первый способ состоит в том, что массы близких спутников включаются в массу планеты¹, во втором способе влияние от массивных спутников моделируется с помощью так называемых гауссовых колец². Оба способа приводят к упрощенным уравнениям движения: в первом это — возмущенные уравнения задачи двух тел с модифицированным гравитационным параметром, во втором — уравнения, получаемые путем усреднения Гаусса

¹ См., например, (Бордовицына, Быкова, 1978; Rocher, Chapront, 1996).

² См., например, (Jacobson, 2000; Emelyanov, 2005)



(Дубошин, 1961). Последние представляют спутниковое движение точнее, нежели первые. Хотя в то же время усредненные уравнения гораздо сложнее.

Только за последнее десятилетие точность наблюдений естественных спутников возросла на несколько порядков. Очевидно, в этой связи возникает необходимость в уточнении уже имеющихся численных моделей спутникового движения, используемых для обработки современной наблюдательной информации. Еще совсем недавно уравнения с модифицированным гравитационным параметром составляли основу всех динамических моделей далеких спутников. Однако сейчас практик уже не всегда может довольствоваться этой простой альтернативой и вынужден обращаться к более изощренным уравнениям.

Усредненные уравнения, представляющие влияние от массивного спутника как от материального кольца, на данный момент являются компромиссным вариантом для адекватного моделирования движения очень далеких спутников типа Пасифе. С одной стороны, они не содержат короткопериодических членов, что благоприятно для численного интегрирования. С другой стороны, они достаточно точно описывают движение спутника в соответствии с требованиями современной наблюдательной астрономии. Точность последних наблюдений еще не столь высока, чтобы прибегать к более сложным уравнениям.

Как известно, высокая точность представления орбитального движения с помощью усредненных уравнений достигается, главным образом, за счет того, что они учитывают вековые возмущения (первого порядка) в орбитальных элементах. Однако после усреднения Гаусса остаются еще неучтенными довольно большие вековые эффекты в быстрой переменной, которая определяет положение спутника на орбите. Этот недостаток становится значительным в тех задачах, где орбиты близкого и далекого спутников достаточно близки как, например, для Каллисто и Гималии, спутников Юпитера. Причем усредненные уравнения будут настолько плохо представлять реальную орбиту, что их использование может оказаться совершенно неоправданным на фоне простых уравнений с модифицированным гравитационным параметром.

В данной работе на примере планетной и спутниковой динамики мы исследуем влияние этих остаточных вековых эффектов на точность представления орбитального движения, а также предлагаем метод для их устранения.

2. Возмущенный гармонический осциллятор

В данном разделе на простом примере гармонического осциллятора мы хотели бы показать, как короткопериодические возмущения влияют на быстрдействие численного интегрирования.

Рассмотрим слабозвозмущенный гармонический осциллятор вида

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = -\varepsilon \cos nt, \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = -\varepsilon \sin nt; \quad (1)$$

с начальными условиями³

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1 + \varepsilon/(n + 1). \quad (2)$$

Здесь u_1, u_2 — интегрируемые переменные, t — независимая переменная, $\varepsilon < 1$ — малый параметр, $n > 1$ — частота короткопериодических возмущений.

В соответствии с (2) уравнения (1) будут иметь решение

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{n^2 - 1}\right) \cos t + \frac{\varepsilon}{n^2 - 1} \cos nt, \\ u_2 &= \left(1 - \frac{\varepsilon}{n^2 - 1}\right) \sin t + \frac{\varepsilon}{n^2 - 1} \sin nt. \end{aligned} \quad (3)$$

В частности, из решения видно, что вклад короткопериодических возмущений тем меньше, чем выше частота n .

Предположим теперь, что мы интегрируем уравнения (1) численно методом Тейлора N -го порядка, причем $N > 1$. Оценим ошибку интегрирования по первым отброшенным членам ряда Тейлора:

$$\Delta u = \frac{1}{(N + 1)!} \sqrt{[u_1^{(N+1)}]^2 + [u_2^{(N+1)}]^2} \Delta t^{N+1}, \quad (4)$$

где Δt — шаг интегрирования.

Подставим (3) в (4). Тогда для достаточно больших n :

$$n > \frac{1}{N-1\sqrt{\varepsilon}}, \quad (5)$$

будем иметь

$$\Delta u \sim \frac{\Delta t^{N+1}}{(N + 1)!} \varepsilon n^{N-1}. \quad (6)$$

³ Такие условия выбраны нами лишь из соображения эстетичности оценок, которые мы собираемся получить ниже.

В невозмущенном случае ($\varepsilon = 0$) ошибка будет

$$\Delta u_{\varepsilon=0} = \frac{\Delta t_{\varepsilon=0}^{N+1}}{(N+1)!}. \quad (7)$$

Следовательно, для того чтобы интегрирование в возмущенном случае выполнялось с той же точностью, что и в невозмущенном, шаг интегрирования Δt должен выбираться в соответствии с оценкой

$$\frac{\Delta t_{\varepsilon=0}}{\Delta t} \sim \varepsilon^{\frac{1}{N+1}} n^{\frac{N-1}{N+1}}. \quad (8)$$

Оценка (8) показывает, что при выполнении условия (5) быстродействие численного интегрирования будет определяться частотой короткопериодических возмущений: чем выше частота, тем меньше шаг интегрирования, а, следовательно, тем ниже быстродействие пошагового процесса. Кроме того, следует заметить, что эта ситуация усугубляется с повышением порядка N численного метода: правая часть (8) становится почти линейной функцией относительно n , а коэффициент $\sqrt[N+1]{\varepsilon}$ устремляется к единице. Таким образом, несмотря на ничтожную роль высокочастотных возмущений в решении (3), их значимость с точки зрения численного интегрирования становится весьма существенной.

Уравнения (1) являются предельно упрощенным аналогом уравнений орбитального движения. Хотя именно простота гармонического осциллятора позволяет нам прояснить парадоксальную и злополучную природу малых высокочастотных возмущений, с которой часто приходится сталкиваться на практике при численном интегрировании орбит.

3. Ограниченная круговая задача трех тел

Покажем теперь, как зависит быстродействие численного интегрирования орбиты от частоты короткопериодических возмущений. Обратимся к ограниченной круговой задаче трех тел.

На некотором интервале времени мы численно интегрировали уравнения задачи методом Эверхарта 15-го порядка (Everhart, 1974) с переменным шагом и исследовали зависимость быстродействия численного интегрирования от взаимного расстояния двух массивных тел. При этом массивные тела двигались по взаимно круговым орбитам внутри орбиты третьего, поэтому своим гравитационным влиянием они вызывали в его движении короткопериодические возмущения.

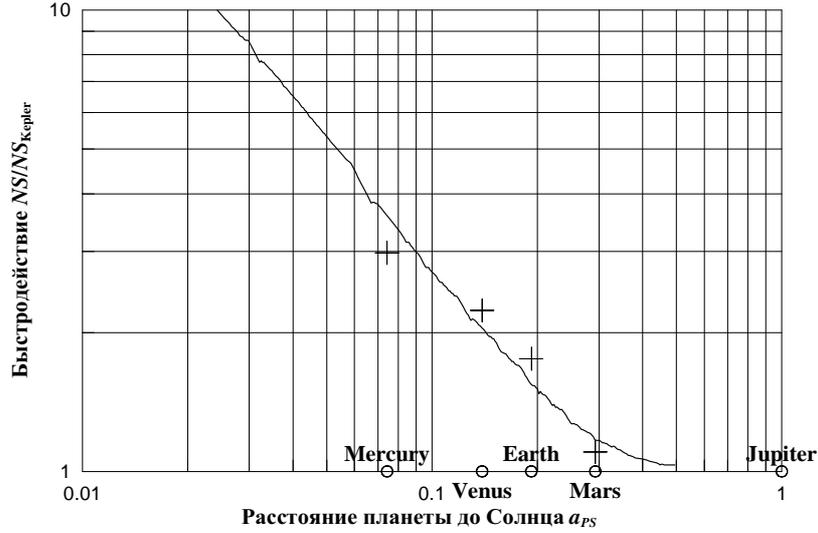


Рис. 1. Зависимость быстродействия интегрирования орбиты третьего тела от близости двух других массивных тел ($\mu_P = 10^{-6}$). Символы + соответствуют реальным параметрам μ_P планет Солнечной системы.

Для интегрирования мы взяли уравнения движения вида

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mu_S \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3} - \mu_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3}, \quad (9)$$

где \mathbf{x} — вектор положения третьего тела, t — время, \mathbf{x}_S и \mathbf{x}_P — векторы положения массивных тел, а μ_S и μ_P — их гравитационные постоянные.

Чтобы приблизить эксперимент к условиям планетной задачи мы положили $\mu_S = 1$ (Солнце), а $\mu_P = 10^{-6}$ (планета). Начальная орбита третьего тела была круговой с единичным радиусом. В качестве характеристики быстродействия мы взяли величину отношения шагов интегрирования в возмущенном и кеплеровском случаях. Полученные результаты приведены на рис. 1.

Как видно из рисунка, быстродействие понижается с уменьшением расстояния $a_{PS} = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_S|$ между массивными телами и повышением частоты $n_{PS} \sim a_{PS}^{-3/2}$. Так, например, если бы третьим телом был Юпитер⁴, то учет гравитационного влияния на него от Меркурия замедлял бы численный процесс почти в 3 раза. Хотя сам Меркурий наименее влиятельный по отношению к Юпитеру

⁴ Конечно, это нарушает условие ограниченности задачи, ведь Юпитер самый массивный из объектов Солнечной системы. Но даже несмотря на это, полученные оценки будут также справедливы для нашего анализа.

объект из всех представителей земной группы. Если бы на месте Юпитера был Плутон, Меркурий ($a_{PS} \approx 0.01$) тормозил бы численный процесс в 20 раз! Очевидно, подобные оценки справедливы и для астероидной динамики.

4. Преобразования уравнений

Представим уравнения (9) в виде уравнений возмущенной задачи двух тел

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -(\mu_S + \mu_P) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \mathbf{P}, \quad (10)$$

$$\mathbf{P} = \mu_S \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3} \right) + \mu_P \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} \right).$$

Здесь \mathbf{P} можно рассматривать как возмущающую силу, вызванную отклонением массивных тел от их барицентра.

Учитывая, что

$$\mu_S \mathbf{x}_S + \mu_P \mathbf{x}_P = \mathbf{0},$$

после несложных преобразований получаем

$$\mathbf{P} = -\frac{\mu_S}{|\mathbf{x}|^3} \left(\frac{|\mathbf{x}|^3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3} - 1 \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) - \frac{\mu_P}{|\mathbf{x}|^3} \left(\frac{|\mathbf{x}|^3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} - 1 \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_P). \quad (11)$$

Рассмотрим плоский случай, где положим, что $|\mathbf{x}_S| = \text{const}$ и $|\mathbf{x}_P| = \text{const}$, и пока сосредоточим наше внимание на первом члене (11):

$$\mathbf{P}_S = -\frac{\mu_S}{|\mathbf{x}|^3} \left(\frac{|\mathbf{x}|^3}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3} - 1 \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S). \quad (12)$$

Разложим \mathbf{P}_S на радиальную и трансверсальную составляющие:

$$\mathbf{P}_S = -\frac{\mu_S}{|\mathbf{x}|^2} [(1 + \alpha_S^2 - 2\alpha_S \cos \varphi_S)^{-3/2} - 1] [(1 - \alpha_S \cos \varphi_S) \mathbf{S} - \alpha_S \sin \varphi_S \mathbf{T}], \quad (13)$$

где \mathbf{S} и \mathbf{T} — орты соответствующих направлений, $\alpha_S = |\mathbf{x}_S|/|\mathbf{x}|$, а φ_S — угол между векторами \mathbf{x} и \mathbf{x}_S . Следует заметить, что φ_S — быстрая переменная.

Разложим теперь (13) в ряд по малому параметру α_S и представим в виде:

$$\mathbf{P}_S = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^2} \beta_S \left(\mathbf{S} \sum_{k=0}^{\infty} C_k(\alpha_S) \cos k\varphi_S - \mathbf{T} \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha_S) \sin k\varphi_S \right), \quad (14)$$

где $\mu = \mu_S + \mu_P$, $\beta_S = \mu_S/\mu$, а C_k и S_k — степенные ряды по α_S . Повторим вышеизложенные выкладки для второго члена в (11) с привлечением соответствующих величин α_P , β_P и φ_P .

5. Усреднение Гаусса

Как мы видим, представление (14) оголяет короткопериодические члены, каковыми здесь являются тригонометрические функции, соответствующие $k \geq 1$. Избавиться от них и тем самым повысить быстродействие численного интегрирования уравнений (10) можно, если применить к \mathbf{P}_S (14) усреднение Гаусса (Дубошин, 1961). В результате чего уравнения (10) принимают вид

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^G}{dt^2} = -[\mu_S C(\alpha_S) + \mu_P C(\alpha_P)] \frac{\mathbf{x}^G}{|\mathbf{x}^G|^3}, \quad (15)$$

где

$$C(\alpha) = 1 + C_0(\alpha) = 1 + \frac{3}{4}\alpha^2 + \frac{45}{64}\alpha^4 + \frac{175}{256}\alpha^6 + \dots \quad (16)$$

Физический смысл уравнений (15) состоит в том, что они описывают (в плоском случае!) движение материальной частицы в поле тяготения двух материальных колец с центрами в начале координат и с радиусами орбит массивных тел (Дубошин, 1961). Причем их гравитационные параметры равны μ_S и μ_P соответственно.

Далее нас будет интересовать случай $\mu_P \ll \mu_S$. Но тогда из $\mu_S \alpha_S = \mu_P \alpha_P$ следует, что для всех $k > 1$

$$\mu_S \alpha_S^k = \mu_P \alpha_P^k \left(\frac{\mu_P}{\mu_S} \right)^{k-1} \ll \mu_P \alpha_P^k.$$

Отсюда $\mu_S C_0(\alpha_S) \ll \mu_P C_0(\alpha_P)$. Поэтому будем полагать $C(\alpha_S) = 1$: кольцо для тела S вырождается в точку, совпадающую с барицентром. Таким образом, мы будем иметь дело с уравнениями

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^G}{dt^2} = -\mu[1 + \beta_P C_0(\alpha_P)] \frac{\mathbf{x}^G}{|\mathbf{x}^G|^3}. \quad (17)$$

Как известно, усредненные уравнения (17) довольно хорошо описывают эволюцию слабозмущенной орбиты, поскольку точно учитывают вековые изменения (первого порядка) в орбитальных элементах. На рис. 2 на частном примере показаны отклонения вектора момента количества движения \mathbf{s} и вектора Лапласа \mathbf{f} от их усредненных аналогов, получаемых из решения уравнений (17). Поскольку векторы \mathbf{s} и \mathbf{f} однозначно определяют орбиту, то их малые

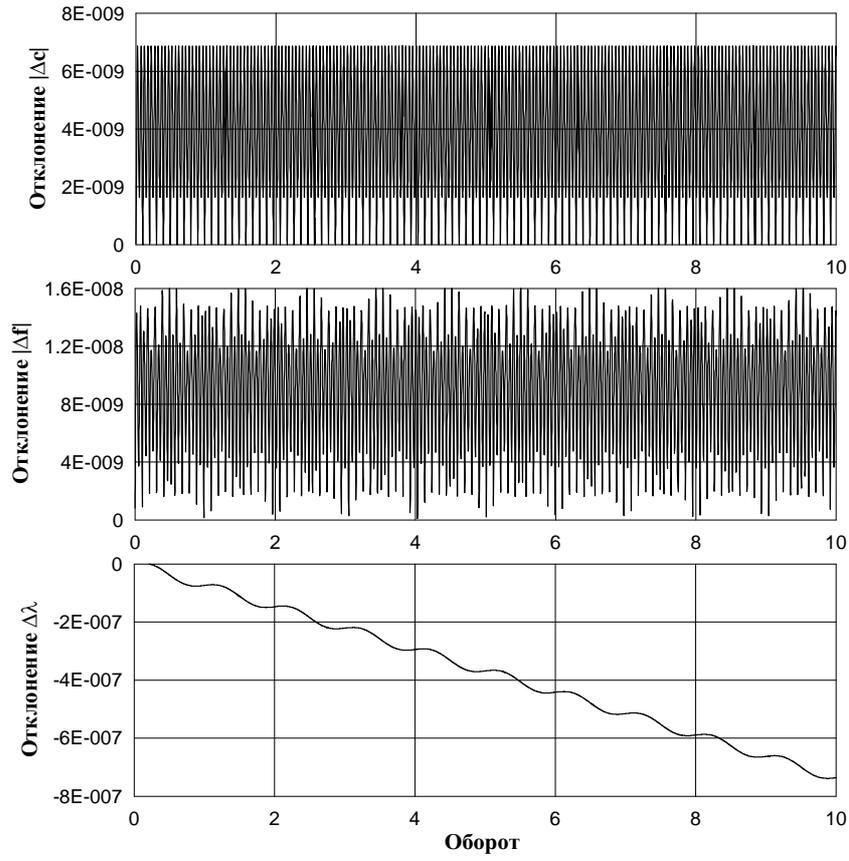


Рис. 2. Отклонения усредненной орбиты от истинной ($\alpha_P = 0.2$, $\beta_P = 10^{-6}$)

отклонения говорят о том, что исследуемое тело всегда находится вблизи усредненной орбиты.

Очевидно, обладая таким замечательным свойством, усредненные уравнения могут быть весьма полезными для численного интегрирования, в особенности когда короткопериодические возмущения малы в сравнении с вековыми. Более того, напомним, что эти уравнения примечательны для нас еще и тем, что они не содержат короткопериодических членов.

Однако для высокоточного интегрирования уравнения (17) еще остаются непригодными, поскольку они не учитывают довольно большие вековые эффекты в быстрой переменной, определяющей положение исследуемого тела на орбите. На рис. 2 эти вековые эффекты показаны на примере истинной долготы λ .

Вековые эффекты в быстрой переменной могут объясняться несоответствием действительной энергии ее усредненному аналогу. Что-

бы показать это, исследуем поведение энергии на примере почти кругового движения.

6. Уравнение энергии и его решение в круговом случае

Поскольку мы рассматриваем тело S как центральное, то $\mathbf{P} = \mathbf{P}_P$. Тогда уравнение для энергии H будет иметь вид

$$\frac{dH}{dt} = (\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}_P). \quad (18)$$

Для приближенной оценки поведения H все динамические переменные в правой части (18) будем относить к круговой орбите. Тогда $(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}) = 0$, а $(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T}) = |\mathbf{c}|/|\mathbf{x}|$. Кроме того,

$$|\mathbf{x}| = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} = -2H.$$

Здесь и ниже для удобства будем опускать индекс P для α , β и φ . В результате уравнение (18) примет вид

$$\frac{dH}{dt} = -2H \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} \beta \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha) \sin k\varphi.$$

Заметим, что $\alpha = \text{const}$.

С помощью дифференциального преобразования

$$d\lambda = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} dt$$

перейдем к новой независимой переменной, истинной долготе λ , а угол φ представим как

$$\varphi = [\omega - 1]\lambda + \varphi_0,$$

где $\omega = \alpha^{-3/2}$ — отношение средних движений второго и третьего тел, а φ_0 — начальная фаза, определяющая взаимное расположение тел на орбитах.

Наконец, уравнение энергии переписется как

$$\frac{dH}{d\lambda} = -2H\beta \sum_{k=1}^{\infty} S_k(\alpha) \sin k([\omega - 1]\lambda + \varphi_0). \quad (19)$$

Уравнение (19) легко проинтегрировать аналитически. Полагая, $\lambda_0 = 0$ и $H_0 = H(0)$, будем иметь решение

$$\ln \frac{H}{H_0} = 2 \frac{\beta}{\omega - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(\alpha)}{k} (\cos k([\omega - 1]\lambda + \varphi_0) - \cos k\varphi_0). \quad (20)$$

После усреднения (20) по λ с точностью до малых β первого порядка получаем

$$\frac{\bar{H}}{H_0} = 1 - 2 \frac{\beta}{\omega - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(\alpha)}{k} \cos k\varphi_0. \quad (21)$$

7. Модифицированные усредненные уравнения движения

Поскольку энергия H^G для усредненных уравнений (17) постоянна и равна H_0 , то

$$\left(\frac{\bar{H}}{H_0} \right)^{3/2} = \left(\frac{\bar{H}}{H^G} \right)^{3/2} = \frac{\bar{n}}{n^G},$$

где \bar{n} и n^G — средние движения, соответствующие \bar{H} и H^G . Отсюда следует, что для погашения вековых эффектов в быстрой переменной λ необходимо изменить среднее движение n^G , умножая его на \bar{n}/n^G , что на самом деле соответствует замене n^G на \bar{n} . С другой стороны, поскольку $n^G \propto \sqrt{\mu}$, замену среднего движения n^G можно интерпретировать как домножение массового параметра на $(\bar{n}/n^G)^{1/2}$. В результате после несложных преобразований уравнения (17) переписутся как

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^G}{dt^2} = -\mu \left(\frac{\bar{H}}{H^G} \right)^{3/4} [1 + \beta C_0(\alpha)] \frac{\mathbf{x}^G}{|\mathbf{x}^G|^3}. \quad (22)$$

На практике отношение энергий в (22) можно вычислять по приближенной формуле

$$\left(\frac{\bar{H}}{H^G} \right)^{3/4} = 1 + \delta, \quad \text{где} \quad \delta = -\frac{3}{2} \frac{\beta}{\alpha^{-3/2} - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k(\alpha)}{k} \cos k\varphi_0. \quad (23)$$

Чтобы иметь представление о рядах $S_k(\alpha)$ выпишем некоторые из них до малых α четвертого порядка:

$$S_1 = \frac{3}{8}\alpha^3 + \dots, \quad S_2 = \frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{5}{8}\alpha^4 + \dots,$$

$$S_3 = \frac{15}{8}\alpha^3 + \dots, \quad S_4 = \frac{35}{16}\alpha^4 + \dots,$$

В силу того, что ряды в (14) обладают даламберовской характеристикой (Холшевников, 1997), $C_k(\alpha)$ и $S_k(\alpha)$ имеют общий вид

$$\begin{pmatrix} C_k \\ S_k \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} c_{k,k+2i} \\ s_{k,k+2i} \end{pmatrix} \alpha^{k+2i},$$

при этом $c_{00} = s_{11} = 0$.

Интересно заметить, что величина вековых эффектов в быстрой переменной, главным образом, зависит от отношения размеров орбит α второго и третьего тел и их начальной конфигурации, задаваемой углом φ_0 . Причем для любого $\alpha < 1$ можно подобрать такие φ_0 , при которых вековые эффекты будут отсутствовать, т.е. $\delta = 0$. Так, при достаточно малых α корни φ_0 будут близки к значениям $\varphi_0 = \pi/4 + i\pi/2$ ($i = 0, 3$), которые фактически являются корнями уравнения $\cos 2\varphi_0 = 0$.

Мы исследовали точность представления движения уравнениями (22) в той же планетной задаче, что мы рассмотрели выше. На рис. 3 показаны расхождения решений уравнений (22) и (9) в зависимости от величины α . Здесь график этой зависимости обозначен как $(1 + \delta)(\mu_S + \mu_P + \delta\mu)$. Интегрирование выполнялось на интервале времени 84 оборота третьего тела⁵. Для сравнения мы также приводим оценки расхождений решений для невозмущенных уравнений: $C(\alpha) = 0$ (μ_S); для уравнений, где масса второго включена в массу первого: $C(\alpha) = 1$, $C_0(\alpha) = 0$ ($\mu_S + \mu_P$); а также для уравнений с возмущающей силой от гауссова кольца, моделирующего влияние от второго тела: $C(\alpha) > 1$, $C_0(\alpha) \neq 0$ ($\mu_S + \mu_P + \delta\mu$). Во всех случаях $\varphi_0 = 0$, а начальные данные для третьего тела соответствовали оскулирующей круговой орбите с единичным радиусом.

Из рисунка видно, что учет вековых эффектов позволяет существенно повысить точность представления движения. Низкая точность вблизи $\alpha = 0.5$, по-видимому, объясняется тем, что под сильным гравитационным влиянием от второго тела орбита третьего значительно отличается от круговой, поэтому полученные нами оценки вековых эффектов становятся слишком грубыми. Кроме того, следует заметить, что несистематические всплески для $\alpha < 0.3$, главным образом, обусловлены влиянием ошибок округления, которые, в свою очередь, вызваны значительным уменьшением шага интегрирования и потому увеличением объема вычисления, что требуется для интегрирования короткопериодических возмущений.

Расхождения решений для других уравнений значительно больше. Хотя для уравнений, где $C(\alpha) = 1$ и $C(\alpha) > 1$ (гауссово кольцо), с уменьшением α точность их решений повышается, причем для $C(\alpha) > 1$ ошибка $|\Delta\mathbf{x}|$ убывает быстрее. Тогда как интегрирование невозмущенных уравнений дает почти одно и то же довольно большое расхождение решений независимо от α .

Интересно отметить, что при $\alpha = 0.3$ (Марс) моделирование влияния от планеты с помощью гауссова кольца дает тот же ре-

⁵ Если третье тело — Юпитер, то это соответствует интервалу 1000 лет

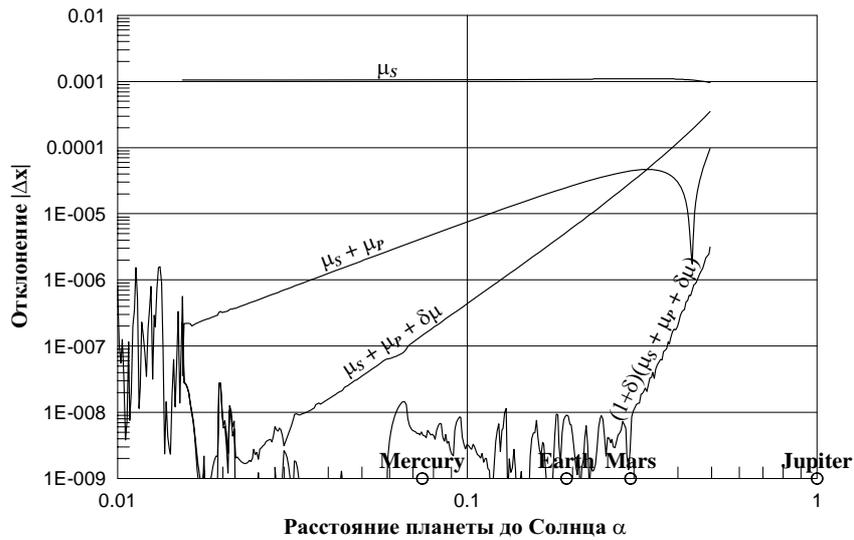


Рис. 3. Отклонения решений упрощенных уравнений от истинного решения при различных α ($\beta = 10^{-6}$)

зультат, что и простое включение массы планеты в центральное тело. Поэтому в данном случае не имеет никакого смысла использовать сложные уравнения с гауссовым кольцом вместо простых уравнений задачи двух тел, но с модифицированным гравитационным параметром.

К сожалению, оценки вековых эффектов (23), полученные нами для кругового случая, оказываются совершенно бесполезными даже для умеренно эксцентричных орбит. В то же время аналитические выкладки для δ в общем случае весьма затруднительны. Далее мы предлагаем численный алгоритм для приближенного вычисления δ .

8. Приближенное вычисление δ

Идея алгоритма состоит в оценке δ по отклонению решений, полученных из усредненных и исходных уравнений, на малом интервале времени порядка одного оборота. Затем на оставшемся, более длительном интервале интегрируются модифицированные усредненные уравнения, учитывающие вековые эффекты в угловой переменной, за счет чего и удается повысить быстродействие численного процесса.

Очевидно, проблема низкого быстродействия вследствие короткопериодических возмущений становится наиболее ощутимой, главным образом, в эволюционных задачах, когда исследование дви-

жения проводится на довольно длительных временных интервалах порядка 100 оборотов объекта и более. Поэтому ценность предлагаемого алгоритма будет тем выше, чем длиннее исследуемый интервал времени. Впрочем, следует заметить, поскольку алгоритм приближенный, он не позволяет полностью учесть вековые эффекты в быстрой переменной, тем не менее, с его помощью все же удастся повысить точность представления движения на несколько порядков.

В задаче двух тел нетрудно показать⁶, что, если энергии двух близких кеплеровских решений отличаются на величину ΔH^K в некоторый начальный момент времени t_0 , это приводит к расхождению решений $\Delta \mathbf{x}^K$ в соответствии с линейной оценкой

$$\Delta \mathbf{x}^K = \frac{3}{2} \frac{\Delta H^K}{H^K} \dot{\mathbf{x}}^K \Delta t, \quad (24)$$

где $\Delta t = t - t_0$. Домножая (24) скалярно слева и справа на $\dot{\mathbf{x}}^K$, после несложных преобразований получим

$$\frac{\Delta H^K}{H^K} = \frac{2}{3} \frac{(\Delta \mathbf{x}^K \cdot \dot{\mathbf{x}}^K)}{|\dot{\mathbf{x}}^K|^2 \Delta t}. \quad (25)$$

Тогда, полагая, что наши решения близки к кеплеровским, согласно формулам (23) и (24) будем иметь

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{\Delta \bar{H}}{H^G} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}}|^2 \Delta t}. \quad (26)$$

Оценка (26) приближенная. Чтобы улучшить ее, можно повторить вычисления, но уже с привлечением модифицированных уравнений с оценкой (26), и так далее, до сходимости δ .

Теперь рассмотрим пространственную задачу о движении материальной частицы в гравитационном поле центрального тела S и материального кольца P с радиусом ρ_P . Тогда в координатной системе, связанной с плоскостью кольца, уравнения задачи можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^G}{dt^2} = -\mu_S \frac{\mathbf{x}^G}{|\mathbf{x}^G|^3} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}^G}, \quad (27)$$

где $\mathbf{x}^G = (x_1, x_2, x_3)^T$, а U — силовая функция кольца (Дубошин, 1961):

$$U = \frac{2}{\pi} \frac{\mu_P}{\sqrt{(\rho + \rho_P)^2 + x_3^2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \psi}},$$

⁶ См., например, (Avdyushev, 2003)

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \kappa^2 = \frac{4\rho\rho_P}{(\rho + \rho_P)^2 + x_3^2}.$$

Если положим $x_3 = 0$, $\alpha = \rho_P/\rho$, а $\beta = \mu_P/\mu$, то после разложения правой части (27) по малому параметру α немедленно получим уравнения вида (17).

Наконец, вводя δ (26) в (27), получаем модифицированные уравнения

$$\frac{d^2 \mathbf{x}^G}{dt^2} = (1 + \delta) \left(-\mu_S \frac{\mathbf{x}^G}{|\mathbf{x}^G|^3} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}^G} \right). \quad (28)$$

9. Численные результаты

Чтобы исследовать точность представления движения уравнениями (28), мы провели численный эксперимент, подобный описанному выше, но на примере пространственной задачи. Напомним, что проблема понижения быстродействия численного интегрирования особенно важна при моделировании спутниковой динамики, которая обременена короткопериодическими возмущениями от близких массивных спутников типа галилеевых. Чтобы приблизить эксперимент к условиям спутниковой задачи, мы взяли начальные условия для третьего тела, соответствующие орбите одного из далеких спутников Юпитера, Гималии, с орбитальными элементами $e = 0.16$, $I = 28^\circ$ и приняли $\mu_S = 1$, $\mu_P = 10^{-4}$. Интегрирование выполнялось методом Эверхарта 15-го порядка с переменным шагом на интервале времени 146 оборотов объекта (100 лет).

Важность упомянутой выше проблемы наглядно демонстрирует рис. 4. Так, если мы численно интегрируем орбиту Гималии, только учет влияния от Ио будет требовать уменьшение шага интегрирования, а потому понижения быстродействия в 8 раз.

На рис. 5 приведены результаты эксперимента, отклонения решений упрощенных уравнений относительно истинного решения. Как показывает рисунок, качественно они такие же как и на рис. 3 для планетной задачи. Хотя здесь для модифицированных уравнений величина δ вычислялась по изложенному выше алгоритму, причем на интервале Δt , равном 1 обороту. Из рисунка видно, что учет таким способом остаточных вековых эффектов в быстрой переменной позволяет повысить точность представления движения на несколько порядков.

Мы также исследовали эффективность применения уравнений (28) в моделировании реального движения далекого спутника Гималии. В структуру возмущений мы включили влияние от всех

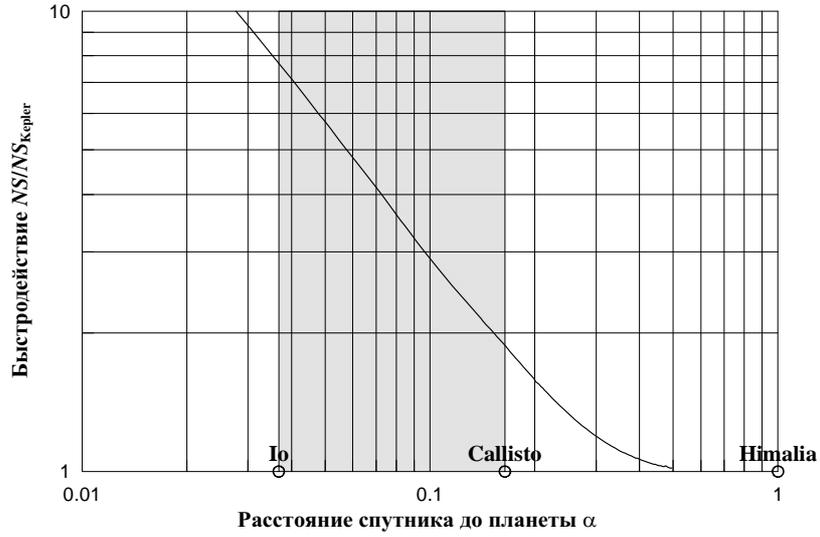


Рис. 4. Зависимость быстродействия интегрирования орбиты далекого спутника от близости массивного спутника и центрального тела ($\mu_P = 10^{-4}$)

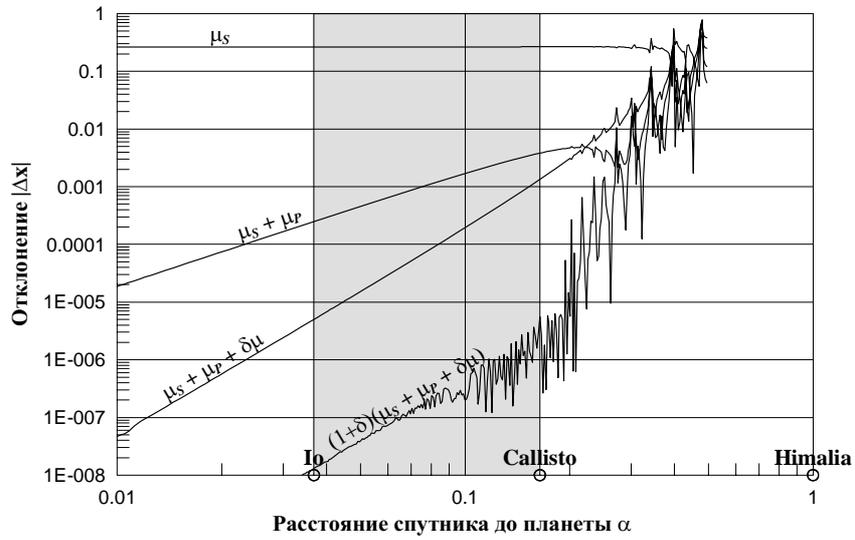


Рис. 5. Отклонения решений упрощенных уравнений от истинного решения при различных α в спутниковой задаче ($\mu_P = 10^{-4}$, $\varphi_0 = 0$)

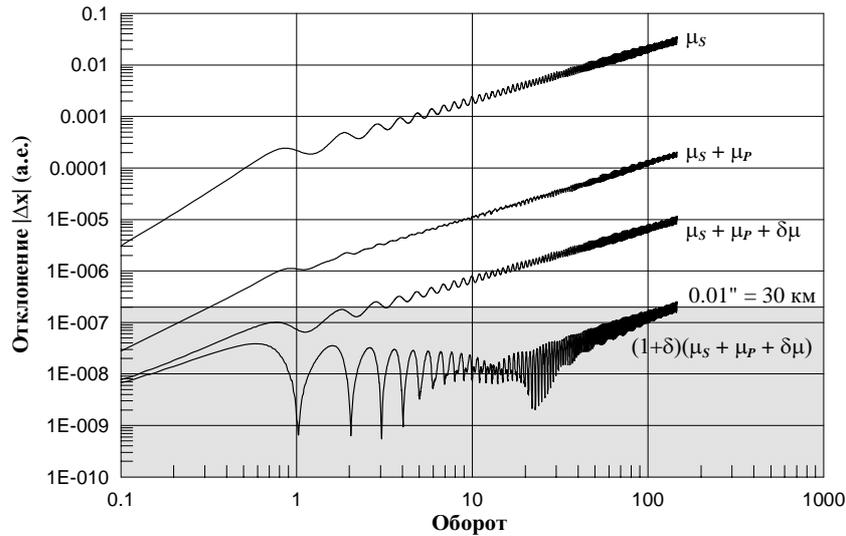


Рис. 6. Эволюция ошибок моделирования в задаче динамики Гималии JVI

галилеевых спутников и от Солнца. Причем координаты массивных спутников вычислялись по формулам кругового движения в плоскости экватора Юпитера⁷, а координаты Солнца — из эфемериды DE200. В усредненных уравнениях влияние от галилеевых спутников моделировалось с помощью гауссовых колец.

На рис. 6 показано поведение ошибок моделирования при использовании различных упрощенных уравнений. В частности, из рисунка видно, что модификация уравнений, полученных путем усреднения Гаусса, позволяет повысить их точность на несколько порядков.

Такие же расчеты мы выполнили для других далеких спутников: Эллары, Пасифе и Синопе⁸. В таблице показано, насколько существенно можно повысить точность численного моделирования динамики этих спутников путем введения параметра δ . Из таблицы видно, что учет остаточных вековых эффектов позволяет повысить точность моделирования на 1–2 порядка. Здесь большая полуось a и ошибки $|\Delta\mathbf{x}|$ даны в а.е.

Следует заметить, что данные оценки получены из предположения, что галилеевы спутники движутся по круговым и экваториальным орбитам. В реальности это не так. Поэтому мы также

⁷ Параметры для вычисления координат галилеевых спутников были взяты из (Lieske, 1998).

⁸ Начальные динамические параметры для этих спутников как и для Гималии были взяты из (Rocher, Charpont, 1996).

Таблица I. Повышение точности численного моделирования спутникового движения при учете δ

Спутник	a	$ \Delta\mathbf{x} _{\delta=0}$	$ \Delta\mathbf{x} _{\delta\neq 0}$	$ \Delta\mathbf{x} _{L_C-L}$	$ \Delta\mathbf{x} _{L_{CP}-L}$	
Himalia	VI	0.076	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$9.7 \cdot 10^{-7}$
Elara	VII	0.078	$2.8 \cdot 10^{-5}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	$2.6 \cdot 10^{-6}$
Pasiphae	VIII	0.157	$3.8 \cdot 10^{-7}$	$5.1 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$7.3 \cdot 10^{-8}$
Sinope	IX	0.158	$2.4 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-8}$

оценили, насколько существенно понижается точность моделирования движения далеких спутников за счет такого упрощения модели динамической системы галилеевых спутников. Полученные ошибки приводятся в таблице как $|\Delta\mathbf{x}|_{L_C-L}$. Они фактически определяют наивысшую точность моделирования, какую можно получить при использовании модифицированных уравнений с параметром δ . В частности, мы видим, что для спутников семейства Гималии с помощью введения δ можно реально получить повышение точности лишь на порядок, а для семейства Пасифе учет вековых эффектов вообще ничего не дает. Причем для семейства Гималии предельно достижимая точность довольно низкая и составляет в угловой величине порядка $0.1''$, что соответствует точности ПЗС-наблюдений.

Однако точность моделирования можно заметно повысить в особенности для спутников семейства Пасифе, если в представлении движения галилеевых спутников учитывать прецессию их орбит (см. $|\Delta\mathbf{x}|_{L_{CP}-L}$).

10. Короткопериодические возмущения и численная стабилизация

В заключение хотелось бы отметить, что усреднение Гаусса, освобождая уравнения от короткопериодических членов, дает возможность в дальнейшем эффективно применять к ним другие манипуляции для повышения быстродействия численного интегрирования. Например, применяя стабилизирующие преобразования или симплектические отображения к усредненным уравнениям, мы можем добиться повышения оперативности их численного интегрирования еще в несколько раз. При наличии же в уравнениях короткопериодических членов эти подходы не эффективны⁹.

⁹ На примере планетной динамики это показано в (Avdyushev, 2003; Fukushima, 2003)

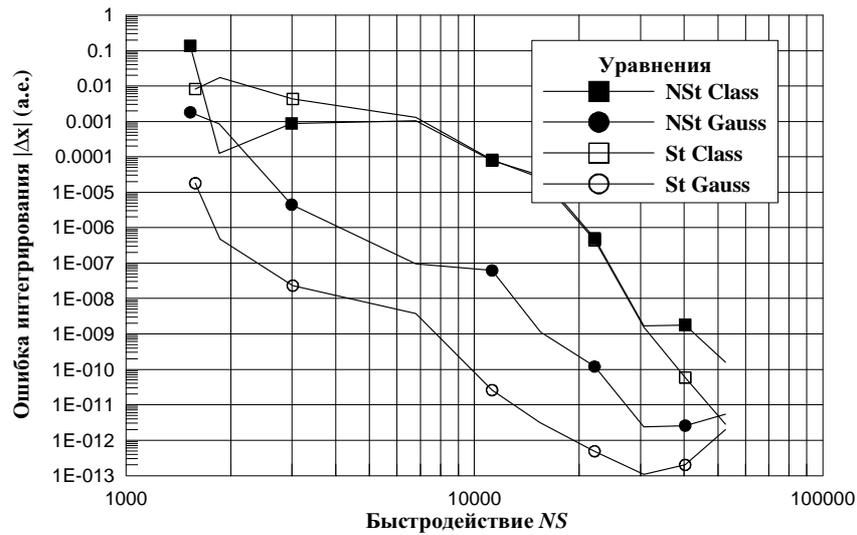


Рис. 7. Характеристики точность–быстродействие для различных уравнений движения (Гималия, 100 лет)

На рис. 7 показано, насколько эффективно применение стабилизации Баумгарта (Baumgarte, 1973) в численном моделировании спутникового движения. Из рисунка видно (NSt Class и St Class), что при наличии в уравнениях короткопериодических членов стабилизация ничего не дает. В то же время применение стабилизации к усредненным уравнениям (NSt Gauss и St Gauss) позволяет повысить быстродействие интегрирования еще в несколько раз. Так, например, при точности порядка 10^{-7} а.е. с помощью усреднения Гаусса и стабилизации Баумгарта можно повысить быстродействие численного процесса более, чем в 10 раз.

Список литературы

- Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е.: 1978, *Теория движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979-2000 годы*, Томск: Изд-во ТГУ.
- Rocher P., Chapront J.: 1996, 'Observations and Ephemerides of the Faint Satellites of Jupiter', *Astron. Astrophys.* **311**, 710–714.
- Jacobson R.A.: 2000, 'The Orbits of the Outer Jovian Satellites', *Astron. J.* **120**, 2679–2686.
- Emelyanov N.V.: 2005, 'Ephemerides of the Outer Jovian Satellites', *Astron. Astrophys.* **435**, 1173–1179.
- Дубошин Г.Н.: 1961, *Теория притяжения*, М.: Изд-во физ.-мат. лит.
- Everhart, E.: 1974, 'Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits', *Cel. Mech.* **10**, 35–55.

- Холшевников, К.В.: 1997, 'Даламберовские функции в небесной механике', *Астрон. журн.* **74** (1), 146–153.
- Avdushev V.: 2003, 'Numerical Stabilization of Orbital Motion', *Cel. Mech.* **87** (4), 383–409.
- Lieske, J.H.: 1998, 'Galilean Satellites Ephemerides E-5', *Astron. Astrophys.* **129**, 205–217.
- Fukushima T.: 2003, 'Efficient Orbit Integration by Scaling for Kepler Energy Consistency', *Astron. J.* **126**, 1097–1111.
- Rocher, P., Chapront, J.: 1996, "Observations and Ephemerides of the Faint Satellites of Jupiter", *Astron. Astrophys.* **311**, 710–714.
- Baumgarte, J.: 1973, 'Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion', *Cel. Mech.* **5** (4), 490–501.

