

**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Т.В. БОРДОВИЦЫНА, В.А. АДЮШЕВ**

**ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ  
ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

**Аналитические и численные методы**

Учебное пособие

Издательство Томского университета 2007

Рецензент: профессор МГУ, д. ф.-м. н. Н.В. Емельянов

*Печатается по решению учебно-методического объединения «Физика»*

**Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А.**

Б Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. — 178 с.

ISBN

В настоящем учебном пособии излагаются применяемые в задачах динамики искусственных спутников Земли (ИСЗ) уравнения движения, аналитические и численные методы их решения, а также различные способы представления действующих на ИСЗ сил. Три последних раздела книги посвящены описанию существующих аналитических и численных моделей движения ИСЗ и возможностей их практического использования. Данное пособие представляет собой детальное описание одного из важных разделов курса «Небесная механика», являющегося федеральной компонентой государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ГОС ВПО) по специальности 010900 «Астрономия».

Это учебное пособие может использоваться в преподавании курсов «Небесная механика» и «Аналитические и численные методы интегрирования в космической геодезии», входящих в федеральную составляющую ГОС ВПО по специальности 300500 «Космическая геодезия», а также для чтения специального курса по динамике искусственных спутников Земли при осуществлении различных специализаций, связанных с созданием, эксплуатацией и использованием искусственных спутников Земли.

УДК  
ББЛ

ISBN

© Т.В. Бордовицына, В.А. Авдюшев, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
ВВЕДЕНИЕ	9
1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ	11
2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ	14
2.1. Притяжение объемного тела	14
2.2. Основные сведения о полиномах Лежандра	15
2.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферических функций.	17
2.4. Нормированные и полностью нормированные функции Лежандра	18
2.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям	19
2.6. Различные формы записи потенциала притяжения Земли	21
2.7. Структура разложения потенциала Земли	22
2.8. Определение постоянных гравитационного поля Земли. Стандартные Земли	24
2.9. Представление потенциала Земли системой точечных масс	24
3. КЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ	26
3.1. Уравнения движения в прямоугольных координатах	26
3.2. Уравнения движения в оскулирующих кеплеровых элементах	26
3.3. Вывод уравнений в возмущениях канонических переменных методом Гамильтона–Якоби	31
4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ИСЗ	33
4.1. Возмущения от несферичности геопотенциала	33
4.2. Возмущения от приливных деформаций центрального тела	33
4.3. Лунно-солнечные возмущения	34
4.4. Возмущения от светового давления	34
4.5. Возмущения от сопротивления атмосферы	35
4.6. Классификация орбит ИСЗ	38
5. ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ	40
5.1. Вводные замечания	40
5.2. Возмущающая функция	40
5.3. Вековые возмущения	41
5.4. Короткопериодические возмущения	42
5.5. Задача Акнеса	42
5.6. Задачи Винти и Кислика	43
5.7. Задача двух неподвижных центров	45

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ	48
6.1. Вывод уравнений в возмущениях промежуточного движения обобщенным методом Лагранжа	48
6.2. Уравнения движения в эйлеровых элементах	51
6.3. Метод Цейпеля	55
6.4. Метод рядов и преобразований Ли (метод Хори–Депри)	56
7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ	61
7.1. Вводные замечания	61
7.2. Формы представления потенциала Земли в виде функции элементов орбит	61
7.3. Особенности вычисления лунно-солнечных возмущений	64
8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ	69
8.1. Особенности численного интегрирования уравнений движения ИСЗ	69
8.2. Рекуррентные алгоритмы для вычисления шаровых функций $V_{n,m}$ и их производных	70
8.3. Вычисление возмущений от приливных деформаций центрального тела	76
8.4. Особенности представления других возмущений в численном моделировании движения ИСЗ	80
9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	84
9.1. Вводные замечания	84
9.2. Явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга	84
9.3. Неявный одношаговый алгоритм Эверхарта	86
9.4. Экстраполяционные алгоритмы	88
9.4.1. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера	88
9.4.2. Метод Булирша и Штера	90
9.4.3. Выбор шага интегрирования	91
9.5. Многошаговые методы	92
9.5.1. Принципы построения	92
9.5.2. Алгоритм Адамса–Мульттона–Коуэлла	95
9.6. Сравнительная характеристика методов	97
10. МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ	99
10.1. Стабилизация уравнений орбитального движения	99
10.1.1. Неустойчивость кеплеровского движения	100
10.1.2. Метод Баумгарта	101
10.1.3. Возмущенная задача двух тел	103
10.2. Регуляризация уравнений движения. Преобразование Кустанхеймо–Штифеля	106
10.3. Метод Энке	110

10.3.1. Классический метод Энке .....	111
10.3.2. Обобщение метода Энке .....	113
10.3.3. Уравнения Энке в переменных Кустаанхеймо–Штифеля .	114
10.3.4. Метод Энке как метод приведения систем к стандартному виду .....	115
10.3.5. Уравнения Энке в задачах спутниковой динамики .....	117
10.4. Метод вариации постоянных .....	121
10.5. Исследование эффективности методов теории специальных возмущений в задачах динамики ИСЗ .....	122
10.5.1. Численный эксперимент .....	122
10.5.2. Характеристики эффективности численного интегрирования .....	123
10.5.3. Численные результаты .....	123
<b>11. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ</b> .....	<b>126</b>
11.1. Вводные замечания .....	126
11.2. Высокоточные аналитические модели движения ИСЗ .....	126
11.3. Решение главной проблемы движения ИСЗ методом преобразований Ли .....	127
11.4. Построение численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ .....	133
11.4.1. Алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства .....	133
11.4.2. Построение полуаналитической методики расчета движения резонансных ИСЗ типа «Навстар» в эйлеровых элементах	135
<b>12. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ</b> .....	<b>140</b>
12.1. Вводные замечания .....	140
12.2. Высокоточные численные модели движения ИСЗ .....	140
12.3. Методика численного исследования структуры возмущений и ее применение .....	141
12.4. Исследование структуры орбитальных возмущений ИСЗ различных классов орбит .....	142
12.4.1. Исследование орбитальных возмущений геодинимических ИСЗ с высотами полета выше 300 км .....	142
12.4.2. Исследование орбитальных возмущений резонансных ИСЗ .....	143
12.5. Определение трасс спутников .....	157
<b>13. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА</b> .....	<b>160</b>
13.1. Проблема космического мусора .....	160
13.2. Математические модели распада космического аппарата на орбите .....	162
13.3. Вычисления пространственной плотности фрагментов .....	164

13.4. Численное моделирование распределения и эволюции орбит групп фрагментов распада.....	165
13.5. Тестирование модели взрыва по данным наблюдений .....	165
13.6. Примеры численного моделирования распределения и эволюции фрагментов распада КА на орбитах. ....	167
13.6.1. Моделирование взрыва на геостационарной орбите.....	167
13.6.2. Анализ динамической эволюции распределения фрагментов распада на геостационарной орбите .....	168
13.6.3. Исследование динамической эволюции и распределения фрагментов распада КА, движущихся по вытянутым орбитам .....	169

ЛИТЕРАТУРА

172

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано для того, чтобы дать в руки студентов, специализирующихся в области небесной механики и космической геодезии, книгу, охватывающую большинство методов и подходов, используемых для построения аналитических и численных моделей движения искусственных спутников Земли (ИСЗ).

За 50 лет существования раздела науки, именуемого динамикой ИСЗ, создано много новых методов и алгоритмов, предназначенных как для приближенного, так и для высокоточного моделирования движения, написаны глубокие монографии (Каула, 1970; Аксенов, 1977; Дубошин, 1983) и аналитические обзоры (Уральская, Журавлев, 1980; Емельянов, 1980), но практически нет учебников. Вышедшая в 1965 г. книга П.Е. Эльясберга «Введение в теорию полета искусственных спутников Земли», которую можно было бы рекомендовать студентам для первоначального ознакомления с проблемой, давно стала библиографической редкостью. А по современным результатам нет даже скольнибудь подробных обзоров. Справедливости ради следует сказать, что практически все вышедшие в последнее десятилетие учебники по спутниковой геодезии содержат те или иные сведения из теории движения ИСЗ. Однако выбор приводимых форм уравнений движения, методов их интегрирования и моделей сил очень часто произволен и не дает полного представления об этом разделе небесной механики. Среди книг, изданных по динамике ИСЗ в последнее время за рубежом, выделяется книга О. Монтенбрука и Е. Гилла «Спутниковые орбиты. Модели, методы и приложения» (Montenbruck, Gill, 2000). Будучи переведенной на русский язык она вполне могла бы стать хорошим учебным пособием по прикладным вопросам динамики ИСЗ. Мы же в настоящем пособии излагаем теорию движения ИСЗ как раздел небесной механики и стремимся охватить все методы и подходы, применяемые в этой области науки.

Как аналитический, так и численный подход к решению уравнений небесной механики основаны на приближении решений отрезками каких-либо рядов, однако в построении решений есть принципиальная разница.

Аналитический подход позволяет строить ряды, аппроксимирующие решение на значительных интервалах времени от одного до нескольких тысяч оборотов объекта. Кроме того, очень существенно, что аналитическая аппроксимация, хотя и может зависеть от типа орбиты, но никогда напрямую не связана с начальными условиями уравнений движения. В связи с этим аналитическую аппроксимацию можно считать общим решением. Поэтому аналитические методы иногда называют методами общих возмущений.

Главная трудность при аналитическом подходе состоит в представлении правых частей уравнений движения в виде явных функций времени и элементов орбит. Это достигается путем разложения возмущающей функции в ряд пуассоновского типа.

При численном подходе к решению уравнений движения аппроксимация ищется в виде различных модификаций отрезка ряда Тейлора на интервале времени, существенно меньшем одного оборота. Коэффициенты разложения вычисляются, исходя из начальных условий уравнений движения, и полученное

решение является частным. Поэтому численные методы называют иногда методами специальных или частных возмущений.

Здесь мы рассмотрим оба подхода в применении к задаче моделирования движения ИСЗ, обсудим специфические особенности каждого подхода и приведем простые примеры их использования. Кроме того, дадим обзор современных высокоточных аналитических и численных моделей движения ИСЗ и рассмотрим возможности их практического применения.



## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой детальное описание одного из важных разделов курса «Небесная механика», являющегося федеральной компонентой государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ГОС ВПО) по специальности 010900 «Астрономия». Это учебное пособие может использоваться также в преподавании курсов «Небесная механика» и «Аналитические и численные методы интегрирования в космической геодезии», входящих в федеральную составляющую ГОС ВПО по специальности 300500 «Космическая геодезия», также для чтения специального курса по динамике искусственных спутников Земли (ИСЗ) при осуществлении различных специализаций, связанных с созданием, эксплуатацией и использованием искусственных спутников Земли.

В предисловии изложена краткая история развития методов аналитического и численного интегрирования уравнений движения искусственных спутников Земли. Отмечены особенности того и другого подхода к задаче.

В главе 1 рассматриваются астрономические системы координат, используемые в задачах динамики ИСЗ, и описываются связывающие их преобразования.

В главе 2 описаны две формы представления геопотенциала: в виде разложения по сферическим функциям и системой точечных масс.

Третья глава посвящена классическим формам представления уравнений движения ИСЗ. Рассматриваются уравнения движения в прямоугольных координатах, уравнения в оскулирующих кеплеровых элементах, уравнения в канонических переменных, а также уравнения в возмущениях канонических переменных.

В 4-й главе представлены модели сил, действующих на ИСЗ. Здесь дано описание возмущающих сил, связанных с несферичностью земного потенциала, влиянием приливных деформаций центрального тела, влиянием третьего тела, а также сил светового давления и возмущений от сопротивления атмосферы.

В 5-й главе рассматривается решение главной проблемы динамики ИСЗ, связанной с описанием движения ИСЗ под действием сжатия Земли. Дается описание так называемых промежуточных орбит, полностью или частично учитывающих действие сжатия Земли на движение спутника.

В 6-й главе обсуждаются аналитические методы построения теории движения ИСЗ. Приводится общий метод Лагранжа для построения уравнений в возмущениях параметров промежуточной орбиты. Приводятся уравнения движения, использующие в качестве промежуточной орбиты задачу двух неподвижных центров. Даются алгоритмы двух наиболее часто употребляемых в задачах динамики ИСЗ методов усреднения: Цейпеля и Хори-Депри (метод рядов и преобразований Ли).

В 7-й главе рассматриваются способы представления правых частей уравнений движения в виде явных функций времени.

Главы с 8-й по 10-ю посвящены проблемам численного моделирования движения ИСЗ. В главе 8 дается постановка задачи численного моделирования движения ИСЗ, обсуждаются особенности уравнений движения, затрудняющие

процесс их численного интегрирования, приводятся алгоритмы вычисления возмущающих сил, используемые в численном моделировании.

В главе 9 приводится описание наиболее часто используемых в задачах динамики ИСЗ численных методов высоких порядков и способов оценки точности интегрирования.

Глава 10 посвящена различным способам преобразования уравнений движения, повышающим точность и быстродействие процесса их численного интегрирования. Представлены различные способы стабилизации и регуляризации уравнений движения, и кроме того, даны различные алгоритмы Энке, использующие в качестве промежуточного движения как классическую задачу двух тел, так и ее регуляризованные и стабилизированные аналоги. В конце главы даны оценки эффективности применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в процессе численного интегрирования уравнений движения ИСЗ.

В главе 11 приведены примеры применения аналитических методов в задачах динамики ИСЗ. Дан обзор высокоточных аналитических теорий движения ИСЗ. Приведено решение главной проблемы движения ИСЗ методом Ли преобразований, а также дана полуаналитическая методика расчета движения 12-часового спутника, построенная с помощью того же метода осреднения. Причем в качестве промежуточного движения использовано решение обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Двенадцатая глава посвящена описанию примеров использования численных методов в задачах динамики ИСЗ. Здесь также дан обзор высокоточных численных моделей движения ИСЗ, представлен ряд методик прикладного характера, основанных на использовании численных моделей, и приведено описание результатов их применения.

Глава 13 связана с обсуждением методов моделирования процесса формирования и орбитальной эволюции космического мусора, образовавшегося в результате распада космических аппаратов на орбитах. Глава заканчивается описанием оценок соответствия приводимых моделей данным, полученным из наблюдений. Кроме того, дается графическое описание некоторых интересных эволюционных процессов, имеющих место в динамике фрагментов космического мусора, образовавшегося на орбитах в результате взрывов аппаратов.

## 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

В задачах динамики ИСЗ применяют две основные системы прямоугольных декартовых координат: опорную небесную (инерциальную) и земную опорную. Приближенной реализацией инерциальной системы координат является не вращающаяся система небесных координат. Для ее задания используют среднюю экваториальную систему координат стандартной эпохи, которая материализуется в виде фундаментального каталога положений и собственных движений звезд. С 1996 г. (IERS Conventions, 1996) в качестве опорных используются также положения квазизвездных радиоисточников (квазаров), которые в силу своей удаленности от Земли практически не имеют собственных движений. В настоящее время в качестве стандартного рекомендован каталог FK-5, который содержит обе фундаментальные системы. В качестве основной координатной плоскости используется плоскость, связанная с экватором J2000.0, ось абсцисс направлена в равноденствие J2000.0. Опорную небесную систему координат, связанную с барицентром Солнечной системы, вычисленным на эпоху J2000.0, называют BCRC (Barycentric Celestial Reference System), а опорную небесную систему координат, связанную с центром Земли на эпоху J2000.0, — GCRS (Geocentric Celestial Reference System). В задачах динамики ИСЗ используются только системы координат, связанные с центром Земли, поэтому в обозначениях можно опустить упоминание о геоцентре и опорную систему координат обозначать как CRS.

Земная опорная система координат реализуется в виде списка средних прямоугольных координат станций, отнесенных к определенной эпохе. Начало координат помещается в центре масс всей Земли, включая океаны и атмосферу, ось аппликата направлена к среднему северному полюсу Земли (Международное условное начало — CIO). CIO и плоскость нулевого меридиана в настоящее время определяются Международной службой вращения Земли и референционных систем (<http://www.iers.org>). Эту систему будем обозначать как TRS (Terrestrial Reference System)<sup>1</sup>.

Связь между системами координат CRS и TRS определяется формулами:

$$\begin{aligned} TRS &= [ABCD]CRS, \\ CRS &= [ABCD]^T TRS. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Матрица прецессии  $D$  задается формулой

$$D = r(-z)q(\theta)r(\xi_0) = \begin{pmatrix} \cos z & -\sin z & 0 \\ \sin z & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \xi_0 & \sin \xi_0 & 0 \\ -\sin \xi_0 & \cos \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

а прецессионные параметры  $\xi_0, z, \theta$  находятся из соотношений

<sup>1</sup> Более подробное описание современных опорных систем координат можно найти, например, в монографии К.М. Антоновича (2005).

$$\xi_0 = (2306'', 2181 + 1'', 39656T - 0'', 000139T^2)\tau + (0'', 30188 - 0'', 000345T)\tau^2 + 0'', 017998\tau^3,$$

$$z = \xi_0 + (0'', 79280 + 0'', 000400T)\tau^2 + 0'', 018203\tau^3,$$

$$\theta = (2004'', 3109 - 0'', 85330T - 0'', 000217T^2)\tau + (0'', 42665 - 0'', 000217T)\tau^2 - 0'', 041833\tau^3,$$

где  $T$  отсчитывается в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 до выбранной произвольно эпохи, а  $\tau$  — от выбранной эпохи до даты наблюдения также в юлианских столетиях.

Матрица нутации  $C$  задается формулой

$$C = p(-\varepsilon)r(-\Delta\psi)p(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi & -\sin\Delta\psi & 0 \\ \sin\Delta\psi & \cos\Delta\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ 0 & -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где

$$\bar{\varepsilon} = 23^\circ 26' 21'', 448 - 46'', 8510t - 0'', 00059t^2 + 0'', 001813t^3, \\ t = T + \tau, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} + \Delta\varepsilon.$$

Для вычисления  $\Delta\varepsilon, \Delta\psi$  используются ряды в соответствии с принятой Международным астрономическим союзом в 1980 г. теорией нутации (IERS Conventions, 1996)

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^n (A_i + A'_i t) \sin(\text{ARGUMENT}),$$

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^n (B_i + B'_i t) \cos(\text{ARGUMENT}),$$

где

$$\text{ARGUMENT} = \sum N_i F_i.$$

Коэффициенты  $A_i, A'_i, B_i, B'_i$  и целочисленные множители  $N_i$  фундаментальных аргументов  $F_i$  приведены в (IERS Conventions, 1996), а также в прил. 1 к электронной хрестоматии «Динамика искусственных спутников Земли» (<http://solar.tsu.ru>). Фундаментальные аргументы вычисляются по формулам:

$$F_1 = l = 134^\circ, 96340251 + 1717915923'', 2178t + 31'', 8792t^2 + 0'', 051635t^3 - 0'', 00024470t^4,$$

$$F_2 = l' = 357^\circ, 52910918 + 129596581'', 0481t - 0'', 5532t^2 + 0'', 000136t^3 - 0'', 00001149t^4,$$

$$F_3 = F = 93^\circ, 27209062 + 1739527262'', 8478t - 12'', 7512t^2 - 0'', 001037t^3 + 0'', 00000417t^4,$$

$$F_4 = D = 297^\circ, 85019547 + 1602961601'', 2090t - 6'', 3706t^2 + 0'', 006593t^3 - 0'', 00003169t^4,$$

$$F_5 = \Omega = 125^\circ, 04455501 - 6962890'', 2665t + 7'', 4722t^2 + 0'', 007702t^3 - 0'', 00005939t^4,$$

где  $t$  измеряется в юлианских столетиях от эпохи J2000.0 (каждое столетие по 36525 дней, каждый день по 86400 секунд динамического времени);  $l$  — средняя аномалия Луны;  $l'$  — средняя аномалия Солнца;  $F = L - \Omega$ ;  $D$  — средняя элонгация Луны от Солнца;  $\Omega$  — средняя долгота восходящего узла Луны;  $L$  — средняя долгота Луны.

В IERS стандарт 1996 и 2003 (IERS Conventions, 1996) введена также объединенная теория прецессии–нутации, в которой используются смешанные ряды прецессии–нутации с вековыми членами, определяемыми прецессией.

Матрица  $B$  осуществляет преобразование инерциальной CRS-системы истинной даты в систему TRS истинной даты:

$$B = r(h) = \begin{pmatrix} \cosh h & \sinh h & 0 \\ -\sinh h & \cosh h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Истинное гринвичское звездное время  $h$  определяется формулой

$$h = H_0 + \omega(t_0 - \Delta H), \quad (1.5)$$

где

$$H_0 = 24110^s,54841 + 8640184^s,812866T_* + 0^s,093104T_*^2 - 6^s,2 \cdot 10^{-6}T_*^3 \quad (1.6)$$

— гринвичское среднее время в  $0^h$  на дату наблюдения;  $\Delta H = \Delta\psi \cos \varepsilon$ ;  $t_0$  — временной интервал от  $0^h$  UT1 на дату наблюдения до момента наблюдения;  $\Delta t = \Delta UT1 - UTC$ ;  $\omega = 86401^s,84812866$  — скорость среднего звездного вращения Земли;  $T_* = d_*/36525$ , причем  $d_*$  есть число дней во всемирном времени от эпохи J2000.0.

Движение полюса задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $x_p$  есть положительное южное перемещение вдоль гринвичского меридиана, заданного ВИН;  $y_p$  — положительное южное перемещение по направлению, перпендикулярному гринвичскому меридиану. Величины  $x_p, y_p$  — координаты мгновенного полюса относительно полюса ВИН 1984, публикуются в циркулярах ВИН, кроме того, их можно найти по электронному адресу: <http://maia.usno.navy.mil>.

## 2. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

### 2.1. Притяжение объемного тела

Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки  $P$  единичной массы телом  $K$ . Следуя далее монографии (Аксенов, 1977), будем предполагать, что тело имеет произвольную форму, а плотность распределения масс является кусочно-непрерывной функцией координат. Выберем прямоугольную, жестко связанную с телом систему координат  $O\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс тела (Рис. 2.1).

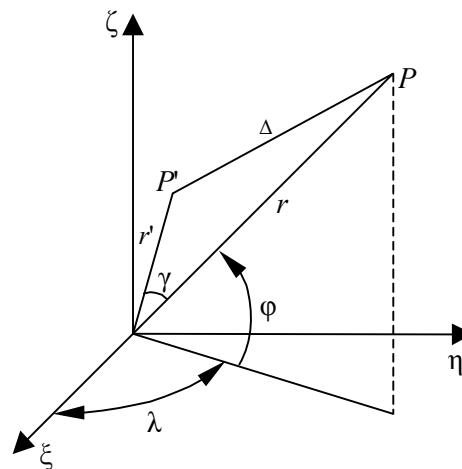


Рис. 2.1. Система координат

Пусть элемент объема  $d\tau$  тела  $K$  находится в точке  $P'(\xi', \eta', \zeta')$ , плотность распределения масс обозначим через  $\tilde{\theta}$ . Тогда потенциал притяжения или силовая функция тела  $K$  в точке  $P(\xi, \eta, \zeta)$  будет определяться формулой

$$U = f \iiint_T \frac{\tilde{\theta} d\tau}{\Delta}, \quad (2.1)$$

где  $f$  — постоянная тяготения;  $\Delta = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}$  — расстояние точки  $P(\xi, \eta, \zeta)$  от текущей точки  $P'(\xi', \eta', \zeta')$ ;  $T$  — объем, занятый телом  $K$ .

Если обозначить через  $r$  и  $r'$  радиус-векторы точек  $P$  и  $P'$ , через  $\gamma$  — угол между ними, то  $\Delta$  и  $\gamma$  можно записать в виде  $\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}$ , где  $\cos \gamma = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')/rr'$ .

Потенциал  $U$  обладает, как известно (Дубошин, 1968), следующими свойствами:

1. Потенциал  $U$  есть функция, непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем  $\lim_{r \rightarrow \infty} (rU) = fM$ , где  $M$  — масса тела  $K$ .
2. Частные производные первого порядка от потенциала  $U$  по координатам являются непрерывными функциями во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности.
3. Если через  $X, Y, Z$  обозначить проекции силы притяжения точки  $P$  телом  $K$  на координатные оси  $O\xi, O\eta, O\zeta$ , то во всем пространстве

$$X = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta}.$$

4. Во внешнем относительно тела  $K$  пространстве потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0.$$

5. Внутри тела  $M$  потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \text{ к.}$$

Для доказательства первых четырех свойств достаточно, чтобы функция  $\tilde{\theta}$  была кусочно-непрерывной, а для доказательства условия 5 требуется выполнение условия Гольдера, которое состоит в том, что для точки  $P$ , лежащей внутри тела  $K$ , всегда найдется объем  $d\tau$ , содержащий точку  $P$ , что для любых двух точек  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  и  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  этого объема имеет место неравенство

$$|\kappa(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) - \kappa(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)| < A\rho^\alpha,$$

где  $\rho = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}$  — расстояние между точками;  $A$  и  $\alpha$  — постоянные величины, причем  $0 < \alpha < 1$ . Это условие будет выполнено, если плотность имеет непрерывные частные производные первого порядка.

Перечисленные свойства полностью определяют потенциал притяжения тела  $K$  и могут быть использованы для его практического определения. Возможен, конечно, и другой подход, который заключается в непосредственном вычислении интеграла (2.1). Однако в конечном виде этот интеграл берется только в некоторых частных случаях: однородный шар, шар с концентрическим распределением плотности, однородный двухосный или трехосный эллипсоид. Как известно, для концентрического шара потенциал дается формулой

$$U = \frac{fM}{r}.$$

В общем случае, рассмотренном в начале этого раздела, интеграл (2.1) можно вычислить только при помощи ряда. Наибольшее распространение получило в настоящее время разложение потенциала в ряд по сферическим функциям.

## 2.2. Основные сведения о полиномах Лежандра

Остановимся на основных свойствах полиномов Лежандра. Полином Лежандра  $P_n(z)$  порядка  $n$  можно определить формулой Родрига

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (z^2 - 1)^n}{dz^n}. \quad (2.2)$$

Выпишем несколько первых  $P_n(z)$ :

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= z, \\ P_2(z) &= \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), \\ P_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z + 5z^3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Формулу (2.2) можно преобразовать к виду

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^h (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r}, \quad (2.4)$$

где  $h = \frac{n}{2}$  или  $h = \frac{n-1}{2}$ , в зависимости от того, какое из этих чисел целое.

Полиномы Лежандра высших порядков могут быть вычислены при помощи рекуррентного соотношения

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0. \quad (2.5)$$

Кроме того, справедливы формулы

$$(1-z^2) \frac{dP_n(z)}{dz} = nP_{n-1}(z) - nzP_n(z), \quad (2.6)$$

$$\frac{dP_{n+1}(z)}{dz} - \frac{dP_{n-1}(z)}{dz} = (2n+1)P_n(z). \quad (2.7)$$

Отметим некоторые важные свойства полиномов Лежандра<sup>2</sup>:

1. Полином Лежандра является четной или нечетной функцией в зависимости от того, четна или нечетна его степень, так что

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z).$$

2. На границах интервала  $[-1, 1]$  полином Лежандра принимает следующие значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n.$$

3. Для любого  $z$  из промежутка  $(-1, 1)$  при  $n > 0$

$$|P_n(z)| < 1.$$

4. При больших  $n$  справедлива оценка

$$|P_n(z)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-z^2)}}.$$

5. Справедлива формула Лапласа

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi.$$

6. Производящей функцией для  $P_n(z)$  является функция  $(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-1/2}$ , так что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(z). \quad (2.8)$$

7. Полином Лежандра удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-z^2) \frac{d^2 P_n(z)}{dz^2} - 2z \frac{dP_n(z)}{dz} + n(n+1)P_n(z) = 0,$$

которое называется уравнением Лежандра.

<sup>2</sup> Более подробное изложение теории полиномов Лежандра можно найти в монографиях (Гобсон, 1952; Аксенов 1986) и в учебном пособии (Холшевников и др., 2005).



### 2.3. Присоединенные функции Лежандра. Общее выражение для сферических функций

Присоединенную функцию Лежандра  $P_{n,m}(z)$  порядка  $n$  и степени  $m$  можно определить формулой

$$P_{n,m}(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}, \quad (2.9)$$

где  $P_n(z)$  — полином Лежандра.

Используя формулы (2.3), запишем несколько первых  $P_{n,m}(z)$ :

$$\begin{aligned} P_{01} &= 0, \\ P_{11} &= (1-z^2)^{1/2}, \\ P_{22} &= 3(1-z^2), \\ P_{31} &= \frac{3}{2}(-1+5z^2)(1-z^2)^{1/2}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для вычисления  $P_{n,m}(z)$  можно использовать следующие рекуррентные соотношения:

$$(n+2-m)P_{n+2,m}(z) - (2n+3)zP_{n+1,m}(z) + (n+m+1)P_{n,m}(z) = 0, \quad (2.10)$$

$$P_{n,m+2}(z) - \frac{2(m+1)z}{\sqrt{1-z^2}}P_{n,m+1}(z) + (n-m)(n+m+1)P_{n,m}(z) = 0. \quad (2.11)$$

При этом достаточно пользоваться первой формулой, принимая во внимание, что  $P_{m-1,m} = 0$ ,  $P_{m,m} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2m-1)(1-z^2)^{m/2}$ .

Присоединенные функции Лежандра являются составными элементами сферических функций. Функции двух аргументов  $P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\psi$ ,  $P_{n,m}(\cos \theta) \sin m\psi$  называются элементарными сферическими функциями.

Сферическая функция порядка  $n$  определяется формулой

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{m=0}^n P_{n,m}(\cos \theta) [A_{n,m} \cos m\psi + B_{n,m} \sin m\psi],$$

где  $A_{n,m}$ ,  $B_{n,m}$  — произвольные постоянные.

Функция  $Y_n$  удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \psi^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

а присоединенная функция Лежандра  $P_{n,m}$  является одним из решений уравнения

$$(1-z^2) \frac{d^2 Y}{dz^2} - 2z \frac{dY}{dz} + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}]Y = 0,$$

которое при  $m = 0$  переходит в уравнение Лежандра.

Приведем формулу, которая носит название теоремы сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\omega) = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2\sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\cos\theta)P_{n,m}(\cos\theta')\cos m\omega. \quad (2.12)$$

Отметим одно важное свойство сферических функций: интеграл по поверхности сферы единичного радиуса от произведения элементарных сферических функций различных порядков и степеней равен нулю. В то же время

$$\int_0^n \int_0^{2\pi} \left[ P_{nm}(\cos\theta) \frac{\cos m\psi}{\sin m\psi} \right]^2 \sin\theta d\theta d\psi = 2\pi(2n+1)(n+m)!. \quad (2.13)$$

#### 2.4. Нормированные и полностью нормированные функции Лежандра

В динамике ИСЗ используются как присоединенные функции, так и нормированные и полностью нормированные функции Лежандра. Пусть  $P_{n,m}$  дается равенствами (2.9) и (2.4):

$$P_{n,m}(z) = (1-z)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m}, \quad \text{а} \quad P_n(z) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} z^{n-2r}. \quad (2.14)$$

Тогда нормированная присоединенная функция Лежандра  $P'_{nm}$  задается формулой

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(z), \quad (2.15)$$

а полностью нормированная функция — формулой

$$\bar{P}_{n,m}(z) = \sqrt{2n+1} P'_{n,m}(z) = \sqrt{2n+1} \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(z),$$

и таким образом, учитывая (2.14),

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m},$$

$$\bar{P}_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n+1)(n-m)!}{(n+k)}} (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(z)}{dz^m},$$

где  $P_n(z)$  — полином Лежандра.

Используемое здесь нормирование имеет следующий смысл:

для  $P_{nm}$  согласно (2.13) имеем

$$\int_S \left[ P_{n,m}(\cos\theta) \frac{\cos m\psi}{\sin m\psi} \right]^2 dS = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2\pi}{2n+1},$$

а для  $P'_{n,m}$  и  $\bar{P}_{n,m}$  будем иметь:

$$\int_S \left[ P'_{n,m}(\cos\theta) \frac{\cos m\psi}{\sin m\psi} \right]^2 dS = \frac{4\pi}{2n+1},$$

$$\int_S \left[ \bar{P}_{n,m}(\cos \theta) \frac{\cos m\psi}{\sin m\psi} \right]^2 dS = 4\pi,$$

где  $S$  — поверхность сферы единичного радиуса.

## 2.5. Разложение потенциала в ряд по сферическим функциям

Как и ранее, будем предполагать, что притягивающее тело имеет произвольную форму, а плотность является кусочно-непрерывной функцией координат. Тогда в системе координат  $O\xi\eta\zeta$ , жестко связанной с телом, потенциал  $U$  в точке  $P(\xi, \eta, \zeta)$  задается формулой (1.1).

Предположим, что точка  $P$  лежит вне притягивающего тела. Разложим в ряд  $1/\Delta$ . Для этого представим  $1/\Delta$  в виде

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(r'/r)\cos\gamma + (r'/r)^2}}. \quad (2.16)$$

Это дает возможность применить формулу (2.8), полагая  $\alpha = r'/r$ . Получаем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\gamma), \quad (2.17)$$

и подставляя эту формулу в (2.16), будем иметь:

$$U = f \iiint_T \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos\gamma) \tilde{\theta} d\tau. \quad (2.18)$$

Перейдем к полярным (или сферическим) координатам:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos\varphi \cos\lambda, \quad \eta = r \cos\varphi \sin\lambda, \quad \zeta = r \sin\varphi, \\ \xi' &= r' \cos\varphi' \cos\lambda', \quad \eta' = r' \cos\varphi' \sin\lambda', \quad \zeta' = r' \sin\varphi'. \end{aligned}$$

Тогда  $\cos\gamma$  можно записать в виде

$$\cos\gamma = \sin\varphi \sin\varphi' + \cos\varphi \cos\varphi' \cos(\lambda - \lambda').$$

Для того чтобы представить правую часть (2.18) в полярных координатах, воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра (2.12). Это дает

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin\varphi)P_{n,m}(\sin\varphi') \cos m(\lambda - \lambda'). \quad (2.19)$$

Далее, поскольку

$$\cos m(\lambda - \lambda') = \cos m\lambda \cos m\lambda' + \sin m\lambda \sin m\lambda',$$

равенство (2.19) примет вид

$$\begin{aligned} P_n(\cos\gamma) &= P_n(\sin\varphi)P_n(\sin\varphi') + 2 \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin\varphi) \cos m\lambda [P_{n,m}(\sin\varphi') \cos m\lambda'] \right\} + \\ &+ 2 \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{n,m}(\sin\varphi) \sin m\lambda [P_{n,m}(\sin\varphi') \sin m\lambda'] \right\}. \end{aligned}$$

Подставим эту формулу в (2.18) и введем обозначения

$$Mr_0^n J_n = - \iiint_T r'^n P_n(\sin\varphi') \tilde{\theta} d\tau,$$

$$Mr_0^n C_{n,m} = \iiint_T \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} r'^m P_{n,m}(\sin \varphi') \cos m\lambda' \tilde{\theta} d\tau, \quad (2.20)$$

$$Mr_0^n S_{n,m} \iiint_T \frac{2(n-m)!}{(n+m)!} r'^m P_{n,m}(\sin \varphi') \sin m\lambda' \tilde{\theta} d\tau,$$

где  $M$  — масса тела;  $r_0$  — некоторая линейная величина для земного экваториального радиуса. Величины  $J_n$ ,  $C_{n,m}$ ,  $S_{n,m}$  являются безразмерными. С учетом введенных обозначений мы получаем хорошо известные разложения потенциала  $U$ :

$$U = -\frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\sin \varphi) + \frac{fM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda]. \quad (2.21)$$

Коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{n,m}$ ,  $S_{n,m}$  зависят от формы тела и распределения массы внутри него. Рассмотрим первые из них. Пусть в (2.20)  $n = 0$ . Так как

$$P_0(\sin \varphi') = 1, \text{ а } \iiint_T \tilde{\theta} d\tau = M,$$

то

$$J_0 = -1 \quad (2.22)$$

Далее, положим в (2.20)  $n = 1$ ,  $m = 1$ ,

$$P_1(\sin \varphi') = \sin \varphi', \quad P_{11}(\sin \varphi') = \cos \varphi'$$

и

$$mr_0 J_1 = -\iiint_T \tilde{\theta} r' \sin \varphi' d\tau = -\iiint_T J' dM = -M \zeta_0$$

и аналогично

$$mr_0 C_{11} = M \xi_0, \quad mr_0 S_{11} = M \eta_0,$$

$\xi_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\zeta_0$  — координаты центра масс тела. Поскольку система  $O\xi\eta\zeta$  находится в центре масс, то

$$J_1 = 0, \quad C_{11} = 0, \quad S_{11} = 0 \quad (2.23)$$

Для  $n = 2$ ,  $m = 1$ ,  $m = 2$  можно получить

$$C_{21} = \frac{E}{Mr_0^2}, \quad S_{21} = \frac{D}{Mr_0^2}, \quad J_2 = \frac{2C - (A + B)}{2Mr_0^2},$$

$$C_{22} = \frac{B - A}{4mr_0^2}, \quad S_{22} = \frac{F}{2mr_0^2}, \quad (2.24)$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — главные центральные моменты инерции;  $D$ ,  $E$ ,  $F$  — произведения инерции, т.е.

$$A = \iiint_T (\eta'^2 + \zeta'^2) \tilde{\theta} d\tau,$$

$$B = \iiint_T (\xi'^2 + \zeta'^2) \tilde{\theta} d\tau,$$

$$C = \iiint_T (\xi'^2 + \eta'^2) \tilde{\theta} d\tau,$$

$$D = \iiint_T \eta' \zeta' \tilde{\theta} d\tau,$$

$$E = \iiint_T \xi' \zeta' \tilde{\theta} d\tau,$$

$$F = \iiint_T \xi' \eta' \tilde{\theta} d\tau.$$

Учитывая перечисленные свойства,  $U$  можно переписать в виде

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda] \right\}. \quad (2.25)$$

Замечания:

1. Разложение потенциала  $U$  сходится абсолютно и равномерно при  $r > \bar{r}$ , где  $\bar{r}$  — расстояние наиболее удаленной точки поверхности тела от его центра.
2. Если одна из осей, скажем  $O\zeta$ , совпадает с главной центральной осью инерции, тогда  $D = 0$ ,  $E = 0$ , а следовательно, и  $C_{21} = 0$ ,  $S_{21} = 0$ . Если все три координаты совпадают с главными центральными осями инерции, тогда и коэффициент  $S_{22} = 0$ .
3. Если плотность  $\tilde{\theta}$  является функцией времени, то и коэффициенты  $J_n$ ,  $C_{n,m}$ ,  $S_{n,m}$  являются функциями времени, а если  $\tilde{\theta}$  постоянна, коэффициенты также постоянны.

## 2.6. Различные формы записи потенциала притяжения Земли

1. Стандартная форма, утвержденная комиссией №7 МАС, имеет вид

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda] \right\}.$$

2. В теоретических расчетах обычно применяется формула

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) \cos m(\lambda - \lambda_{nm}) \right\},$$

где связь с коэффициентами  $C_{n,m}$ ,  $S_{n,m}$  задается соотношениями

$$C_{n,m} = J_{n,m} \cos m\lambda_{n,m}, \quad S_{n,m} = J_{n,m} \sin m\lambda_{n,m}, \quad J_{n,m} = \sqrt{C_{n,m}^2 + S_{n,m}^2}, \quad \operatorname{tg} m\lambda_{n,m} = \frac{S_{n,m}}{C_{n,m}}.$$

3. В нормированной форме  $P_{n,m} \rightarrow P'_{n,m}$

$$P'_{n,m}(z) = \sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} P_{n,m}(z),$$

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P'_{n,m}(\sin \varphi) [A_{n,m} \cos m\lambda + B_{n,m} \sin m\lambda] \right\}.$$

4. Полностью нормированная форма имеет вид

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\},$$

$$\bar{C}_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \frac{C_{n,m}}{\sqrt{2n+1}}, \quad \bar{S}_{n,m} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \frac{S_{n,m}}{\sqrt{2n+1}}.$$

5. При численном моделировании используется наиболее общая форма записи

$$U = \frac{fM}{r_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\},$$

причем

$$P_{n,0} = P_n, \quad \bar{C}_{n,0} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n-m)!}} \frac{J_n}{\sqrt{2n+1}}, \quad \bar{S}_{n,0} = 0.$$

Следует отметить, что в современных стандартных представлениях геопотенциала коэффициенты  $J_n$  не выделяются.

## 2.7. Структура разложения потенциала Земли

Рассмотрим представление потенциала Земли в виде

$$U = \frac{fM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \varphi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_{n,m}(\sin \varphi) [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda] \right\}. \quad (2.26)$$

Все члены этого разложения можно разделить на три группы:

1. Зональные гармоники. Пусть  $m = 0$ , тогда имеем члены вида

$$-\frac{fM}{r} J_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n \sin \varphi. \quad (2.27)$$

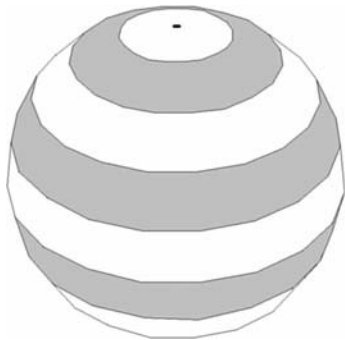


Рис. 2.2. Положительные и отрицательные значения зональной гармоники для  $n=4$

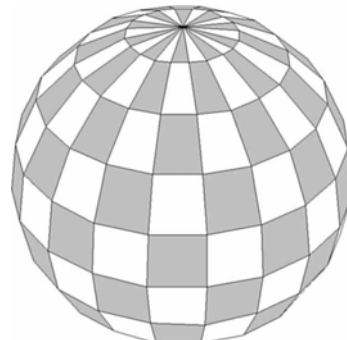


Рис. 2.3. Положительные и отрицательные значения тессеральной гармоники для  $n=10$  и  $k=4$



Рис. 2.4. Положительные и отрицательные значения секториальной гармоники для  $n=10$

Поскольку полином Лежандра  $P_n$  имеет  $n$  действительных различных корней, по абсолютной величине меньших единицы, функция  $P_n(\sin\varphi)$  на сфере будет менять знак на  $n$  параллелях, таким образом сфера разделится на  $n+1$  широтную зону, в которой (2.27) будет принимать попеременно положительные и отрицательные значения. Этот член называется зональной гармоникой потенциала порядка  $n$ . На рис. 2.2 по-

казано распределение положительных и отрицательных зон для  $n=4$ .

2. Тессеральные гармоники (рис. 2.3). Пусть  $0 < m < n$ , тогда имеем члены

$$\begin{aligned} \frac{fM}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n C_{n,m} P_{n,m}(\sin\varphi) \cos m\lambda, \\ \frac{fM}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n S_{n,m} P_{n,m}(\sin\varphi) \sin m\lambda, \end{aligned} \quad (2.28)$$

которые обращаются в нуль на  $n - m$  параллелях, определяемых уравнением

$$\frac{d^m P_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^m} = 0,$$

и  $2m$  меридианах  $\cos m\lambda = 0$ ,  $\sin m\lambda = 0$ .

3. Секторальные гармоники (рис. 2.4). Пусть, наконец,  $m=n$ , имеем члены

$$\begin{aligned} \frac{fM}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n C_{n,n} P_{n,n}(\sin\varphi) \cos n\lambda, \\ \frac{fM}{r} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n S_{n,n} P_{n,n}(\sin\varphi) \sin n\lambda, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\frac{d^n P_n(\sin\varphi)}{d(\sin\varphi)^n} = \text{const.}$$

В этом случае, поскольку порядок дифференцирования и порядок полинома совпадают, формулы (2.29) обращаются в нуль только на меридианах, когда  $\cos n\lambda = 0$  или  $\sin n\lambda = 0$ .

Рассмотрим механический смысл различных слагаемых в (2.26). Самый первый член  $U$  представляет собой потенциал шара со сферическим распределением плотности, а все остальные члены характеризуют отличие Земли от тела сферической формы.

Вторая зональная гармоника характеризует полярное сжатие Земли и является основной характеристикой. Остальные дают более мелкие детали. Тессеральные и секторальные гармоники характеризуют отклонение Земли от тела, динамически симметричного относительно оси вращения. Зональные гармони-

ки, для которых  $n$  нечетно, и тессеральные гармоники, для которых  $(n - m)$  нечетно, определяют асимметрию Земли относительно экватора.

## 2.8. Определение постоянного гравитационного поля Земли. Стандартные Земли

Числовые коэффициенты  $C_{n,m}$  и  $S_{n,m}$  разложения (2.26) потенциала Земли определяются как путем геодезических и гравиметрических измерений, так и с помощью наблюдений ИСЗ. Создание и уточнение гравитационных моделей Земли является одной из основных задач, которая решается с помощью наблюдений ИСЗ с одновременным привлечением геодезических и гравиметрических данных. Первые модели гравитационного поля Земли, так называемые Стандартные Земли, были построены в Смитсоновской астрофизической обсерватории в 70-х гг. прошлого века. Модель Стандартная Земля I получена на основе фотографических наблюдений спутников камерами Бейкера—Наанна. Стандартная Земля II включает в себя все коэффициенты разложения земного потенциала до 16-го порядка включительно и некоторые гармоники более высокого порядка. Одновременно определялись координаты наблюдательных станций, причем точность определения координат многих станций 10 м и лучше. Стандартная Земля III содержит зональные гармоники до 36-го порядка, все тессеральные гармоники до 18-го порядка и степени и некоторые гармоники более высоких порядков.

Годдардовский центр космических полетов в 80-е гг., используя спутниковые и гравиметрические данные, получил более точные модели Земли — GEM (Goddard Earth Model). Модель GEM9 основана на обработке оптических, лазерных и радиотехнических наблюдений почти 30 спутников. Всего было использовано 840000 спутниковых измерений, из них почти 200000 лазерных наблюдений. Модель GEM10 объединяет спутниковые данные GEM9 с гравиметрическими измерениями. Использовались данные 1654 средних гравитационных аномалий на пятиградусных площадках, из них 1507 основывается на одноградусных аномалиях, в то время как остальные 147 были получены интерполяцией на пятиградусные площадки. При построении моделей GEM9 и GEM10, в отличие от более ранних моделей, определялись дополнительно три фундаментальных геодезических параметра — средний радиус Земли  $r_0$ , гравитационная константа  $fM$  и среднее ускорение силы тяжести на экваторе  $g_e$ .

Современные модели гравитационного поля развиты до более высоких порядков и степеней. Так, например, доступная через Интернет модель (JGM3) имеет порядок и степень, равные 360 (<http://www.aiub.unibe.ch/download/BSWUSER50/GEN/JGM3>).

## 2.9. Представление потенциала Земли системой точечных масс

Другой способ представления потенциала Земли основан на использовании системы точечных масс. В этом случае потенциал  $U$  задается, как правило, формулой

$$U = U_0 + \sum U_n . \quad (2.30)$$



Здесь  $U_0$  — потенциал задачи двух неподвижных центров (см. гл. 5), а  $U_n$  представляет собой потенциал точечной массы  $m_n$ :

$$U_n = \frac{fm_n}{\Delta_n},$$

где  $\Delta_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2}$  — расстояние до точечной массы с координатами  $x_n, y_n, z_n$ .

Некоторые способы оптимального выбора параметров системы точечных масс можно найти в учебном пособии (Холшевников и др., 2005).

### 3. КЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

#### 3.1. Уравнения движения в прямоугольных координатах

Будем представлять движение искусственного спутника Земли как движение материальной частицы бесконечно малой массы в поле тяготения центрального тела массой  $M$  под действием сил, определенных потенциальной функцией  $U$ , и совокупности сил  $\mathbf{P}$ , не имеющих потенциала. Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в инерциальной прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом  $M$ , можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (3.2)$$

где

$$U = -\frac{\mu}{r} - R.$$

Причем первое слагаемое в  $U$  — потенциал, обусловленный притяжением сферической Земли, рассматриваемой как материальная точка, а второе слагаемое представляет собой потенциал возмущающих сил;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  — вектор положения спутника;  $t$  — физическое время;  $r$  — модуль вектора положения;  $\mu = k^2 M$ ,  $k^2$  — универсальная гравитационная постоянная;  $U = U(t, \mathbf{x})$ ,  $\partial/\partial \mathbf{x}$  — градиент.

В качестве возмущающей силы, имеющей потенциал в задачах динамики ИСЗ, рассматривается, как правило, влияние несферической составляющей гравитационного поля Земли (см. гл. 2). Все же остальные силы, включая влияние Луны и Солнца, положение которых задается либо таблично, либо в виде рядов, полученных вне задачи о движении ИСЗ, относятся к силам, не имеющим потенциала.

При введении в уравнения (3.1) силы, обусловленной влиянием несферичности Земли, следует помнить, что уравнения движения записаны в инерциальной системе координат, а потенциал гравитационного поля Земли отнесен к вращающейся системе координат, жестко связанной с Землей. Преобразования, связывающие эти системы координат, описаны в гл. 1.

#### 3.2. Уравнения движения в оскулирующих кеплеровых элементах

Применение метода вариации произвольных постоянных к уравнениям (3.1) позволяет записать уравнения движения ИСЗ в оскулирующих элементах. Такие уравнения используются при построении как численных, так и аналитических алгоритмов прогнозирования движения.

При численном прогнозировании использование уравнений в оскулирующих элементах обладает тем преимуществом, что невозмущенная часть этих уравнений интегрируется без методических ошибок любым численным

методом. Кроме того, скорость изменения функции правых частей этих уравнений существенно меньше, чем при использовании прямоугольных координат.

Решение уравнений (3.1) в случае невозмущенного движения имеет вид (Дубошин, 1968):

$$\begin{aligned} x_1 = r\alpha, \quad \dot{x}_1 &= \sqrt{\frac{fm_0}{p}} [\alpha e \sin \upsilon + p\alpha' r^{-1}], \\ x_2 = r\beta, \quad \dot{x}_2 &= \sqrt{\frac{fm_0}{p}} [\beta e \sin \upsilon + p\beta' r^{-1}], \\ x_3 = r\gamma, \quad \dot{x}_3 &= \sqrt{\frac{fm_0}{p}} [\gamma e \sin \upsilon + p\gamma' r^{-1}], \\ r &= \frac{p}{1 + e \cos \upsilon}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{du}, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, \quad \beta' = \frac{d\beta}{du}, \\ \gamma &= \sin u \sin i, \quad \gamma' = \frac{d\gamma}{du}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Величины  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$  — традиционно используемые элементы кеплеровой орбиты: долгота восходящего узла, наклонение орбиты к основной координатной плоскости, долгота перицентра от узла, параметр орбиты, ее эксцентриситет и момент прохождения через перицентр. Параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  представляют собой направляющие косинусы орбитальной системы координат относительно инерциальной системы, используемой в уравнениях (3.1).

Аргумент широты  $u$  определяется формулой

$$u = \upsilon + \omega,$$

истинная аномалия  $\upsilon$  связана с независимой переменной соотношением

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{fm_0}} \int_0^{\upsilon} \frac{d\phi}{(1 + e \cos \phi)^2}. \quad (3.5)$$

Элементы кеплеровой орбиты являются в формулах (3.3), (3.5) постоянными и полностью определены начальными условиями системы уравнений (3.1).

Применение к уравнениям возмущенного движения (3.1) метода вариации произвольных постоянных в предположении, что решение уравнений (3.1) сохраняет форму (3.3), но величины  $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$  являются функциями времени, позволяет получить уравнения движения в оскулирующих элементах  $\Omega(t), i(t), \omega(t), p(t), e(t), \tau(t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p} \sin u \operatorname{cosec} i W, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p} \cos u W, \\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} S + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{r}{p}\right) T - \frac{r}{p} \sin u \operatorname{ctg} i W, \\
\frac{dp}{dt} &= 2rT, \\
\frac{de}{dt} &= \sin v S + \left[ \cos v + (\cos v + e) \frac{r}{p} \right] T, \\
\frac{d\tau}{dt} &= \frac{p^{3/2}}{eK} \left[ (eN \sin v - \cos v) S + \frac{p}{r} NT \right] \frac{r^2}{p^2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь  $S, T, W$  — компоненты возмущающего ускорения в орбитальной системе координат. Компонента  $S$  направлена вдоль вектора положения спутника  $\mathbf{x}$ ,  $T$  — по направлению, перпендикулярному  $\mathbf{x}$ , которое лежит в плоскости, проходящей через  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$ , и составляет с направлением движения угол, меньший  $90^\circ$ ;  $W$  — по нормали к плоскости  $\mathbf{x}$ ,  $\dot{\mathbf{x}}$ . Связь между  $S, T, W$  и возмущающими ускорениями системы (3.1)

$$\begin{aligned}
F_{x_1} &= \frac{dR}{dx_1} + P_1, \\
F_{x_2} &= \frac{dR}{dx_2} + P_2, \\
F_{x_3} &= \frac{dR}{dx_3} + P_3
\end{aligned} \tag{3.7}$$

задается формулами

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{fm_0}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Величины  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  вычисляются по формулам (2.11), величины  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  — по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\alpha'' &= \sin \Omega \sin i, \\
\beta'' &= -\cos \Omega \sin i, \\
\gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}$$

В уравнениях (3.6) величина  $N$  определяется формулой

$$N = \frac{2p^2}{r^2} \int_0^v \frac{\cos \varphi d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)},$$

а связь между истинной аномалией  $\upsilon$  и независимой переменной  $t$  осуществляется с помощью соотношения (3.5).

Уравнения (3.6) носят название уравнений Ньютона–Эйлера. Начальные условия системы (3.6)  $\Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0$  определяются из начальных условий системы (3.1) по формулам невозмущенного движения.

В качестве независимой переменной в уравнениях (3.6) можно использовать не только физическое время  $t$ , но и угловые переменные, связанные с орбитальным движением — истинную аномалию  $\nu$  (Таратынова, 1957), аргумент широты (Охоцимский, Энеев, Таратынова, 1957) и др.

Наличие эксцентриситета в знаменателе ряда членов в уравнениях (3.6) может приводить к потере точности при исследовании почти круговых спутниковых орбит. В этом случае удобна, например, система уравнений, приведенная в (Бордовицына и др., 1991):

$$\begin{aligned} \frac{dp}{du} &= 2r^3\tilde{T}, \\ \frac{dg}{du} &= r^2 \left[ -\tilde{S} \cos u + \tilde{T} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} (\tilde{T}g - \tilde{W}h \operatorname{ctg} i \sin u) \right], \\ \frac{dh}{du} &= r^2 \left[ \tilde{S} \sin u + \tilde{T} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} (\tilde{T}h + \tilde{W}h \operatorname{ctg} i \sin u) \right], \\ \frac{di}{du} &= \frac{r^3}{p} \tilde{W} \cos u, \\ \frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3}{p} \tilde{W} \frac{\sin u}{\sin i}, \\ \frac{dt}{du} &= \frac{r^2}{\sqrt{fm_0 p}} \tilde{\Theta}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где в качестве независимой переменной выбран аргумент широты, а элементы  $g$  и  $h$  имеют вид

$$g = e \sin \omega; \quad h = e \cos \omega.$$

Компоненты возмущающего ускорения  $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{W}$  определяются формулами

$$\tilde{S} = \frac{S}{\Theta}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{\Theta}, \quad \tilde{\Theta} = \frac{\sqrt{fm_0 p}}{\Theta}, \tag{3.10}$$

где

$$\Theta = \sqrt{fm_0 p} - \frac{r^3}{p} W \operatorname{ctg} i \sin u. \tag{3.11}$$

Последнее уравнение в (3.9) дает связь оскулирующего и драконического периодов обращения спутника.

При построении аналитических и численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ используются также уравнения Лагранжа для оскулирующих кеплеровых элементов, которые связывают изменения элемен-

тов с частными производными от возмущающей функции по элементам. Например, для системы элементов  $\Omega, i, \pi, a, e, \varepsilon$ , где  $\pi = \Omega + \omega$  — долгота перицентра;  $a$  — большая полуось орбиты спутника;  $\varepsilon = \pi + M_0$  — средняя долгота в эпоху  $t_0$ ;  $M_0$  — средняя аномалия в эпоху, имеем следующую систему уравнений Лагранжа (Дубошин, 1968):

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial \pi} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\
 \frac{di}{dt} &= -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial \Omega} - \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \pi} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \cdot \frac{\partial R}{\partial i}, \\
 \frac{d\pi}{dt} &= \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \\
 \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg} \frac{i}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{1}{na^2} \cdot \frac{\partial R}{\partial e},
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

причем  $n = Ka^{-3/2}$  — среднее движение спутника.

Связь между частными производными от возмущающей функции  $R$  и возмущающими ускорениями задается формулами

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R}{\partial \Omega} &= -\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \sin^2 \frac{1}{2} T + \sin l \cos u W \right\}, \\
 \frac{\partial R}{\partial i} &= \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin u W, \\
 \frac{\partial R}{\partial a} &= \frac{nr}{\sqrt{1-e^2}} S, \\
 \frac{\partial R}{\partial e} &= \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[ -\cos \upsilon S + \sin \upsilon \left( 1 + \frac{r}{p} \right) T \right], \\
 \frac{\partial R}{\partial \pi} &= -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \upsilon S - \frac{na^3}{r} T + \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} T, \\
 \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= \frac{na^2 e \sin \upsilon}{\sqrt{1-e^2}} S + \frac{na^3}{r} T.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения Ньютона–Эйлера используются, как правило, в задачах численного прогнозирования движения ИСЗ, а также при построении аналитических и полuanалитических теорий движения для учета возмущений от сил, не имеющих

потенциала. Для учета возмущений от потенциальных сил в аналитических методах используются уравнения Лагранжа.

При построении аналитических и численно-аналитических теорий с учетом всех видов возмущений могут использоваться канонические переменные.

### 3.3. Вывод уравнений в возмущениях канонических переменных методом Гамильтона–Якоби

Запишем уравнения (3.1) в канонической форме, полагая  $x_i = q_i$ ,  $\dot{x}_i = p_i$ ,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.14)$$

При этом гамильтониан  $H$  будет определяться формулой

$$H = H(p_i, q_i, t) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} p_i^2 + U.$$

Перейдем от переменных  $q$  и  $p$  к  $Q(q, p, t)$ ,  $P(q, p, t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= f(P, Q, t), \\ \dot{P}_i &= g(P, Q, t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если существует функция  $K(P, Q, t)$  такая, что

$$f_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad g_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \text{ и } \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad (3.16)$$

то преобразования  $q, p \rightarrow Q, P$  называются каноническими.

Производящей функцией  $S(P, q, t)$  преобразования называется такая функция, что

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = -\frac{\partial S}{\partial P_i}. \quad (3.17)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно  $q_i, p_i$ :

$$q_i = q(P, Q, t), \quad p_i = p(P, Q, t). \quad (3.18)$$

Функция  $K$  связана с  $H$  следующим образом:

$$K(P, Q, t) = H[p(P, Q, t), q(P, Q, t), t] + \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (3.19)$$

Если удастся найти такое  $K \equiv 0$ , то векторы  $P$  и  $Q$  становятся постоянными, и мы получаем для определенной функции  $S$  уравнение Гамильтона–Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, q_1, q_2, \dots, q_N, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (3.20)$$

Если далее удастся найти полное решение уравнения (3.20), то решением системы (3.14) являются соотношения (3.18). Как правило, в общем виде это сделать не удастся. Однако если  $H = H_0 + \tilde{H}$  ( $\tilde{H} = \tilde{H}(\varepsilon)$  — мало по сравнению с  $H_0$ ) и существует полный интеграл  $S_0$  для уравнения

$$H_0\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \frac{\partial S_0}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_N}, q_1, q_2, \dots, q_N, t\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad (3.21)$$

тогда с помощью метода вариации произвольных постоянных можно получить уравнения в возмущениях канонических переменных

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_i}. \quad (3.22)$$

О методах решения уравнений типа (3.22) речь пойдет в гл. 6.



## 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ИСЗ

### 4.1. Возмущения от несферичности геопотенциала

Из всего сказанного в гл. 2 с очевидностью следует, что проекции силы, создаваемой несферичностью земного потенциала на оси прямоугольной, жестко связанной с Землей системы координат, задаются формулами

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

где

$$U = \frac{fM}{r_0} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\}.$$

Однако способ представления этих производных в правых частях уравнений движения будет зависеть от метода интегрирования уравнений. При применении аналитических методов производные от потенциала Земли должны быть представлены в виде явных функций от элементов орбиты спутника и времени, а при применении численных методов удобно использовать прямоугольные координаты. Последнее замечание в равной степени относится и к представлению в уравнениях движения других сил, действующих на ИСЗ. В дальнейшем каждый из этих подходов рассмотрим отдельно.

### 4.2. Возмущения от приливных деформаций центрального тела

Заметный вклад в возмущения искусственных спутников Земли вносит влияние приливных деформаций, возникающих в теле планеты под действием притяжения внешнего тела. В результате притяжения внешнего тела на каждый элемент массы Земли действует сила, потенциал которой на поверхности Земли определяется формулой

$$\hat{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r_l} \right)^n P_n(\cos \psi), \quad (4.1)$$

где  $m_l, r_l$  — масса и геоцентрический радиус-вектор внешнего тела;  $r_0$  — средний радиус Земли;  $\psi$  — угол между направлением на внешнее тело и рассматриваемый элемент массы Земли. Эта сила вызывает приливную деформацию в теле Земли, в результате чего притяжение Земли изменяется и возникают дополнительные силы, характеризующиеся потенциалом  $\tilde{R}$ . С помощью модели Лява этот потенциал на поверхности Земли представляется формулой

$$\tilde{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left( \frac{r_0}{r_l} \right)^n P_n(\cos \psi),$$

где  $k_n$  — постоянные, называемые числами Лява и характеризующие упругие свойства Земли. Во внешнем пространстве  $\tilde{R}$  определяется формулой

$$\tilde{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left( \frac{r_0}{r_l} \right)^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (4.2)$$

где  $r$  — радиус-вектор внешней точки.

Модель Лява является основной моделью представления потенциала действующих на ИСЗ сил, обусловленных приливными деформациями в теле Земли. В настоящее время разработаны более полные приливные модели, точнее учитывающие упругие свойства Земли, например, модель Вара. Кроме того, современные модели учитывают влияние приливных деформаций, возникающих в океане и атмосфере Земли. Более подробно рассмотрим эти вопросы в гл. 8, когда будем говорить об алгоритмах вычисления этих возмущений при численном моделировании движения.

### 4.3. Лунно-солнечные возмущения

При наличии в движении ИСЗ возмущений от третьего тела в уравнениях движения появляется сила, определяемая формулой

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} = \mu' \left( \frac{\tilde{x}_i - x_i}{\Delta^3} - \frac{\tilde{x}_i}{r'^3} \right), \quad (4.3)$$

где  $\Delta = \sqrt{(\tilde{x}_1 - x_1)^2 + (\tilde{x}_2 - x_2)^2 + (\tilde{x}_3 - x_3)^2}$  — расстояние от спутника до возмущающего тела;  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$  — вектор положения возмущающего тела;  $r' = |\tilde{\mathbf{x}}|$ , а  $\mu'$  — произведение постоянной тяготения на массу возмущающего тела.

Возмущающее влияние Луны и Солнца на движение ИСЗ принято считать независимыми друг от друга, поэтому формулой (4.3) можно пользоваться и в том и в другом случае. При одновременном учете возмущений от Луны и Солнца в правой части уравнений (3.1) будут два слагаемых типа (4.3).

Главная трудность при учете лунно-солнечного влияния будет состоять в представлении координат возмущающего тела в требуемой форме.

### 4.4. Возмущения от светового давления

Перейдем к рассмотрению негравитационных возмущений, действующих на небесные тела. Одним из таких возмущений является световое давление. Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, сила светового давления всегда направлена по линии Земля–Солнце, орбита Земли круговая, спутник имеет сферическую форму. При этих предположениях сила прямого светового давления Солнца на спутник может быть задана формулой

$$\mathbf{P} = kqs' \left( \frac{a_s}{\Delta_s} \right)^2 \frac{\mathbf{x}_s - \mathbf{x}}{\Delta_s}, \quad (4.4)$$

где  $\mathbf{x}$  — геоцентрический вектор положения спутника;  $\mathbf{x}_s$  — геоцентрический вектор положения Солнца;  $\Delta_s$  — взаимное расстояние между спутником и Солнцем;  $a_s$  — большая полуось орбиты Земли;  $k$  — параметр, характеризующий отражательные свойства поверхности спутника (при  $k=1$  — отражение зеркальное, при  $k=1.44$  — диффузное),  $q = 4.65 \cdot 10^5$  дин/см<sup>2</sup> — солнечная

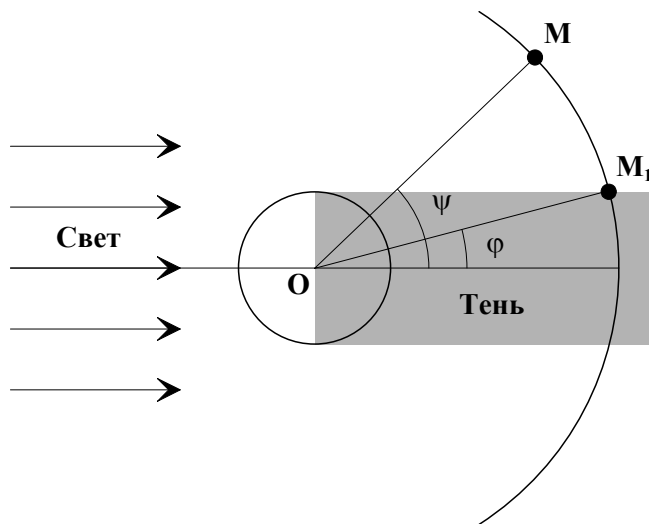


Рис. 4.1. Условие пребывания спутника в тени Земли

ническую форму, но в тех случаях, когда высокая точность не требуется, можно считать, что ввиду удаленности источника тень имеет цилиндрическую форму.

#### 4.5. Возмущения от сопротивления атмосферы

На ИСЗ, движущиеся на высоте 150–1500 км, заметное влияние оказывает сопротивление атмосферы. Сила сопротивления воздуха, действующая на поступательное движение спутника, направлена противоположно скорости объекта относительно воздуха, а ее абсолютная величина определена формулой

$$P = \frac{1}{2} S c_d \rho v_{\text{отн}}^2, \quad (4.5)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения спутника;  $c_d$  — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;  $\rho$  — плотность воздуха;  $v_{\text{отн}}$  — скорость спутника относительно атмосферы.

Наибольшая сложность при определении возмущений от сопротивления атмосферы заключается в вычислении плотности атмосферы  $\rho$ . Величина плотности атмосферы является функцией молекулярного веса воздуха  $M$  и его абсолютной кинетической температуры  $T$ :

$$\rho = \rho_1 \frac{MT}{M_1 T_1} e^{\int_{h_1}^h \frac{gM}{R_0 T} dh}, \quad (4.6)$$

где  $h$  — высота над поверхностью Земли;  $\rho_1, M_1, T_1$  — значения соответствующих величин на высоте  $h = h_1$ .

Изменение параметров  $M$  и  $T$  — это функции времени и геофизических факторов изменения состояния атмосферы, зависящих от активности Солнца. Именно поэтому в изменении параметров атмосферы наблюдается периодичность, связанная с обращением Земли вокруг Солнца, с обращением Солнца вокруг своей оси, с изменением солнечной активности в течение одиннадцатилетнего цикла и т.п.

постоянная;  $s'$  — площадь эффективного поперечного сечения спутника, представляющая собой отношение площади поперечного сечения спутника к его массе.

Основную трудность при вычислении возмущений, вызванных световым давлением, представляет учет эффекта вхождения спутника в тень Земли. С. Ферраз–Мелло предложил устранить эту трудность введением в возмущающее ускорение так называемой функции тени  $\delta$ . Причем  $\delta = 1$ , если спутник освещен Солнцем,  $\delta = 0$  — в противном случае. В общем случае тень имеет ко-

Модели атмосферы, учитывающие зависимость ее параметров не только от высоты, но и от перечисленных выше факторов, принято называть динамическими. Поскольку построение этих моделей — процесс трудоемкий, на практике пользуются различными упрощенными моделями. Например, статической моделью атмосферы, которая дает возможность определять плотность как функцию высоты и не учитывает зависимость плотности от времени. Большое распространение в практике имеют также локальные модели атмосферы, пригодные лишь для заданного диапазона высот и в течение определенного интервала времени. Простейшим примером локальной модели может служить так называемая изотермическая модель

$$\rho = \rho_1 e^{-\frac{h-h_1}{H}}, \quad (4.7)$$

полученная в предположении, что величины  $M$  и  $T$  постоянны. Здесь

$$H = \frac{R_0 T}{qM} \quad (4.8)$$

есть высота однородной атмосферы или шкала высот, являющаяся, в свою очередь, функцией высоты  $h$ ;  $R_0$  — универсальная газовая постоянная;  $q$  — ускорение силы тяжести, в приведенной выше формуле эта величина считается постоянной.

В последние несколько десятилетий разработан целый ряд так называемых квазидинамических моделей атмосферы. Первыми наиболее значимыми моделями такого рода были модель ГОСТ - 22721-77, модель Яккиа (Jacchia, 1977), модель, разработанная Ф. Барлье и др. (Barlier et al., 1978), а также модель Харриса–Прейстера (Harris, Priestner, 1962).

Все указанные модели вместе с изменением атмосферной плотности с высотой учитывают основные вариации этой плотности во времени. В частности, учитываются суточные вариации плотности, вариации, связанные с одиннадцатилетним и двадцатисемидневным циклами солнечной активности, полугодовые вариации и вариации, обусловленные геомагнитной активностью. Модели Яккиа–Робертса и Барлье учитывают также сезонно-высотные вариации концентрации гелия в атмосфере, причем модель Барлье дает несколько заниженное по сравнению с измеренными значение амплитуды зимних колебаний концентрации гелия.

Модель ГОСТ 22721-77 была разработана в ИКИ АН СССР и представляет собой совокупность формул для определения плотности воздуха. Характеристики модели получены по наблюдениям спутников серии «Космос», выполненным в 1964–1970 гг. Модель предназначена для вычисления значений плотности верхней атмосферы на высотах 140–500 км в годы низкой и умеренной солнечной активности. Эта модель является наиболее эффективной по быстродействию при ее реализации на ЭВМ. К слабым сторонам модели следует отнести ограниченный диапазон высот, а также недостаточно точную аппроксимацию вариаций плотности атмосферы, связанную с индексом  $F_{10.7}$  — интенсивностью потока радиоизлучения на волне 10.7 см. Последний недостаток частично ликвидирован авторами в уточненной модели.

Модифицированная модель Яккиа представляет собой дальнейшее развитие модели CIRA 1972. Она состоит из обширных таблиц, содержащих данные о концентрации основных составляющих верхней атмосферы: атмосферного кислорода, молекулярного кислорода, молекулярного азота, аргона, гелия и водорода, а также о среднем молекулярном весе и других физических характеристиках атмосферы для различных высот и различных температур. Модель пригодна для вычисления плотности воздуха в интервале высот от 90 до 2500 км над поверхностью Земли. Существует также аналитическая аппроксимация модели Яккиа.

Модель Барлье представляет собой совокупность формул для вычисления значений плотности воздуха на высотах 120–1200 км над поверхностью Земли.

Модель Хариса–Прейстера, которая была создана в центре космических полетов NASA, предназначена для диапазона высот 120–800 км. Она представляет собой обширные таблицы значений плотности воздуха для различных высот над поверхностью Земли, уровней солнечной активности и различных значений солнечного местного времени.

Современным продолжением моделей ГОСТ... является отечественная модель ГОСТ Р 25645.166-2004 (ГОСТ Р.2004), а продолжение моделей CIRA... — модель NASA NRLMSISE-00 (<http://modelweb.gsfc.nasa.gov/atmos/nrlmsise00.html>). Обе модели получены по обширному наблюдательному материалу и рассчитаны на диапазон высот от 120 до 1500 км над поверхностью Земли. Сравнительная характеристика этих моделей (Васильева, 2006) показала, что по своим возможностям эти модели очень близки. На рис. 4.2 показана широтно-сезонная зависимость плотности атмосферы по двум моделям при фиксированных параметрах:  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\lambda = 0^\circ$ ,  $F_{10.7} = 150$ ,  $F_{81} = 150$ ,  $t_s = 14^h$ ,  $h = 350$  км.

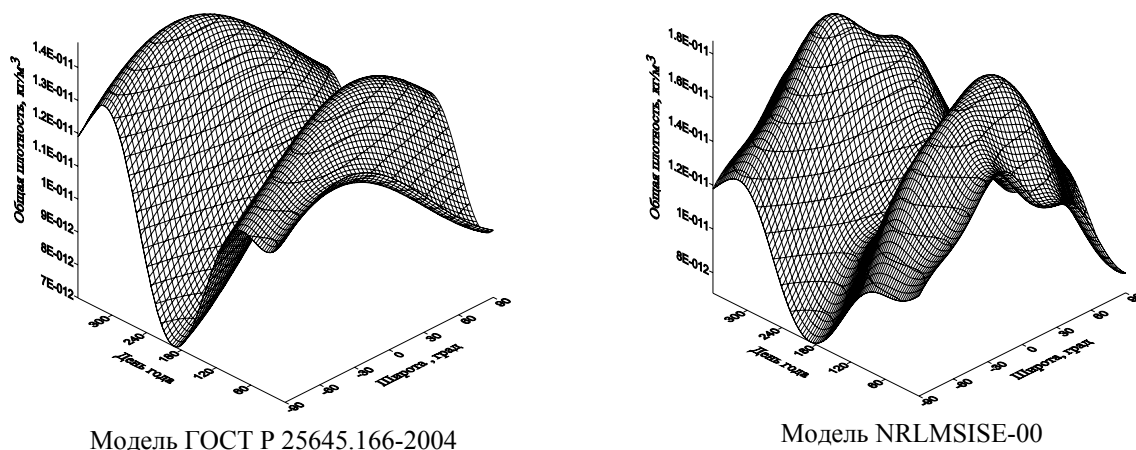


Рис. 4.2. Сопоставление моделей

Причем  $\varphi$ ,  $\lambda$  — географические широта и долгота;  $F_{10.7}$  — поток радиоизлучения Солнца на волне 10.7 см в единицах  $10^{-22}$  Вт/(м<sup>2</sup>Гц);  $F_{81}$  — поток  $F_{10.7}$ , осредненный за три оборота Солнца вокруг своей оси;  $t_s$  — местное солнечное время;  $h$  — высота над поверхностью Земли.

При построении аналитических и численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ применяются, как правило, упрощенные модели атмосферы. С численными же методами в зависимости от условий задачи могут использоваться модели всех упомянутых выше типов: динамические, статистические, локальные, и более того, применение в практике прогнозирования движения ИСЗ достаточно полных моделей атмосферы возможно пока только в сочетании с численными методами вследствие сложной структуры этих моделей.

#### 4.6. Классификация орбит ИСЗ

Орбиты запускаемых ИСЗ очень разнообразны. Они определяются начальными условиями, задаваемыми при выводе спутника на орбиту, и действием естественных сил на пассивном участке полета. По геометрическому характеру движения различают следующие основные классы орбит:

1. *Круговые и близкие к круговым.* Эти орбиты имеют эксцентриситеты 0–0.03. Высота над поверхностью Земли для таких спутников мало меняется в процессе полета. Состояние движения спутников на разных высотах определяется различными возмущающими силами. В зависимости от высоты полета спутники этого класса орбит подразделяют на низколетящие, средневысокие и высоколетящие.

*Низколетящие* ИСЗ движутся на высотах  $H = 200–1500$  км. Основными источниками возмущений на таких расстояниях от Земли являются несферичность Земли и сопротивление атмосферы. Превалирующим является сжатие Земли. Сопротивление атмосферы играет существенную роль до высоты 500–600 км и заметно влияет на движение для высот до 1500 км. Хотя возмущения, обусловленные сжатием Земли, значительно больше возмущений из-за сопротивления атмосферы, они не меняют существенно орбиту спутника, а только поворачивают ее в пространстве. Торможение же в атмосфере даже на больших высотах (1000–15000 км) изменяет орбиту спутника и, по сути дела, определяет продолжительность его существования.

*Средневысокие* — это внеатмосферные ИСЗ, движущиеся на высотах до 30–35 тыс. км. Основными возмущающими факторами являются несферичность Земли и гравитационное влияние Луны и Солнца. Превалирующим по-прежнему остается сжатие Земли. Начиная с высот около 20000 км, возмущения от притяжения Луны и Солнца становятся сравнимыми с влиянием аномалий силы тяжести Земли.

*Высоколетящие* ИСЗ движутся на высотах  $H > 30$  тыс. км. Для таких спутников возмущающее влияние Луны и Солнца становится равным или превышает возмущение от сжатия Земли. Начиная с высот 50000 км,

действие притяжения Луны и Солнца превосходит все остальные гравитационные возмущения.

2. *Слабо эллиптические* орбиты характеризуются умеренным эксцентриситетом,  $0.03 < e < 0.2$ . Для них разность высот в апогее и перигее составляет от нескольких сотен до нескольких тысяч километров. По влиянию возмущающих сил спутники этого класса орбит поддаются приведенной выше классификации в зависимости от высоты  $H$ .

3. *Высокоэллиптические* орбиты характеризуются большими значениями эксцентриситетов,  $e > 0.2$ . При этом высота спутников в апогее может превышать высоту спутников в перигее в десятки и сотни раз. Спутники с такими орбитами называются высокоапогейными. Они не поддаются удобной классификации, приведенной нами для орбит класса 1, так как существенными для них могут быть все основные виды возмущений: от несферичности Земли, сопротивления атмосферы, притяжения Луны и Солнца.

Из числа приведенных видов спутников интересно выделить те, которые имеют периоды обращения, соизмеримые с периодом вращения Земли. Эти спутники могут иметь орбиты, относящиеся к любому из рассматриваемых классов, и движение их будет характеризоваться соответствующими возмущающими силами. Однако явление резонанса, возникающее вследствие соизмеримости среднего движения спутника с частотой вращения Земли, порождает дополнительные возмущающие силы, которые также могут оказывать значительное влияние на их орбиты.

Помимо приведенных классификаций, можно ввести еще классификацию спутников по расположению орбит в пространстве:

- 1) *экваториальные* спутники и близкие к ним; их орбиты характеризуются небольшим наклоном к экватору, до  $i = 20^\circ$ ;
- 2) спутники *со средним наклоном*,  $i = 40 - 70^\circ$ ;
- 3) *полярные* спутники и близкие к ним,  $i = 80 - 100^\circ$ .

Спутники с наклоном  $i > 90^\circ$  движутся по орбитам в обратном направлении, пересекая плоскость экватора с севера на юг. Такие спутники называются спутниками *с обратным движением*.

## 5. ГЛАВНАЯ ПРОБЛЕМА В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

### 5.1. Вводные замечания

Поскольку влияние возмущений от второй зональной гармоники геопотенциала в движении ИСЗ существенно больше влияния всех остальных возмущений, проблема учета влияния второй зональной гармоники была сформулирована как главная проблема в теории движения ИСЗ. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ, содержащие возмущения от  $J_2$ , не интегрируются в квадратурах. Высокоточный учет влияния этой гармоники геопотенциала в аналитической теории движения ИСЗ предполагает построение достаточно длинных рядов по степеням малого параметра. Эта процедура является весьма трудоемкой. Многие авторы пытались найти приближенные задачи, незначительно отличающиеся от исходной по величине возмущений, но позволяющие находить более простые решения. Практическая их ценность состоит в том, что решения этих задач могут быть использованы как промежуточные при построении полных аналитических теорий движения ИСЗ. Таких задач было предложено весьма много, но мы остановимся только на тех из них, которые нашли свое применение в практике построения аналитических теорий движения ИСЗ. Полный обзор всех задач главной проблемы теории движения ИСЗ можно найти в «Справочном руководстве...» (1971) или в нашей электронной хрестоматии (<http://solar.tsu.ru>).

### 5.2. Возмущающая функция

Возмущающая функция, обусловленная второй зональной гармоникой потенциала притяжения Земли, дается формулой

$$R = -J_2 \frac{fmr_0^2}{r^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi' - \frac{1}{2} \right), \quad (5.1)$$

где  $J_2$  — коэффициент при второй зональной гармонике. Величина  $J_2 = 1082.628 \cdot 10^{-6}$ , в то время как величина остальных зональных коэффициентов  $J_n \ll 10^{-6}$  при  $n \geq 3$ . Следовательно, возмущения от сжатия примерно в 1000 раз больше возмущений от остальных зональных гармоник.

Разложение функции  $R$  по степеням эксцентриситета  $e$  с точностью до  $e^2$  включительно имеет следующий вид (Справочное руководство..., 1971):



$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{2} J_2 f m \frac{r_0^2}{a^3} \left( 1 - \frac{3}{2} s^2 \right) \left[ 1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4 + \frac{35}{16} e^6 + \right. \\
& + 3 \left( e + \frac{9}{8} e^3 + \frac{87}{64} e^5 \right) \cos M + \frac{9}{2} \left( e^2 + \frac{7}{9} e^4 + \frac{47}{48} e^6 \right) \cos 2M + \\
& + \frac{53}{8} \left( e^3 + \frac{393}{848} e^5 \right) \cos 3M + \frac{77}{8} \left( e^4 + \frac{129}{770} e^6 \right) \cos 4M + \\
& + \frac{1773}{128} e^5 \cos 5M + \frac{3167}{160} e^6 \cos 6M \left. \right] + \\
& + \frac{3}{4} J_2 f m \frac{r_0^2}{a^3} s^2 \left[ \frac{1}{48} \left( e^3 + \frac{11}{16} e^5 \right) \cos(M - 2\omega) + \right. \\
& + \frac{1}{24} \left( e^4 + \frac{7}{10} e^6 \right) \cos(2M - 2\omega) + \frac{81}{1280} e^5 \cos(3M - 2\omega) + \\
& + \frac{4}{45} e^6 \cos(4M - 2\omega) - \frac{1}{2} \left( e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 \right) \cos(M + 2\omega) + \\
& + \left( 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{13}{16} e^4 - \frac{35}{288} e^6 \right) \cos(2M + 2\omega) + \\
& + \frac{7}{2} \left( e - \frac{123}{56} e^3 + \frac{489}{448} e^5 \right) \cos(3M + 2\omega) + \\
& + \frac{17}{2} \left( e^2 - \frac{115}{51} e^4 + \frac{601}{408} e^6 \right) \cos(4M + 2\omega) + \\
& + \frac{845}{48} \left( e^3 - \frac{6505}{2704} e^5 \right) \cos(5M + 2\omega) + \\
& + \frac{533}{16} \left( e^4 - \frac{13827}{5330} e^6 \right) \cos(6M + 2\omega) + \\
& + \frac{228347}{3840} e^5 \cos(7M + 2\omega) + \frac{73369}{720} e^6 \cos(8M + 2\omega) \left. \right], \tag{5.2}
\end{aligned}$$

где через  $s$  обозначен синус угла наклона орбиты.

### 5.3. Вековые возмущения

Если осреднить возмущающую функцию  $R$  по средней аномалии  $M$  и подставить ее в уравнения Лагранжа (3.12), то обнаружим, что эти уравнения примут вид

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \cos i (1 - e^2)^{-2}, \tag{5.3}$$

$$\dot{\pi} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 2 \cos i - 1}{(1 - e^2)^2}, \tag{5.4}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{\left( 5 + 3\sqrt{1-e^2} \right) \cos^2 i - 2 \cos i - 1 - \sqrt{1-e^2}}{(1-e^2)^2}, \quad (5.5)$$

где  $n$  — среднее движение спутника. А учитывая, что  $\varepsilon = \pi + M_0$ ,  $\pi = \Omega + \omega$ , для элементов  $\omega$  и  $M_0$  будем иметь:

$$\dot{\omega} = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{5 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^2}, \quad (5.6)$$

$$\dot{M}_0 = \frac{3}{4} J_2 n \left( \frac{r_0}{a} \right)^2 \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1-e^2)^{3/2}}. \quad (5.7)$$

Соотношения (5.3)–(5.7) говорят о том, что вековые возмущения содержатся только в угловых элементах  $\omega$ ,  $M_0$  (или  $\varepsilon$ ) и долготе узла  $\Omega$ .

Формулы (5.3)–(5.7) справедливы при всех значениях наклона  $i$  и  $e < 1$ . Эти формулы показывают, что вековое движение узла достигает максимума при  $i = 0^\circ, 180^\circ$  (экваториальные орбиты) и обращается в нуль при  $i = 90^\circ$  (полярные орбиты), а вековое движение перицентра достигает максимума при  $i = 0^\circ, 180^\circ$  и обращается в нуль при  $i = 63^\circ 26'$ . Это значение наклона называется критическим.

#### 5.4. Короткопериодические возмущения

Короткопериодические возмущения содержатся во всех элементах. С точностью до членов первого порядка относительно  $J_2$  они приведены в «Справочном руководстве...» (1971). Их также можно найти по адресу <http://solar.tsu.ru>.

#### 5.5. Задача Акнеса

Поскольку здесь вводятся формулы, которые аппроксимируют только первые два члена потенциала притяжения Земли, то для силовой функции  $U$  можно принять следующее упрощенное выражение:

$$U = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - J_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right\}, \quad (5.8)$$

где  $f$  — постоянная притяжения;  $m$  и  $r_0$  — масса и средний экваториальный радиус Земли;  $J_2$  — безразмерная постоянная;  $r$  и  $\varphi$  — геоцентрический радиус-вектор и широта спутника. В формуле (5.8) отброшены члены, имеющие порядок  $J_2^2$  и выше.

К. Акнес построил свою промежуточную орбиту на основе промежуточного потенциала  $V$ , определяемого формулой

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 - J_2 \frac{r_0^2}{rp} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (5.9)$$

Формула для возмущающей функции  $R$  в этом случае имеет вид

$$R = fmJ_2 \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right). \quad (5.10)$$

Функция  $V$ , таким образом, мало отличается от  $U$ , если эксцентриситет орбиты спутника является малой величиной.

Общее решение уравнений промежуточного движения в этом случае также может быть найдено методом Гамильтона–Якоби. Приведем здесь первые интегралы задачи Акнеса. Они таковы:

$$\begin{aligned} \frac{fm}{L^2} + \dot{r}^2 - \frac{2fm}{r} + \frac{G^2}{r^2} &= 0, \\ G^4 - r^4 (\cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + \dot{\varphi}^2) G^2 - J_2 (fm)^2 r_0^2 (3 \sin^2 \varphi - 1) &= 0, \\ r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} &= H. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{fma}, \\ G &= \sqrt{fma(1-e^2)}, \\ H &= \sqrt{fma(1-e^2)} \cos i \end{aligned}$$

— канонические переменные Делоне.

На основе задачи Акнеса В.В. Нестеровым (1984) была построена аналитическая теория для обработки наблюдений, выполненных по проекту МЕРИТ. Недостаток промежуточного потенциала Акнеса заключается в следующем. Он зависит не только от характеристик гравитационного поля Земли, но и от элементов орбиты (большая полуось, эксцентриситет, наклон) спутника. Поэтому точность аппроксимации для разных орбит будет разной. Кроме того, возмущающая функция содержит короткопериодические члены первого порядка относительно  $J_2$ . Промежуточная орбита не учитывает этих возмущений, и их нужно определять методами теории возмущений.

### 5.6. Задачи Винти и Кислика

В этом параграфе будет рассмотрен другой тип аппроксимирующих выражений для потенциала притяжения Земли. Эти выражения были предложены Дж. Винти и М.Д. Кисликом (Справочное руководство..., 1971). Все они обладают двумя важнейшими свойствами. Во-первых, они отличаются от потенциала реальной Земли членами порядка выше первого относительно сжатия. Во-вторых, дифференциальные уравнения движения в гравитационном поле, определяемом аппроксимирующими потенциалами, строго интегрируются в квадратурах. В отличие от промежуточного потенциала Акнеса, они зависят только от постоянных гравитационного поля Земли и не зависят от элементов орбиты спутника. Возмущающая функция в этом случае не содержит второй зональной гармоники.

Дж. Винти и М.Д. Кислик независимо предложили аппроксимирующие выражения для потенциала притяжения Земли, которые в сущности совпадают друг с другом, и их можно представить следующей формулой:

$$V = \frac{fm}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_2^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \varphi) \right\}. \quad (5.12)$$

Если обозначить через  $R$  возмущающую функцию, то

$$R = \frac{fm}{r} \sum_{k=3}^{\infty} j_k \left( \frac{r_0}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi), \quad (5.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} j_{2n+1} &= -J_{2n+1}, \\ j_{2n} &= -[J_{2n} + (-1)^n J_2^n]. \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Поскольку коэффициенты  $J_k$  имеют второй порядок малости относительно  $J_2$ , то из формул (5.13) и (5.14) видно, что возмущающая функция содержит лишь члены второго порядка.

Дифференциальные уравнения задачи Винти и Кислика могут быть проинтегрированы в сфероидальных координатах  $\xi, \eta, \omega$ , связанных с  $x, y, z$  равенствами

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos \omega, \\ y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin \omega, \\ z &= \xi \eta. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Первые интегралы задачи записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\sqrt{\Phi(\xi)}}{J}, & \frac{d\eta}{dt} &= \frac{\sqrt{F(\eta)}}{J}, \\ (\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2) \frac{d\omega}{dt} &= \alpha_3, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

где

$$\begin{aligned} J &= \xi^2 + c^2 \eta^2, \\ \Phi(\xi) &= (\xi^2 + c^2)(2\alpha_1 \xi^2 + 2fm\xi - \alpha_2^2) + c^2 \alpha_3^2, \\ F(\eta) &= (1 - \eta^2)(2\alpha_1 c^2 \eta^2 + \alpha_2^2) - \alpha_3^2, \\ c &= r_0 \sqrt{J_2}, \end{aligned}$$

а  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  — канонические постоянные Якоби.

Таким образом, задача Винти и Кислика представляет собой интегрируемую динамическую проблему. Она нашла приложение в современной небесной механике, как в теории движения ИСЗ, так и в теории движения естественных спутников планет.

Промежуточная орбита, основанная на задаче Винти и Кислика, исследовалась не только ее авторами, но и многими другими специалистами по динамике ИСЗ. Рабочие формулы для вычисления промежуточной орбиты можно найти в работе М.Д. Кислика (1960).

### 5.7. Задача двух неподвижных центров

В 1961 г. Е.П. Аксенов, Е.А. Гребеников и В.Г. Демин предложили использовать в качестве промежуточного потенциал обобщенной задачи двух непод-

вижных центров с комплексными массами и расстояниями. Обоснование применения этой задачи для искусственных спутников Земли можно найти в их монографиях (Демин, 1968) и (Аксенов, 1977). Промежуточная орбита с потенциалом обобщенной задачи двух неподвижных центров учитывает полностью возмущения от второй, третьей и частично четвертой зональных гармоник земного потенциала. Интегралы задачи и формулы, описывающие промежуточное движение, даны в монографии Е.П. Аксенова (1977).

Потенциал обобщенной задачи двух неподвижных центров задается формулой (Аксенов, 1977)

$$W = \frac{fm}{2} \left[ \frac{1+j\sigma}{r_1} + \frac{1-i\sigma}{r_2} \right], \quad (5.17)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ;  $c$  и  $\sigma$  — некоторые вещественные постоянные,

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + j)]^2},$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - j)]^2}.$$

Если разложить потенциал (5.24) в ряд по полиномам Лежандра, то получим

$$W = \frac{fm}{k} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J'_n \left( \frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \right\},$$

где  $J'_n$  — некоторые вещественные коэффициенты, связанные с постоянными  $c$  и  $\sigma$  следующей формулой:

$$J'_n = -\frac{1}{2} \left( \frac{c}{r_0} \right)^n \left[ (1+j\sigma)(\sigma+j)^n + (1-j\sigma)(\sigma-j)^n \right].$$

Выбирая  $c$  и  $\sigma$  из условия, чтобы функция  $W$  была наиболее близкой к потенциалу притяжения Земли, а именно положив  $J'_2 = J_2$ ,  $J'_3 = J_3$ , получим

$$c = r_0 \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

$$\sigma = \frac{J_3}{2J_2} \left\{ J_2 - \left( \frac{J_3}{2J_2} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Подставляя теперь числовые значения  $r_0$ ,  $J_2$  и  $J_3$ , найдем  $c = 209.729$  км,  $\sigma = -0.035647$ .

Следовательно, при соответствующем выборе постоянных промежуточный потенциал отличается от потенциала земного тяготения коэффициентами при четвертой зональной гармонике земного потенциала, т.е. членами порядка квадрата сжатия.

Как известно, дифференциальные уравнения задачи двух неподвижных центров

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad (i=1,2,3) \quad (5.18)$$

интегрируются в квадратурах. Полные формулы, описывающие промежуточное движение, содержат в себе эллиптические интегралы и эллиптические функции, которые можно представить в виде рядов по степеням малых параметров  $c$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , где

$$\varepsilon = c/a(1-e^2), \quad (5.19)$$

причем  $\varepsilon^2 \cdot \sigma^2 = 10^{-3}$ .

Промежуточное движение, определяемое уравнениями (5.18), принято называть эйлеровым движением, а соответствующую этому движению орбиту эйлеровой. Элементы эйлеровой орбиты

$$\bar{a}, \bar{p}, \bar{s}, \Omega, \omega, M$$

аналогичны кеплеровым элементам и обращаются в них при  $\varepsilon = 0$ . С точностью до  $\varepsilon^2$  для позиционных переменных и  $\varepsilon^4$  для угловых переменных эта связь определяется формулами

$$\begin{aligned} \bar{a} &= a\{1 + \varepsilon^2(1-e^2)\alpha^2\}, \\ \bar{p} &= p\{1 + 2\varepsilon^2(1+e^2)\alpha^2\}, \quad p = a(1-e^2), \\ 1 - \bar{s}^2 &= \alpha^2\{1 - \varepsilon^2(1-e^2)(1-\alpha^2)\}, \\ \Omega &= \mu\psi + \Omega_0, \quad \omega = \nu\psi + \omega_0, \quad M = n_0(t-t_0) + M_0(1+\lambda), \end{aligned} \quad (5.20)$$

причем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\Psi}{2} &= \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \\ \bar{e} &= \bar{e}\{1 + \varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2)\}, \\ s &= \sin i, \quad \alpha = \cos i. \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda, \mu, \nu$  характеризуют вековые возмущения соответствующих угловых элементов орбиты от сжатия Земли и выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)^{3/2}(24-96s^2+75s^4), \\ \mu &= -\frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{8} \cdot (6-17s^2-24e^2s^2) \right], \\ \nu &= \frac{3}{4}\varepsilon^2(4-5s^2) + \frac{\varepsilon^4}{64} \times [288-1296s^2+1035s^4 - e^2(144+288s^2-510s^4)], \end{aligned} \quad (5.21)$$

а  $n_0$  определяется как

$$n_0 = \sqrt{\frac{fm}{a^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2\alpha^2(1-e^2) + \frac{3}{8}\varepsilon^4\alpha^2(1-e^2)(1+11s^2-e^2+5e^2s^2) \right\}. \quad (5.22)$$

Формулы (5.27) включают в себя возмущения от сжатия Земли первого и второго порядков относительно  $J_2$ .

Промежуточная орбита задачи двух неподвижных центров может описываться также каноническими элементами  $\widehat{L}, \widehat{G}, \widehat{H}$  и  $\widehat{l}, \widehat{g}, \widehat{h}$ , аналогичными элементам Делоне

$$L = \sqrt{fma}, \quad G = \sqrt{fma} \sqrt{1-e^2}, \quad H = \sqrt{fma} \sqrt{1-e^2} \cos i,$$

$$l = M = M_0 + n(t-t_0), \quad g = \omega_0, \quad h = \Omega_0$$

и обращающимися в них при  $\varepsilon = 0$ . Эти элементы связаны с эйлеровыми элементами орбиты следующими формулами:

$$\widehat{L} = \sqrt{fma} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (1-e^2) \alpha^2 + \frac{\varepsilon^4}{4} \sqrt{(1-e^2)} (2-3s^2) \right],$$

$$\widehat{G} = \sqrt{fma} \sqrt{1-e^2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right] [4-5s^2 + e^2(4-3s^2)], \quad (5.23)$$

$$\widehat{H} = \sqrt{fma} \sqrt{1-e^2} \cos i \left[ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} [2-3s^2 + e^2(2-s^2)] \right].$$

Угловые элементы являются линейными функциями времени и аналогичны средней аномалии, долготе восходящего узла и долготе перигея:

$$\widehat{l} = M_0 (1 + \lambda) + n(t-t_0),$$

$$\widehat{g} = \omega_0 + \nu \cdot n_0 (t-t_0), \quad (5.24)$$

$$\widehat{h} = \Omega_0 + \mu \cdot n_0 (t-t_0).$$

В следующей главе мы рассмотрим уравнения в возмущениях эйлеровых элементов.

## 6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

### 6.1. Вывод уравнений в возмущениях промежуточного движения обобщенным методом Лагранжа

Запишем систему уравнений движения ИСЗ в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} - X' = 0, \quad \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} + \tilde{X} = 0, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} - Y' = 0, \quad \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} + \tilde{Y} = 0, \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

где  $x, x', y, y', \dots$  обозначают неизвестные функции, число которых  $2k$  может быть каким угодно;  $H$  — гамильтониан системы; величины  $X', \tilde{X}, Y', \tilde{Y}$  — функции времени и  $2k$  величин  $x, x', y, y', \dots$

Рассмотрим уравнения, получающиеся из (6.1) отбрасыванием всех величин  $X', Y', \tilde{X}, \tilde{Y}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial H}{\partial x'} = 0, \quad \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \frac{dy}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y'} = 0, \quad \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

и допустим, что эти уравнения могут быть полностью проинтегрированы. Общее решение этих уравнений будет иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x = \Phi(t, a, b, \dots, g), \quad x' = \Psi(t, a, b, \dots, g), \\ \dots \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

где  $a, b, \dots, g$  суть  $2k$  произвольных постоянных интегрирования.

Функции (6.3) удовлетворяют уравнениям (6.2), каковы бы ни были произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение первоначальных уравнений (6.1), сохраним те же аналитические выражения (6.3) для функций  $x, x', \dots$ , но будем рассматривать величины  $a, b, \dots, g$  уже не как постоянные, а как некоторые функции времени, подлежащие определению.

В этом предположении будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x}{\partial g} \frac{dg}{dt}, \\ \frac{dx'}{dt} &= \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial x'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x'}{\partial g} \frac{dg}{dt}, \dots \end{aligned}$$

Внесем эти выражения в уравнения (6.1) и потребуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись. При этом имеется в виду, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial x'} \equiv 0, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial x} \equiv 0.$$



Получим

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial y}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial y}{\partial g} \frac{dg}{dt} - Y' &= 0, \\
 \frac{\partial y'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial y'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial y'}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \tilde{Y} &= 0, \\
 &\dots \\
 \frac{\partial x}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x}{\partial g} \frac{dg}{dt} - X' &= 0, \\
 \frac{\partial x'}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial x'}{\partial b} \frac{db}{dt} + \dots + \frac{\partial x'}{\partial g} \frac{dg}{dt} + \tilde{X} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Полученные уравнения содержат  $2k$  неизвестных производных, относительно которых они линейны. Приведем эти уравнения к более простому виду.

Введем в рассмотрение величины, называемые скобками Лагранжа:

$$[a, b] = \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial X}{\partial b} \frac{\partial X'}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y'}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial b} \frac{\partial Y'}{\partial a}. \tag{6.5}$$

Очевидны соотношения

$$[b, a] = -[a, b], \quad [a, a] = 0.$$

Положим, кроме того,

$$\begin{aligned}
 R_a &= \tilde{X} \frac{\partial x}{\partial a} + \tilde{Y} \frac{\partial y}{\partial a} + \dots + X' \frac{\partial x}{\partial a} + Y' \frac{\partial y}{\partial a} + \dots \\
 R_b &= \tilde{X} \frac{\partial x}{\partial b} + \tilde{Y} \frac{\partial y}{\partial b} + \dots + X' \frac{\partial x}{\partial b} + Y' \frac{\partial y}{\partial b} + \dots
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Умножая уравнения (6.4) последовательно на все производные

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial a}, \dots, \frac{\partial x'}{\partial a}, \dots \\
 \frac{\partial x}{\partial b}, \dots, \frac{\partial x'}{\partial b}, \dots
 \end{aligned}$$

и складывая, получим

$$\begin{aligned}
 [a, a] \frac{da}{dt} + [a, b] \frac{db}{dt} + \dots + [a, g] \frac{dg}{dt} + R_a &= 0, \\
 [b, a] \frac{da}{dt} + [b, b] \frac{db}{dt} + \dots + [b, g] \frac{dg}{dt} + R_b &= 0, \\
 &\dots \\
 [g, a] \frac{da}{dt} + [g, b] \frac{db}{dt} + \dots + [g, g] \frac{dg}{dt} + R_g &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Эти уравнения нужно разрешить относительно производных

$$\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dg}{dt}.$$

Уравнения (6.7) обладают интересным свойством: коэффициенты этих уравнений не зависят от времени явно, что позволяет значительно упростить их вычисление. Покажем это.

Составим выражение для частной производной по времени  $t$  и убедимся, что она равна нулю:

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial a^2} t \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial^2 x'}{\partial b^2} t - \frac{\partial^2 x}{\partial b^2} t \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial^2 x'}{\partial a^2} t$$

или

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial b} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial b} \right) - \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x'}{\partial a} - \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial a} \right) + \dots$$

или учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x'}, \quad \frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial[a,b]}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial H}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial b} + \dots \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial H}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial a} + \dots \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что  $H$  зависит от  $a$  и  $b$  только через посредство  $x, x', \dots$ , выводим

$$\frac{\partial[a,b]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial H}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial H}{\partial a} = \frac{\partial^2 H}{\partial a^2} b - \frac{\partial^2 H}{\partial b^2} a = 0.$$

В каждом отдельном случае функция  $H$  имеет определенное значение,  $\Phi, \Psi, \dots$  в (6.3) предполагаются известными функциями времени и могут быть вычислены с помощью элементарных операций. Разрешая затем систему относительно  $da/dt, \dots, dg/dt$ , мы получим  $2k$  уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A(t, a, b, \dots, g), \\ \frac{db}{dt} &= B(t, a, b, \dots, g), \\ &\dots \\ \frac{dg}{dt} &= G(t, a, b, \dots, g), \end{aligned} \tag{6.8}$$

которые и нужно интегрировать. Найдя зависимость величин  $a, b, \dots, g$  от времени и  $2k$  произвольных постоянных, мы получим общее решение уравнений (6.1) по формулам (6.3).

## 6.2. Уравнения движения в эйлеровых элементах

Перейдем к описанию уравнений возмущенного движения спутника в эйлеровых элементах. Уравнение в прямоугольных координатах с промежуточным потенциалом  $\bar{W}$  запишутся в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (6.9)$$

где  $R$  — потенциальная функция тех возмущающих сил, которые не были приняты во внимание при построении промежуточной орбиты, через  $\mathbf{P}$  обозначены силы, не имеющие потенциала.

### Канонические уравнения

В качестве канонических переменных возьмем элементы типа Делоне (5.23)–(5.24), введенные в предыдущей главе, и для удобства введем для них следующие обозначения:

$$\begin{aligned} L_1 &= \hat{L}, \quad L_2 = \hat{G}, \quad L_3 = \hat{H}, \\ l_i &= n_i(t - t_0) + l_{i,0}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где величины  $n_i$  даются формулами

$$n_1 = \frac{n_0}{1 - \lambda}, \quad n_2 = \frac{\nu n_0}{1 - \lambda}, \quad n_3 = \frac{\mu n_0}{1 - \lambda},$$

а  $l_{i,0}$  определяется формулами

$$l_{1,0} = M_0(1 + \lambda), \quad l_{2,0} = \omega_0 + \nu M_0, \quad l_{3,0} = \Omega_0 + \mu M_0. \quad (6.11)$$

Канонические уравнения для системы элементов  $L_i, l_i$  запишутся в виде

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{\partial R'}{\partial l_i}, \quad \frac{dl_i}{dt} = -\frac{\partial R'}{\partial L_i}, \quad (6.12)$$

где  $R' = -\alpha_1 + R$ . При этом предполагается, что возмущающая функция  $R$  выражена через  $L_i, l_i$ , а невозмущенный гамильтониан  $\alpha_1$  определяется с точностью до второго порядка сжатия формулой

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\frac{(fm_0)^2}{2L_1^2} \left\{ 1 - \frac{c^2(1 + \sigma^2)(fm_0)^2}{2L_1L_2^3} \left( 1 - 3\frac{L_3^2}{L_2^2} \right) - \frac{3c^4(fm_0)^4}{32L_1L_2^7} \left[ 5 \left( 1 - 14\frac{L_3^2}{L_2^2} + 21\frac{L_3^4}{L_2^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\frac{L_2^2}{L_1^2} \left( 1 - 18\frac{L_3^2}{L_2^2} + 25\frac{L_3^4}{L_2^4} \right) - 2\frac{L_2}{L_1} \left( 1 - 6\frac{L_3^2}{L_2^2} + 9\frac{L_3^4}{L_2^4} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Уравнения при  $R = 0$  и  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  определяют промежуточное движение, в котором  $L_i$  являются постоянными, а  $l_i$  — линейными функциями времени.

**Уравнения типа Лагранжа**

Из канонических уравнений (6.12) могут быть выведены уравнения в оскулирующих эйлеровых элементах типа Лагранжа. Такие уравнения получены Е.И. Тимошковой (1971) относительно элементов  $\widehat{a}, \widehat{e}, \widehat{s}, l, g, h$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\widehat{a}}{dt} &= a_1 \frac{\partial R}{\partial l} + a_2 \frac{\partial R}{\partial g} + a_3 \frac{\partial R}{\partial h}, \\
 \frac{d\widehat{e}}{dt} &= e_1 \frac{\partial R}{\partial l} + e_2 \frac{\partial R}{\partial g} + e_3 \frac{\partial R}{\partial h}, \\
 \frac{d\widehat{s}}{dt} &= s_1 \frac{\partial R}{\partial l} + s_2 \frac{\partial R}{\partial g} + s_3 \frac{\partial R}{\partial h}, \\
 \frac{d\widehat{l}}{dt} &= n_1 - a_1 \frac{\partial R}{\partial a} - e_1 \frac{\partial R}{\partial e} - s_1 \frac{\partial R}{\partial s}, \\
 \frac{d\widehat{g}}{dt} &= n_2 - a_2 \frac{\partial R}{\partial a} - e_2 \frac{\partial R}{\partial e} - s_2 \frac{\partial R}{\partial s}, \\
 \frac{d\widehat{h}}{dt} &= n_3 - a_3 \frac{\partial R}{\partial a} - e_3 \frac{\partial R}{\partial e} - s_3 \frac{\partial R}{\partial s},
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

где с точностью до  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{2}{\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - \widehat{e}^2) \cos^2 i \right\}, \\
 a_2 &= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 12 - 15\widehat{s}^2 + 8\sqrt{1 - \widehat{e}^2} \cos^2 i \right\}, \\
 a_3 &= -\frac{\varepsilon^2 \cos^2 i}{\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 3 + 2\sqrt{1 - \widehat{e}^2} \right\}; \\
 e_1 &= \frac{1 - \widehat{e}^2}{\widehat{e}\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - \widehat{e}^2)(5 - 4\widehat{s}^2) \right\}, \\
 e_2 &= -\frac{\sqrt{1 - \widehat{e}^2}}{\widehat{e}\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ (12 - 5\widehat{s}^2)\sqrt{1 - \widehat{e}^2} - 22 + 23\widehat{s}^2 - \widehat{e}^2(18 - 17\widehat{s}^2) \right] \right\}, \\
 e_3 &= \frac{\varepsilon^2 \sqrt{1 - \widehat{e}^2} \cos i}{2e\sqrt{fm_0\widehat{a}^{-1}}} \left\{ 3 + 5\widehat{e}^2 - 3\sqrt{1 - \widehat{e}^2} \right\},
 \end{aligned}$$

$$s_1 = \frac{\varepsilon^2(1-\bar{e}^2)\bar{s}\cos^2 i}{2\sqrt{fm_0\bar{a}}},$$

$$s_2 = \frac{\cos^2 i}{\bar{s}\sqrt{fm_0\bar{a}}(1-\bar{e}^2)} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}(6-9\bar{s}^2+2\bar{e}^2+\bar{e}^2\bar{s}^2) \right\},$$

$$s_3 = -\frac{\cos i}{\bar{s}\sqrt{fm_0\bar{a}}(1-\bar{e}^2)} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}(3+\bar{e}^2-4\bar{s}^2) \right\}.$$

Уравнения (6.14) при  $\varepsilon^2$  обращаются в уравнения Лагранжа для кеплеровых оскулирующих элементов, причем элементы  $l, g, h$  переходят соответственно в кеплеровские элементы  $M, \omega, \Omega$ . Существенно, что уравнения (6.14) не только имеют вид уравнений Лагранжа, но и возмущающая функция  $R$  выражается через эйлеровы элементы  $a, e, i, l, g, h$  точно так же, как возмущающая функция  $R$  в кеплеровском движении через соответствующие кеплеровские элементы.

### Уравнения Ньютона–Эйлера

При изучении различных возмущений, обусловленных непотенциальными силами, такими как сопротивление атмосферы, световое давление и т.п., удобнее пользоваться уравнениями типа Ньютона, связывающими изменения эйлеровых элементов с компонентами возмущающего ускорения  $S, T, B$ , которые заданы в орбитальной системе координат. Возмущающие ускорения  $S, T, B$  определим следующим образом.

Пусть  $\mathbf{x}$  есть вектор с компонентами  $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3 - c\sigma)$ :

$$\bar{r} = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - c\sigma)^2},$$

$$\bar{v} = |\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} \text{ — орбитальная скорость.}$$

Направим составляющую  $S$  вдоль вектора  $\mathbf{x}$ , вектор  $T$  — по направлению, перпендикулярному  $\mathbf{x}$ , лежащему в плоскости  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$  и составляющему с направлением движения угол, меньший  $90^\circ$ , а  $B$  — по нормали к плоскости  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ . Связь между компонентами возмущающего ускорения

$$F_{x_i} = \frac{\partial R}{\partial x_i} + P_i$$

и величинами  $S, T, B$  будет задаваться формулами

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{s}_1 & \bar{s}_2 & \bar{s}_3 \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \\ F_{x_3} \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{s}_1 &= \frac{x_1}{r}, & \bar{s}_2 &= \frac{x_2}{r}, & \bar{s}_3 &= \frac{x_3 - c\sigma}{r}, \\
\tau_1 &= \frac{r\dot{x}_1 - x_1\dot{r}}{b}, & \tau_2 &= \frac{r\dot{x}_2 - x_2\dot{r}}{b}, & \tau_3 &= \frac{r\dot{x}_3 - (x_3 - c\sigma)\dot{r}}{b}, \\
b_1 &= \frac{x_2\dot{x}_3 - (x_3 - c\sigma)\dot{x}_2}{b}, & b_2 &= \frac{(x_3 - c\sigma)\dot{x}_1 - x_1\dot{x}_3}{b}, & b_3 &= \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{b}, & b &= r\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Уравнения типа Ньютона выведены относительно оскулирующих эйлеровых элементов

$$\bar{a}, \bar{p}, \bar{s}, \Omega, \omega, M, \tag{6.17}$$

заданных формулами (5.20) запишутся следующим образом (Аксенов, Носков, 1972). Уравнения для элементов  $\bar{a}, \bar{p}, \bar{s}$  имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{a}}{dt} &= 2\bar{a}^2 \left( rS' + \sqrt{v^2 - r^2}T' \right), \\
\frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{2c^2(x_3 - c\sigma)\dot{x}_3}{r} S' + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}} T' + \frac{2[c^2(x_3 - c\sigma)\dot{r}\dot{x}_3 - \bar{r}Q]}{\bar{r}\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}} T' - \frac{2c^2\alpha_3\dot{x}_3}{\bar{r}\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}} B', \\
\bar{s} \frac{d\bar{s}}{dt} &= \frac{1 - \bar{s}^2}{\bar{p}} \left\{ -\frac{c^2(x_3 - c\sigma)\dot{x}_3}{r} S' + \frac{c^2(x_3 - c\sigma)\bar{r}\dot{x}_3 - \bar{r}Q}{\bar{r}\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}} T' - \frac{\alpha_2^2 \bar{r}(x_3 - c\sigma)\bar{r}^2\dot{x}_3 + c^2(1 - \bar{s}^2)\dot{x}_3}{\alpha_3 \bar{r}\sqrt{v^2 - \dot{r}^2}} B' \right\},
\end{aligned} \tag{6.19}$$

где положено

$$\begin{aligned}
S &= fm_0 S', & T &= fm_0 T', & B &= fm_0 B', \\
Q &= \frac{2fm_0\xi\eta(c^2\eta + c\sigma\xi)}{\xi^2 + c^2\eta^2}, & \alpha_2^2 &= fm_0\bar{p}, & \alpha_3^2 &= fm_0\bar{p}(1 - \xi^2),
\end{aligned}$$

а  $\xi, \eta, w$  — сфероидальные координаты, связанные с прямоугольными координатами соотношениями

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \cos w, \\
y &= \sqrt{(\xi^2 + c^2)(1 - \eta^2)} \sin w, \\
z &= c\sigma + \xi\eta.
\end{aligned}$$

Уравнения для угловых элементов  $\Omega, \omega, M$  представляются в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \mu\dot{\psi} + A_1S' + A_2T' + A_3B', \\
\frac{d\omega}{dt} &= \nu\dot{\psi} + B_1S' + B_2T' + B_3B', \\
\frac{dM}{dt} &= n_0 + C_1S' + C_2T' + C_3B'.
\end{aligned} \tag{6.20}$$

Здесь  $\dot{\psi}$  — производная по входящему явно времени. Выражения для коэффициентов можно найти в (Аксенов, 1977).

### 6.3. Метод Цейпеля

Метод Цейпеля является одним из основных методов аналитического решения уравнений небесной механики и теории движения ИСЗ в том числе. Почти все известные аналитические теории движения ИСЗ были получены этим методом.

В разд. 3.3 мы рассмотрели способ нахождения решения первого приближения для гамильтоновой системы. Первый член производящей функции  $S_0$  находился как решение уравнения в частных производных (уравнение Гамильтона–Якоби). Делоне, а затем Цейпелем в обобщенном виде была предложена методика нахождения более высоких приближений. Суть методики в том, что производящая функция  $S$  представляется в виде  $S = \sum \tau^n S_n$ , а  $S_n$  определяются последовательно как решения цепочки дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть гамильтониан системы есть

$$H(p, q, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n H_n(p, q, t), \quad (6.21)$$

где  $q$  — обобщенные координаты;  $p$  — обобщенные импульсы.

Пусть  $S_0 = S_0(P, q, t)$  есть полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$H_0 \left[ \frac{\partial S}{\partial q}, q, t \right] + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0, \quad (6.22)$$

и пусть  $p = p(P, Q, t)$  и  $q = q(P, Q, t)$  решения уравнений

$$p_i = \frac{\partial S_0}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S_0}{\partial P_i}. \quad (6.23)$$

Предположим, что  $P, Q \neq \text{const}$  и меняются со временем. Выберем функцию  $S = S_0(P, q, t)$  в качестве производящей для перехода от канонических переменных  $p, q$  к каноническим переменным  $P, Q$ . Гамильтониан преобразуется к виду

$$H = \tilde{H}(P, Q, t),$$

или с учетом (6.42)

$$\tilde{H}(P, Q, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n H_n(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \tilde{H}_n(P, Q, t). \quad (6.24)$$

Следовательно,  $P, Q$  описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial Q}(P, Q, t), \\ \dot{Q} &= \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial \tilde{H}_n}{\partial P}(P, Q, t). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Для определения приближенного решения уравнений (6.25) с точностью до любого порядка введем в рассмотрение почти тождественное преобразование канонических переменных  $P$  и  $Q$  к переменным  $P^*, Q^*$  с помощью производящей функции

$$S = \sum_{i=1}^N P_i^* Q + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n S_n(P^*, Q, t). \quad (6.26)$$

Так что

$$P_i = P_i^* + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial S_n}{\partial Q_i}(P^*, Q, t), \quad (6.27)$$

а гамильтониан  $\tilde{H}$  преобразуется к виду

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n K_n(P^*, Q, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \tilde{H}_n \left[ \left( P^* + \sum_{m=1}^{\infty} \tau^m \frac{\partial S_m}{\partial Q} \right), Q, t \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \frac{\partial S_n}{\partial t}. \quad (6.28)$$

Для определения  $K_n$  приравняем в (6.28) справа и слева коэффициенты при одинаковых степенях  $n$ . Получим уравнения

$$\begin{aligned} K_1 &= \tilde{H}_1(P^*, Q, t) + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \\ K_2 &= \tilde{H}_2(P^*, Q, t) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial S_1}{\partial Q_i} \frac{\partial H_1}{\partial P_i}(P^*, Q, t) + \frac{\partial S_2}{\partial t}, \\ K_n &= F_n + \frac{\partial S_n}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где  $F_n$  — известные функции  $\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_n, S_1, \dots, S_{n-1}$ . Функции  $S_n$  остаются неопределенными и могут быть выбраны по нашему усмотрению. Исходя из необходимости усреднения гамильтониана, разделим  $F_n$  на быстроменяющиеся слагаемые  $F_n^s$  и медленноменяющиеся слагаемые  $F_n^i$  и положим

$$K_n = F_n^i, \quad \frac{\partial S_n}{\partial t} = -F_n^s.$$

Таким образом, новый гамильтониан  $n$ -го порядка будет содержать только медленноменяющиеся члены.

Главным недостатком метода Цейпеля является зависимость производящей функции (6.26) одновременно от новых импульсов и старых координат. Для получения явных выражений новых переменных через старые и наоборот это требует дополнительных усилий. От указанного недостатка полностью свободен метод усреднения Хори–Депри, основанный на использовании рядов и преобразований Ли. Хорошо алгоритмизированное изложение этого метода дано К.В. Холшевниковым (1973). Ниже мы приводим это изложение.

#### 6.4. Метод рядов и преобразований Ли (метод Хори–Депри)

Пусть имеем систему

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial q}, \quad (6.30)$$

где  $q = \{q_1, \dots, q_N\}$ ,  $p = \{p_1, \dots, p_N\}$  — как и ранее, обобщенные координаты и импульсы, гамильтониан  $h = h(t, q, p, \mu)$ ;  $\tau$  — малый параметр.

Возьмем в качестве «производящей» функции некоторую достаточно гладкую функцию  $T(q, p)$  и рассмотрим замену переменных в виде



$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial T}{\partial q}, \quad (6.31)$$

$$q|_{\tau=0} = Q, \quad p|_{\tau=0} = P.$$

Решение системы уравнений (6.31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} q &= \bar{q}(Q, P, \tau, T), \\ p &= \bar{p}(Q, P, \tau, T). \end{aligned} \quad (6.32)$$

В силу (6.52) любая функция от  $q$  и  $p$  становится функцией от  $Q, P, \tau, T$ :

$$f(q, p) = f(\bar{q}(Q, P, \tau, T), \bar{p}(Q, P, \tau, T)) = \bar{f}(Q, P, \tau, T). \quad (6.33)$$

Как показано в (Холшевников, 1973), семейство канонических преобразований (6.32) при фиксированных  $\tau$  и  $T$  образует однопараметрическую коммутативную непрерывную группу Ли с законом композиции

$$(\tau_1, T) * (\tau_2, T) = (\tau_1 + \tau_2, T), \quad (6.34)$$

т.е. результат композиции есть движение по траектории системы (6.31) за время  $\tau_1 + \tau_2$ .

Из соотношения (6.34) следует, что

а) тождественное преобразование (единица группы) отвечает нулевому значению  $\tau$ :  $(0, T) =$  тождественное преобразование;

б) обратное преобразования отвечает изменению знака  $\tau$ :

$$(\tau, T) * (-\tau, T) = (0, T). \quad (6.35)$$

Это большое достоинство метода. Преобразование, обратное к (6.32), получается автоматически без дополнительных вычислений простой заменой знака  $\tau$ :

$$\begin{aligned} Q &= \bar{q}(Q, P, -\tau, T), \\ P &= \bar{p}(Q, P, -\tau, T), \end{aligned} \quad (6.36)$$

и вообще любая

$$f(Q, P) = \bar{f}(q, p, -\tau, T). \quad (6.37)$$

Подходящей линейной заменой независимой переменной системы (6.31) можно показать, что

$$(\alpha\tau, T) = (\tau, \alpha T), \quad (6.38)$$

и представить (6.34) в виде

$$(\tau, \alpha_1 T) * (\tau, \alpha_2 T) = [\tau, (\alpha_1 + \alpha_2) T], \quad (6.39)$$

где  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$  — произвольные вещественные числа.

Согласно (6.38) обратное преобразование можно представить в форме

$$f(Q, P) = \bar{f}(q, p, \tau, -T). \quad (6.40)$$

Для практического применения метода остается дать явное выражение для преобразования (6.32). Это достигается использованием так называемого ряда Ли по степеням  $\tau$ . Этот ряд связан с задачей Коши вида

$$\frac{dx}{d\tau} = g(x), \quad x|_{\tau=0} = X, \quad (6.41)$$

решение которой задается рядом Ли

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} D^n X \equiv e^{\tau D} X, \quad (6.42)$$

сходящимся при достаточно малом  $\tau$ . Здесь  $D$  — оператор Ли:

$$D = g(x) \frac{\partial}{\partial x} = \sum_{m=1}^n g_m(x) \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad (6.43)$$

$$D^0 = 1, \quad D^{n+1} = DD^n$$

и для любой произвольной функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} D^n f(X) \equiv e^{\tau D} f(X). \quad (6.44)$$

Ряд Ли является некоторым обобщением ряда Тейлора.

Пусть теперь система (6.31), связывающая  $q, p, T, \tau$  с  $P, Q$ , имеет вид (6.41).

Тогда преобразование (6.32) примет вид

$$\left. \begin{aligned} q &= e^{\tau D} Q, \\ p &= e^{\tau D} P, \\ f(q, p) &= e^{\tau D} f(Q, P), \end{aligned} \right\} \quad (6.45)$$

а оператор  $D$  в нашем случае, после замены в (6.43)  $g_m$  на  $\frac{\partial T}{\partial Q_m} - \frac{\partial T}{\partial P_m}$ , будет представлять собой скобку Пуассона

$$D = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial T(Q, P)}{\partial P_m} \frac{\partial}{\partial Q_m} - \frac{\partial T(Q, P)}{\partial Q_m} \frac{\partial}{\partial P_m} \right), \quad (6.46)$$

так что

$$Df = [fT] = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial Q_m} \frac{\partial T}{\partial P_m} - \frac{\partial f}{\partial P_m} \frac{\partial T}{\partial Q_m} \right).$$

Обратное к (6.45) преобразование получается сменой знака при  $\tau$ , т.е.

$$\left. \begin{aligned} Q &= e^{-\tau d} q, \\ P &= e^{-\tau d} p, \\ f(Q, P) &= e^{-\tau d} f(q, p). \end{aligned} \right\} \quad (6.47)$$

Оператор  $d$  определяется формулой

$$d = \sum_{m=1}^N \left( \frac{\partial T(q, p)}{\partial p_m} \frac{\partial}{\partial q_m} - \frac{\partial T(q, p)}{\partial q_m} \frac{\partial}{\partial p_m} \right). \quad (6.48)$$

Таким образом, имеем систему (6.30) и замену (6.31),  $\tau$  — мало. Нужно найти уравнение в частных производных относительно  $T$ , связывающее  $T$  с новым гамильтонианом  $\hat{H}(Q, P)$ . Поскольку  $\tau$  мало, мы имеем почти тождественное или бесконечно малое контактное преобразование от  $q, p$  к  $Q, P$  и

$$h(q, p) = \hat{H}(Q, P) = e^{\tau D} H, \quad (6.49)$$

где  $H$  есть результат формальной подстановки  $Q, P$  в  $h$

$$H = H(Q, P) = h(Q, P).$$

В новых переменных система (6.31) принимает вид

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial P}, \quad \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial Q}. \quad (6.50)$$

Далее будем действовать в рамках метода малого параметра. Разложим  $h, T, D$  по степеням  $\tau$ :

$$h = h_0 + \tau h_1 + \tau^2 h_2 + \dots$$

причем система с гамильтонианом  $h_0$  — интегрируема:

$$T = T_1 + \tau T_2 + \tau^2 T_3 + \dots$$

В силу (6.39) преобразование  $(\tau, T)$  можно представить следующим образом:

$$(\tau, T_1 + \tau T_2 + \dots) = (1, \tau T_1 + \tau^2 T_2 + \dots).$$

Поэтому можно в (6.45) и (6.47) положить  $\tau=1$ , а оператор  $D$  разложить в ряд по степеням  $\tau$ :

$$D = \sum_{m=1}^{\infty} \tau^m D_m,$$

$$D_m = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial T_m}{\partial P_j} \frac{\partial}{\partial Q_j} - \frac{\partial T_m}{\partial Q_j} \frac{\partial}{\partial P_j} \right).$$

Операторы  $D_m$  в общем случае некоммутативны.

Формула (6.49) принимает вид

$$\hat{H}(Q, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \tau^m D_m \right)^n \left( \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j H_j \right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \tau^n \hat{H}_n(Q, P). \quad (6.51)$$

Получим рекуррентные соотношения для общего члена ряда (6.51). Определим  $H_{n,m}(Q, P)$  как коэффициенты разложения

$$D_o H = \sum_{m=0}^{\infty} \tau^m H_{0,m},$$

$$\frac{1}{1!} D_1 H = \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{1+m} H_{1,m},$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{n!} D_n H = \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{n+m} H_{n,m}. \quad (6.52)$$

Поскольку степень  $n$  в (6.51) означает кратность применения оператора  $D$ , то  $H_{n,m}$  можно представить как

$$H_{n,m} = \frac{1}{n!} \sum (H_k, T_{k_1}, \dots, T_{k_n}), \quad (6.53)$$

причем нужно иметь в виду, что скобки Пуассона неассоциативны и антикоммутируют, т.е.

$$[f, g, h, w] = \{[(f, g), h], w\}.$$

Исходя из определения  $H_{n,m}$ , можно записать, что

$$H_{n,m} = \sum_{j=0}^m (H_{n-1, m-j}, T_{j+1}), \quad (6.54)$$

т.е. сумма всех членов при  $\tau_{n+m}$ .

А теперь приравнявая в (6.51) справа и слева члены при одинаковых степенях  $\tau$ , получим

$$\widehat{H}_n = \sum_{m=0}^n H_{m,n-m}. \quad (6.55)$$

Таким образом, для получения  $\widehat{H}_n$  с точностью до  $\tau^n$  достаточно вычислить  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  элементов треугольной матрицы

$$\begin{array}{ccccccc} H_{0,0} & H_{0,1} & H_{0,2} & H_{0,3} & \dots & & \\ H_{1,0} & H_{1,1} & H_{1,2} & \dots & & & \\ H_{2,0} & H_{2,1} & \dots & & & & \\ H_{3,0} & \dots & & & & & \\ \dots & & & & & & \end{array} \quad (6.56)$$

Или, расписывая (6.55), получим систему уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \widehat{H}_0 &= H_0, \\ \widehat{H}_1 &= H_1 + (H_0, T_1), \\ \widehat{H}_2 &= H_2 + (H_0, T_2) + (H_1, T_1) + \frac{1}{2}(H_0, T_1, T_1), \\ \widehat{H}_3 &= H_3 + (H_0, T_3) + (H_1, T_2) + (H_2, T_1) + \frac{1}{2}(H_0, T_1, T_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(H_0, T_2, T_1) + \frac{1}{2}(H_1, T_1, T_1) + \frac{1}{6}(H_0, T_1, T_1, T_1) \end{aligned} \quad (6.57)$$

.....  
для нахождения членов разложения производящей функции  $T$ .

## 7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТ

### 7.1. Вводные замечания

Методы представления сил, действующих на ИСЗ, в виде функций элементов орбит по своим принципам не отличаются от классических методов разложения возмущающей функции в ряд, используемых в небесной механике, однако имеют свои особенности. Прежде всего, для спутникового движения эта задача является гораздо более трудоемкой, поскольку действующих сил много и по своей природе они разнообразны. При этом высокоточному представлению поддается только разложение возмущающей функции от геопотенциала. Все остальные разложения выполняются с какими-либо ограничениями. Скажем, в случае возмущений от Луны и Солнца трудность представляет учет влияния возмущений в движении самих возмущающих тел на движение ИСЗ. При учете атмосферных возмущений приходится ограничиваться упрощенной моделью вычисления атмосферной плотности и т.п. В настоящем разделе мы остановимся лишь на представлении потенциала Земли (Уральская, Журавлев, 1980) и лунно-солнечных возмущений в виде функций элементов орбит (Емельянов, 1980). Представление возмущений от сопротивления атмосферы в виде функций элементов можно найти, например, у В.А. Тамарова и А.М. Черницова (1998), и аналогичные представления для возмущений от светового давления — в другой работе (Черницов, Тамаров, 1998).

### 7.2. Формы представления потенциала Земли в виде функции элементов орбит

Потенциал Земли  $U$  можно представить в виде функции элементов орбиты спутника: большой полуоси  $a$ , эксцентриситета  $e$ , наклона орбиты  $i$ , средней аномалии  $M$ , долготы восходящего узла  $\Omega$ , долготы перигея  $\omega$  следующим образом:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^n U_{n,m}, \quad (7.1)$$

$$U_{n,m} = \frac{fmr_0^n}{a^{n+1}} \sum_{p=0}^{\infty} F_{n,m,p}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{n,p,q}(e) S(\omega, M, \Omega, \theta),$$

где

$$S(\omega, M, \Omega, \theta) = \begin{cases} C_{n,m} & n-m \text{ чет} \\ -S_{n,m} & n-m \text{ нечет} \end{cases} \cos[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\omega-\theta)], \quad (7.2)$$

$$+ \begin{cases} S_{n,m} & n-m \text{ чет} \\ C_{n,m} & n-m \text{ нечет} \end{cases} \sin[(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + m(\omega-\theta)].$$

Здесь  $\theta$  — гринвичское звездное время;  $F_{n,m,p}(i)$  и  $G_{n,p,q}(e)$  — функции наклона и функции эксцентриситета соответственно.

Существуют различные формы записи функций наклона. Так, У. Каула (1970) предложил записывать функцию наклона в следующем виде:

$$F_{n,m,p}(i) = \sum_i \frac{(2n-2t)!}{t!(n-t)!(n-m-2t)!2^{2n-2t}} (\sin i)^{n-m-2t} \times$$

$$\times \sum_s \binom{m}{s} \cos^s i \sum_c \binom{n-m-2t+s}{c} \binom{m-s}{p-t-c} (-1)^{c-k}, \quad (7.3)$$

где  $k$  — целая часть  $(n-m)/2$ , а  $t$  изменяется в пределах от 0 до  $p$  или  $k$  в зависимости от того, что меньше,

$$\binom{m}{s} = \frac{m!}{s!(m-s)!}.$$

Выражение (7.3) может быть записано в виде однократной суммы, и таким образом, функция  $F_{n,m,p}(i)$  будет функцией половинного угла  $i/2$

$$F_{n,m,p}(i) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{(n+m)!}{2^n p!(n-p)!} \sum_k (-1)^k \binom{2n-2p}{k} \times$$

$$\times \binom{2p}{n-m-k} \left( \cos \frac{i}{2} \right)^{2n-\alpha} \left( \sin \frac{i}{2} \right)^\alpha, \quad (7.4)$$

где  $\alpha = m - n + 2p + 2k$ .

В.А. Брумберг (1980) ввел так называемые обобщенные функции наклона  $\bar{F}_{n,m,p}(I)$  и выразил их через гипергеометрическую функцию  $F$ :

$$F_{k,j,l}(i) = \lambda_{k,j,l} \left( \sin \frac{i}{2} \right)^{|k-j-2l|} \left( \cos \frac{i}{2} \right)^{|k+j-2l|} \times$$

$$\times F(-m, 2k-m+1, 1+|k-j-2l|; \sin^2 \frac{I}{2}), \quad (7.5)$$

где числовые множители  $\lambda_{k,j,l}$  определяются формулами

$$\lambda_{k,j,l} = \begin{cases} (-1)^{B\left(\frac{k-j}{2}\right)} \frac{2^{k-j-l} \left(\frac{1}{2}\right)_{k-l}}{(1)_l (1)_{k-j-2l}}, & k-j-2l \geq 0, \\ (-1)^{B\left(\frac{k-j}{2}\right)+k-j} \frac{(1+k-j)_{2j} (1-k+j+2l)_{k-j}}{2^k (1)_l (1)_{k-l}}, & k-j-2l \leq 0, \end{cases} \quad (7.6)$$

$$(\alpha)_0 = 1, \quad (\alpha_s) = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+s-1),$$

причем  $I$  — угол наклона плоскости отсчета к плоскости экватора.

Многие авторы стремились получить рекуррентные соотношения для вычисления функций наклона. В частности, Дж. Джакалия (Giacaglia, 1975) нашел для них следующие рекуррентные соотношения:

а) для фиксированных индексов  $m$  имеется три основных соотношения:

$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,0} = (2n+1)\sin i F_{n,m,0},$$

$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,n+1} = -(2n+1)\sin i F_{n,m,n},$$

$$2j(n-m+1)F_{n+1,m,p+1} = (2n+1)\sin i (F_{n,m,p+1} - F_{n,m,p}) - 2j(n+m)F_{n-1,m,p};$$

б) для фиксированных индексов  $n$  имеем

$$\begin{aligned} c^2 s^2 F_{n,m+2,p+2} = & -c^2 s^2 F_{n,m+2,p-1} - 2(1-c^2 s^2)(F_{n,m+2,p+1} + F_{n,m+2,p}) + \\ & + 2j(m+1)sc[c^2 F_{n,m+1,p+2} + s^2 F_{n,m+1,p-1} + (1+c^2)F_{n,m+1,p+1} + (1+s^2)F_{n,m+1,p}] - \\ & - (n-m)(n+m+1)[c^4 F_{n,m,p+2} + s^4 F_{n,m,p-1} + s^2(1+c^2)F_{n,m,p} + c^2(1+s^2)F_{n,m,p+1}]; \end{aligned}$$

в) для переменных индексов  $n$  и  $m$  справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned} s^2 F_{n+1,m+1,p+2} = & s^2 F_{n-1,m+1,p+1} + c^2(F_{n-1,m+1,p-1} - F_{n+1,m+1,p}) + (F_{n-1,m+1,p} - F_{n+1,m+1,p+1}) - \\ & - [c^2 s^2 (F_{n,m,p+2} + F_{n,m,p-1}) + (1-c^2 s^2)(F_{n,m,p+1} - F_{n,m,p})], \end{aligned}$$

где  $c = \cos i/2$ ;  $s = \sin i/2$ ;  $j = \sqrt{-1}$ .

Функции эксцентриситета  $G_{n,p,q}(e)$  могут быть представлены с помощью коэффициентов Ганзена, являющихся, в свою очередь, коэффициентами Фурье разложения выражения  $(r/a)^n \exp(jmv)$  в ряд по кратным средней аномалии

$$\left(\frac{r}{a}\right)^n \exp(jmv) = \sum_k G_{n,p,q}(e) \exp(jkM). \quad (7.7)$$

Функции эксцентриситета  $G_{n,p,q}(e)$  являются коэффициентами Ганзена с определенным набором индексов, а именно

$$G_{n,p,q}(e) = X_{n-2p+q}^{-n-1, n-2p}.$$

Общее выражение коэффициентов Ганзена через функции Бесселя задается формулой

$$X_k^{n,m} = (1+\beta^2)^{-n-1} \sum_{s=0}^{s_1} \sum_{j=-s}^{j_1} \binom{n-m+1}{s} \binom{n+m+1}{s+j} (-\beta)^j I_{k-m+j}(ke) \beta^{2s},$$

где

$$\beta = \frac{e}{1 + \sqrt{1-e^2}}.$$

В общем случае  $X_k^{n,m}$  являются степенными рядами по  $\beta$ . Для  $k=0$  коэффициент  $X_0^{n,m}$  может быть выражен с помощью гипергеометрического ряда

$$X_0^{n,m} = \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} (-\beta)^m \binom{n+m+1}{m} F(n+2, n+m+2, m+1, \beta^2).$$

Наиболее полные разложения для  $(r/a)^n \exp(jmv)$  до двадцатой степени эксцентриситета получены в (Jarnagin, 1965). Кроме того, коэффициенты Ганзена могут вычисляться с помощью рекуррентных соотношений и, в частности, по формулам, приведенным в работе (Giacaglia, 1975):

$$\begin{aligned}
(n-2p)(1-e^2)G_{n,p,q} &= (n-2p+q)\sqrt{1-e^2}G_{n-2,p-1,q} - (n+1)\frac{e}{2} \times \\
&\quad \times (G_{n-1,p-1,q-1} - G_{n-1,p,q+1}), \\
(1-E^2)G_{n,p,q} &= \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)G_{n-2,p-1,q} + e(1-e^2)[G_{n-1,p-1,q-1} + G_{n-1,p,q+1}] - \\
&\quad - \frac{e^2}{4}[G_{n-2,p-2,q-2} + G_{n-2,p,q+2}].
\end{aligned}$$

### 7.3. Особенности вычисления лунно-солнечных возмущений

По сравнению с прочими возмущениями в движении искусственных спутников Земли влияние притяжения Луны и Солнца считается хорошо изученным. Положения возмущающих тел, Луны и Солнца, определяются с высокой точностью с помощью существующих теорий их движения. Пертурбационная функция задачи как функция от прямоугольных координат спутника и возмущающего тела имеет простой вид. Однако вычисление возмущений от Луны и Солнца в элементах орбиты ИСЗ представляет собой сложную задачу. Эта сложность резко возрастает с увеличением требуемой точности вычисления возмущений.

Лунно-солнечные возмущения в элементах орбиты ИСЗ имеют характерный множитель

$$\varepsilon' = \frac{m'}{m} \left( \frac{a}{a'} \right)^3, \quad (7.8)$$

где  $m'$  — масса Луны или Солнца;  $m$  — масса Земли;  $a$  — большая полуось орбиты ИСЗ;  $a'$  — большая полуось орбиты возмущающего тела. Возмущающая функция, отнесенная к величине основного ускорения от притяжения Земли, имеет примерно тот же порядок, что и  $\varepsilon'$ . Вариации элементов на интервале одного оборота спутника, обусловленные притяжением Луны и Солнца, также имеют порядок  $\varepsilon'$ . А. Рой (Roy, 1969) исследовал зависимости  $\varepsilon'$  от большой полуоси орбиты спутника в случаях, когда возмущающими телами являются Луна или Солнце, и сделал сравнение с аналогичной зависимостью для параметра  $\varepsilon_{\text{СЖ}}$ , характеризующего величину возмущений в элементах ИСЗ от сжатия Земли, заданного формулой

$$\varepsilon_{\text{СЖ}} = 3J_2 \frac{R_0^2}{a^2(1-e^2)}, \quad (7.9)$$

где  $J_2$  — коэффициент при второй зональной гармонике в разложении геопотенциала;  $R_0$  — экваториальный радиус Земли;  $e$  — эксцентриситет орбиты спутника. Как показывают оценки, возмущения от Луны и Солнца возрастают, а возмущения от сжатия Земли убывают с ростом  $a$ . Одинаковый порядок эти возмущения имеют при  $a = 44000$  км.

При получении аналитических выражений для возмущений элементов орбиты ИСЗ от Луны и Солнца вводится ряд упрощений. Прежде всего устанавливаются, будут ли уравнения для возмущений решаться только в первом или



также и во втором приближении. При решении уравнений во втором приближении в их правые части подставляют элементы или координаты ИСЗ, уже содержащие возмущения от других факторов. Так, например, получаются лунно-солнечные возмущения второго порядка, пропорциональные сжатию Земли.

Ряд существенных упрощений приходится делать при разложении возмущающей функции, чтобы выразить ее через элементы орбиты спутника. Приведем разложение возмущающей функции от внешнего тела из работы Е.И. Тимошковой и К.В. Холшевникова (1974). Прежде всего запишем возмущающую функцию  $R$  в зависимости от геоцентрических координат спутника  $x, y, z$  и возмущающего тела  $x', y', z'$ :

$$R = fm' \left( \frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right), \quad (7.10)$$

где  $r'$  — геоцентрическое расстояние возмущающего тела;  $\Delta$  — расстояние от спутника до возмущающего тела. Обозначим через  $H$  угол между геоцентрическими радиусами-векторами спутника и возмущающего тела. Тогда

$$\cos H = \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3}, \quad (7.11)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H}. \quad (7.12)$$

Функцию  $R$  можно разложить в ряд по степеням  $r/r'$ :

$$R = \frac{fm'}{r'} \sum_{k=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r'} \right)^k P_k(\cos H). \quad (7.13)$$

где  $P_k(\cos H)$  — полином Лежандра  $k$ -го порядка. В написанном разложении член при  $k = 2$  называют основным или хилловским членом, остальные — параллактическими.

Выражение возмущающей функции через элементы орбит ИСЗ и возмущающего тела имеет вид

$$R = fm' \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=0}^k \sum_{n'=0}^k \sum_{j=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q'=-\infty}^{\infty} \left( 2 - \delta_{j,0} \frac{\alpha^k}{\alpha'^{k+1}} \right) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} F_{k,j,n}(i) F_{k,j,n'}(i') X_{k-2n'+q}^{k,k-2n}(e) \times \\ \times \cos[(k-2n+q)M - (k-2n'+q')M' + (k-2n)g - (k-2n')g' + j(\Omega - \Omega')], \quad (7.14)$$

причем  $g = \omega + 90^\circ$ ,  $g' = \omega' + 90^\circ$ . Здесь введены следующие обозначения:  $f$  — гравитационная постоянная;  $i, e, \Omega, \omega, M$  — наклон, эксцентриситет, долгота восходящего узла, аргумент перигея, средняя аномалия орбиты спутника;  $i', e', \Omega', \omega', M'$  — такие же элементы орбиты возмущающего тела. Элементы  $i, \Omega, i', \Omega'$  относятся к экватору Земли. Кроме того,  $\delta_{j,0}$  — символ Кронекера;  $F \dots(i)$  — функция наклона;  $X \dots(e)$  — функция эксцентриситета.

При определении возмущений первого порядка полагают, что элементы  $a, e, i, a', e', i'$  — постоянные, а элементы  $M, \omega, \Omega, M', \omega', \Omega'$  суть известные линейные функции времени. Линейные функции для  $M', \omega', \Omega'$  определяют из

теории движения возмущающего тела, а возмущения элементов  $M, \omega, \Omega$  определяются как сумма вековых возмущений от всех известных возмущающих факторов. Вековой член в  $R$  получается, если положить  $k - 2n + q = 0$ ,  $k - 2n' + q' = 0$ ,  $k - 2n = 0$ ,  $k - 2n' = 0$ ,  $j = 0$ . Очевидно, что он не зависит от  $M, \omega, \Omega$ .

После подстановки возмущающей функции в уравнения Лагранжа для оскулирующих элементов получим общий вид возмущений любого элемента  $\varepsilon_i$  из совокупности  $a, e, i, M, \omega, \Omega$ :

$$\delta\varepsilon_i = \bar{A}_k^\varepsilon(t - t_0) + \sum' A_{k,n,n',j,q,q'}^\varepsilon \frac{\cos[(k - 2n + q)M - (k - 2n' + q')M' + (k - 2n)g - (k - 2n')g' + j(\Omega - \Omega')]}{(k - 2n + q)\dot{M} - (k - 2n' + q')\dot{M}' + (k - 2n)\dot{g} - (k - 2n')\dot{g}' + j(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}')}, \quad (7.15)$$

где  $t_0$  — эпоха элементов ИСЗ, а штрих у знака суммы означает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого  $k - 2n + q = 0$ ,  $k - 2n' + q' = 0$ ,  $k - 2n = 0$ ,  $k - 2n' = 0$ ,  $j = 0$ . Коэффициенты  $A_{k,n,n',j,q,q'}^\varepsilon$ ,  $A_k^\varepsilon$  зависят только от  $a, a', e, i, i'$ . Вековые возмущения первого порядка присутствуют лишь в элементах  $M, \omega, \Omega$ .

Чтобы классифицировать периодические возмущения, введем следующие обозначения. Пусть  $T$  — период обращения спутника,  $T'$  — период обращения Луны,  $T''$  — период обращения Солнца,  $T_1$  — период обращения перигея спутника,  $T_1'$  — период обращения перигея Луны,  $T_1''$  — период обращения перигея Солнца,  $T_2$  — период обращения узла спутника,  $T_2'$  — период обращения узла Луны,  $T_2''$  — период обращения узла Солнца. Для ИСЗ с высотой до 36000 км  $T$  имеет величину от  $90^m$  до  $24^h$ ,  $T' \approx 28$  сут,  $T'' = 1$  год,  $T_1, T_2$  имеют для разных спутников величину от 250 до 1000 и более суток,  $T_1', T_1'', T_2', T_2''$  превышают 10 лет.

Гармоники в выражении для  $\delta\varepsilon_i$  с периодами, примерно равными  $T/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), называются короткопериодическими возмущениями. Гармоники с периодом  $T/2$ , как правило, доминируют. Группу гармоник с периодами, примерно равными  $T', T'/2, T'/3, \dots$ , принято называть долгопериодическими возмущениями, однако некоторые авторы относят их к короткопериодическим. Остальные гармоники в выражениях для  $\delta\varepsilon_i$  имеют периоды порядка года и более и называются долгопериодическими возмущениями. Среди возмущений с периодами  $T', T'/2, T'/3, \dots$  и т. д. максимальную амплитуду имеют гармоники с периодом  $T'/2$ , т.е. около двух недель. Заметим, что амплитуда гармоник возмущений оказывается пропорциональной ее периоду, поэтому долгопериодические возмущения преобладают над короткопериодическими.

Функции наклона  $F_{k,j,n}(i)$  и функции эксцентриситета  $X_{k-2n+q}^{k,k-2n}(e)$ , или коэффициенты Ганзена, определяются по формулам, приведенным в предыдущем разделе.

Существенной проблемой при построении разложения возмущающей функции в виде формулы (7.14) является учет возмущений в элементах  $i', e', \Omega', \omega', M'$  самого возмущающего тела. Прямая подстановка в формулу (7.14) аналитических разложений элементов  $i', e', \Omega', \omega', M'$ , полученных из теории движения Луны Делоне или теории движения Земли Ньюкома, не представляется возможной.

В то же время практически значимые аналитические теории движения таких высоколетящих спутников, как геостационары или объекты систем GPS или ГЛОНАСС, не могут быть созданы с использованием только невозмущенных значений элементов  $i', e', \Omega', \omega', M'$ .

М.А. Вашковьяком в 1971 г. был предложен оригинальный способ численно-аналитического представления возмущающей функции  $R$  в задаче об учете лунно-солнечных возмущений в движении высоколетящего спутника. Функция  $R$  была представлена в виде разложения (7.13). Координаты возмущающего тела предполагались известными функциями времени, и для вычисления этих координат и их производных, входящих в разложение координат ИСЗ, использовались полиномы по степеням времени, полученные как аппроксимация таблиц точных значений координат Луны и Солнца, вычисленных по полным теориям их движения.

С.М. Кудрявцев (Kudryavtsev, 2005), развивая этот подход, предложил метод разложения произвольной функции от координат Луны, Солнца и планет в ряд Пуассона. Метод состоит в следующем.

Пусть  $f(y)$  есть произвольная функция от координат Луны, Солнца и планет, заданная таблично с постоянным шагом на интервале времени  $[-\bar{T}, \bar{T}]$ . Необходимо построить аналитическое представление данной функции на этом интервале времени в виде ряда Пуассона  $h$ -го порядка

$$f(y) = \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ A_{k0}^c + A_{k1}^c t + \dots + A_{kh}^c t^h \right] \cos \omega_k(t) + \left[ A_{k0}^s + A_{k1}^s t + \dots + A_{kh}^s t^h \right] \sin \omega_k(t) \right\},$$

где  $A_{k0}^c, A_{k1}^c, \dots, A_{kh}^c$  — константы, а  $\omega_k(t)$  — некоторый заранее определенный набор аргументов, являющихся полиномами  $q$ -го порядка от времени  $t$ :

$$\omega_k(t) = v_{k1}t + v_{k2}t^2 + \dots + v_{kq}t^q.$$

Для решения этой задачи нужно найти проекции функции  $f(y)$  на базис, образуемый функциями

$$c_{kl} = t^l \cos \omega_k(t) \text{ и } s_{kl} = t^l \sin \omega_k(t),$$

где  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $l = 0, 1, \dots, h$ , определяя численно следующие скалярные произведения функций

$$A_{kl}^c = \langle f, c_{kl} \rangle \equiv \frac{1}{2\bar{T}} \int_{-\bar{T}}^{\bar{T}} f(t) t^l \cos \omega_k(t) \chi(t) dt,$$

$$A_{kl}^s = \langle f, s_{kl} \rangle \equiv \frac{1}{2\bar{T}} \int_{-\bar{T}}^{\bar{T}} f(t) t^l \sin \omega_k(t) \chi(t) dt.$$

Причем скалярное произведение функций определяется как

$$\langle f, g \rangle \equiv \frac{1}{2\bar{T}} \int_{-\bar{T}}^{\bar{T}} f(t) \bar{g}(t) \chi(t) dt,$$

где  $\bar{g}$  есть функция, комплексно сопряженная функции  $g$ , а

$$\chi(t) = 1 + \cos \frac{\pi}{\bar{T}} t$$

есть фильтр Хеннинга, используемый как весовая функция. Тестирование метода было проведено на высокоточных разложениях и показало очень хорошую точность.

Рассмотрим некоторые свойства лунно-солнечных возмущений первого порядка в движении ИСЗ.

Вековым возмущениям от Луны и Солнца подвержены только элементы  $\Omega, \omega, M$ . Главный член в вековых возмущениях для  $\Omega$  и  $\omega$  имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{\Omega} &= -\frac{3}{16} n \frac{m}{m'} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 \frac{2+3e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i') \cos i, \\ \delta\dot{\omega} &= \frac{3}{16} n \frac{m}{m'} \left( \frac{a}{a'} \right)^3 \frac{4-5\sin^2 i + e^2}{\sqrt{1-e^2}} (2-3\sin^2 i'). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для элемента  $M$  вековые возмущения можно приближенно определить по формуле

$$\delta\dot{M} = -\frac{fm'}{\sqrt{fma}} \frac{a^2}{a'^3} F_{2,0,1}(i) X_0^{-3,0}(e') \left[ 4X_0^{2,0}(e) + \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial X_0^{2,0}(e)}{\partial e} \right]. \quad (7.17)$$

Выражения для вековых возмущений не имеют никаких особенностей при  $e = 0$  и всех значениях  $i$ .

Что касается долгопериодических возмущений первого порядка в движении ИСЗ от Луны до Солнца, то большая полуось орбиты спутника  $a$  не имеет долгопериодических возмущений первого порядка. Формулы для долгопериодических возмущений остальных элементов справедливы при всех  $0 \leq e < 1$ . Долгопериодические возмущения быстро возрастают с ростом  $a$ . Возмущения с периодами  $T', T'/2, T'/3$  и т.д. возрастают пропорционально  $a^3$ , а с периодами  $T > T'$  возрастают как  $a^5$  или как  $a^3$ . Выражения для долгопериодических возмущений содержат в знаменателе некоторые функции от наклона орбиты ИСЗ. Эти функции таковы, что ряд значений  $i$  обращает в нуль знаменатели некоторых возмущающих гармоник. Вот список таких критических значений:

$$46^\circ 20', 54^\circ 00', 63^\circ 30', 69^\circ 00', 73^\circ 10', 90^\circ 00', 116^\circ 30', 120^\circ 00'.$$

Особого внимания заслуживает влияние возмущений от внешнего тела на приполярный спутник. Впервые особенности эволюции орбиты такого рода спутника были рассмотрены М.Л. Лидовым (1961), который показал, что при определенных начальных условиях быстрая эволюция эксцентриситета орбиты спутника может приводить к его столкновению с Землей.

Дальнейшее развитие эти исследования нашли в работах М.А. Вашковьяка и В.И. Прохоренко. Обзор работ можно найти в (Прохоренко, 2006).

## 8. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

### 8.1. Особенности численного интегрирования уравнений движения ИСЗ

В иностранной литературе численные методы интегрирования называют еще методами частных (special) возмущений. Последняя терминология более ясно характеризует конечный результат рассматриваемых методов. Методы частных возмущений, в отличие от аналитических (общих возмущений), вычисляют приращения к заданным значениям интегрируемых параметров, поведение которых задается дифференциальными уравнениями. Поэтому численные методы интегрирования определяют частное решение дифференциальных уравнений, тогда как аналитические — общее.

Преимущество численных методов интегрирования состоит в том, что они не требуют упрощения правых частей дифференциальных уравнений и позволяют учесть весь спектр действующих возмущений. В аналитических методах это практически неосуществимо.

Значительный недостаток методов частных возмущений связан с накоплением численной ошибки, обусловленной округлением. Очевидно, что влияние ошибки округления можно ослабить за счет увеличения числа значащих разрядов. Этого можно достичь, либо используя усовершенствованные вычислительные средства, либо преобразуя дифференциальные уравнения с использованием априорных сведений об их решении.

Ввиду того, что частные возмущения аппроксимируются отрезком степенного ряда по независимой переменной, для обеспечения требуемой точности шаг интегрирования в численных методах выбирается существенно меньшим, чем в аналитических. Таким образом, задача Коши разбивается на множество подзадач со своими частными решениями, которые последовательно определяются шаг за шагом.

Многошаговость численного процесса также приводит к серьезным трудностям при интегрировании. В большинстве численных методов шаг интегрирования выбирается в зависимости от величин старших членов аппроксимирующей суммы. В случае если старшие члены становятся достаточно большими, шаг интегрирования уменьшается. Это приводит к дроблению шага и, как следствие, к умножению неустраняемой ошибки округления на шаге.

Ляпуновская неустойчивость решений уравнений небесной механики, и уравнений движения ИСЗ в том числе, усиливает влияние ошибки аппроксимации метода на шаге интегрирования, что при длительных интервалах прогнозирования приводит к большому накоплению суммарной ошибки.

Перечисленные особенности процесса численного интегрирования уравнений движения ИСЗ побуждают нас искать такие формы представления уравнений движения и организации численного процесса, которые позволили бы устранить или хотя бы ослабить негативное влияние указанных выше факторов. Детально мы рассмотрим эти способы в гл. 10, тогда как здесь остановимся на алгоритмах вычисления возмущающих ускорений в движении ИСЗ, используемых в численном моделировании.

## 8.2. Рекуррентные алгоритмы для вычисления шаровых функций $V_{n,m}$ и их производных

### Алгоритм, предложенный Л. Каннингемом

Как правило, моделирование возмущений в численном прогнозировании движения ИСЗ производится в прямоугольных координатах, независимо от формы записи уравнений движения.

Будем использовать потенциал Земли в виде представления:

$$U = \frac{fm}{r_0} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_{n,m}(\sin \varphi) [\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda] \right\}. \quad (8.1)$$

Введем функцию

$$V_{n,m} \equiv \frac{P_{n,m}(\sin \varphi)(\cos m\lambda + i \sin m\lambda)}{r^{n+1}} \quad (8.2)$$

и перепишем (8.1) как

$$U = \text{Real} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} - iS_{n,m}) V_{n,m}. \quad (8.3)$$

Выразим  $x, y, z$  через  $r, \lambda, \varphi$ :

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = r \cos \varphi \sin \lambda, \quad z = r \sin \varphi. \quad (8.4)$$

Выразим  $V_{n,m}$  через  $x, y, z$ :

$$V_{n,m} = \frac{P_{n,m}(\sin \varphi)(x + iy)^m}{\cos^m \varphi}. \quad (8.5)$$

Введем обозначения

$$Z_{n,m} = \frac{r^{n-m} P_{n,m}(\sin \varphi)}{\cos^m \varphi}, \quad V_{n,m} = \frac{(x + iy)^m Z_{n,m}}{r^{2n+1}}. \quad (8.6)$$

Запишем явное выражение для  $P_{n,m}(\sin \varphi)$  (Аксенов, 1977):

$$P_{n,m}(\sin \varphi) = \cos^m \varphi \sum_{k=0}^{[(n-m)/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-m-2k)!(n-k)!} \sin^{n-m-2k} \varphi. \quad (8.7)$$

Таким образом,  $Z_{n,m}$  содержит в числителе гармонический полином и можно ввести функцию

$$H_{n,m} = (x + iy)^m Z_{n,m}, \quad (8.8)$$

которая является стандартной сферической гармоникой степени  $m$  порядка  $n$ , а введенная нами функция  $V_{n,m}$

$$V_{n,m} = \frac{H_{n,m}}{r^{2n+1}}$$

является шаровой. Гармонический полином (8.8) можно представить в операторной форме

$$H_{n,m} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} r^{2n+1} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left( \frac{1}{r} \right). \quad (8.9)$$

Для  $m = n$

$$V_{n,m} = (-1)^n \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left( \frac{1}{r} \right), \quad (8.10)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \left( \frac{1}{r} \right) = (-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \frac{(x+iy)^n}{r^{2n+1}},$$

$$V_{n,n} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{(x+iy)^n}{r^{2n+1}}. \quad (8.11)$$

Из (8.11) получается первое рекуррентное соотношение

$$V_{n,n} = (2n-1) \frac{x+iy}{r^2} V_{n-1,n-1}. \quad (8.12)$$

Рекуррентное соотношение (2.10) для присоединенных функций Лежандра  $(n+2-m)P_{n+2,m}(z) - (2n+3)zP_{n+1,m}(z) + (n+m+1)P_{n,m}(z) = 0$

позволяет получить рекуррентное соотношение

$$(n-m)V_{n,m} = (2n-1) \frac{z}{r^2} V_{n-1,m} - \frac{n+m-1}{r^2} V_{n-2,m}, \quad (8.13)$$

Далее, очевидно, что

$$V_{n+1,m} = -\frac{\partial}{\partial z} V_{n,m}.$$

Из (8.11) следует

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial z} = -(2m+1) \frac{z}{r^2} V_{n,m}.$$

Пусть  $n = m+1$ :

$$(n-m)V_{n,m} = (2n-1) \frac{z}{r^2} V_{n-1,m}. \quad (8.14)$$

Таким образом, начальные величины, необходимые для рекуррентного соотношения (8.13), задаются формулами (8.11) и (8.14) и

$$V_{0,0} = \frac{1}{r}.$$

Используя эти соотношения, запишем выражения для первых пяти  $V_{n,m}$

$$V_{1,0} = \frac{z}{r^3}, \quad V_{2,0} = \frac{3}{2} \frac{z}{r^2} V_{1,0} - \frac{1}{r^2} V_{0,0} = \frac{3}{2} \frac{z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$V_{1,1} = \frac{x+iy}{r^3}, \quad V_{2,1} = 3 \frac{z}{r^2} \frac{x+iy}{r^3} = 3 \frac{z(x+iy)}{r^5},$$

$$V_{2,2} = 3 \frac{x+iy}{r^2} \frac{x+iy}{r^3} = 3 \frac{(x+iy)^2}{r^5}$$



Выведем  $\frac{\partial V_{n,m}}{\partial(x,y,z)}$  из (8.10) и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^v V_{n,m}}{\partial z^v} &= (-1)^v \frac{(n-m+v)!}{(n-m)!} V_{n+m,m}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^s V_{n,m} &= (-1)^s V_{n+s,m+s}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Это имеет место для неотрицательных значений  $n, m, s$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) V_{n,m} &= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} V_{n,m}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) V_{n,m} &= \frac{(n-m+2)!}{(n-m)!} V_{n+1,m-1}, \quad m=0. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} P &\equiv \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}, \\ M &\equiv \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial x} &= P + M, \\ 2 \frac{\partial}{\partial y} &= P - M. \end{aligned}$$

Используя выражения (8.15) и (8.16) и операторы  $P$  и  $M$ , можно выписать необходимые рекуррентные соотношения:

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial x} = -\frac{V_{n+1,m+1}}{2} + \frac{(n-m+2)!}{2(n-m)!} V_{n+1,m-1} \quad (m > 0),$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial x} = -\frac{V_{n+1,1}}{2} - \frac{V_{n+1,1}^*}{2} \quad (m=0),$$

$$V_{n,-m} = (-1)^m \frac{n-m}{(n+m)!} V_{n,m}^*,$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial y} = \frac{iV_{n+1,m+1}}{2} + \frac{i(n-m+2)!}{2(n-m)!} V_{n+1,m+1} \quad (m > 0),$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial y} = \frac{iV_{n+1,1}}{2} - \frac{iV_{n,n+1}^*}{2} \quad (m=0), \quad (8.17)$$

$$\frac{\partial V_{n,m}}{\partial z} = -\frac{(n-m+1)!}{(n-m)!} V_{n+1,m} \quad (m > 0).$$

Для полностью нормированных функций Лежандра (см. гл. 2) эти соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{E_m(2n+1)}{E_{m-1}2m}} \frac{x+iy}{r^2} \bar{V}_{n-1,m-1}, \quad (m=n), \\
\bar{V}_{n,m} &= \sqrt{\frac{4n^2-1}{n^2-m^2}} \frac{z}{r^2} \bar{V}_{n-1,m} - \sqrt{\frac{(2n+1)[(n-1)^2-m^2]}{(2n-3)(n^2-m^2)}} \frac{1}{r^2} \bar{V}_{n-2,m}, \\
r^2 &= \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad V_{0,0} = \frac{1}{r}, \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x} &= -\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} \quad (m > 0), \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial x} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \operatorname{Real} V_{n+1,1} \quad (m=0), \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+2)(n+m+1)}{2n+3}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} + \\
&\quad + \sqrt{\frac{2(2n+1)(n-m+2)(n-m+1)}{E_{m-1}(2n+3)}} \frac{\bar{V}_{n+1,m+1}}{2} \quad (m > 0), \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial y} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+2)(n+1)}{2(2n+3)}} \operatorname{Imag} V_{n+1,1} \quad (m=0), \\
\frac{\partial \bar{V}_{n,m}}{\partial z} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m+1)(n-m+1)}{2n+3}} V_{n+1,m} \quad (m \geq 0).
\end{aligned} \tag{8.18}$$

Причем

$$E_m = \begin{cases} 1, & \text{при } m=0, \\ 2, & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

### **Алгоритм, предложенный А. Дрожинером и В. Брумбергом**

Более простой вывод рекуррентных соотношений для  $V_{n,m}$ , а также способ избавиться от работы с мнимыми величинами предложен А. Дрожинером и В.А. Брумбергом (Брумберг, 1980).

Разделим правую часть выражения (8.2) на действительную и мнимую части

$$V_{n,m} = X_{nm} + iY_{nm}. \tag{8.19}$$

В результате этого выражение (8.1) для потенциала  $U$  примет вид

$$U = fM_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} X_{nm} + S_{n,m} Y_{nm}). \tag{8.20}$$

Выражение (8.20) можно получить и непосредственно из (8.1), вводя обозначения

$$\begin{aligned} X_{n,m} &= \frac{P_{n,m}(\sin \varphi) \cos m\lambda}{r^{n+1}}, \\ Y_{n,m} &= \frac{P_{n,m}(\sin \varphi) \sin m\lambda}{r^{n+1}}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Используем для присоединенных функций Лежандра рекуррентное соотношение вида

$$P_{n+1,j}(\sin \varphi) = (2n+1) \cos \varphi P_{n,j-1}(\sin \varphi) + P_{n-1,j}(\sin \varphi) \quad (8.22)$$

чтобы получить первые рекуррентные соотношения для вычисления функций  $V_{n,m}, X_{n,m}, Y_{n,m}$ . Действительно, полагая  $j = n+1$ , умножая правую и левую части на  $(\cos(n+1)\lambda + i \sin(n+1)\lambda) / r^{-n-1}$  и учитывая, что по определению присоединенных функций Лежандра  $P_{n-1,n+1} = 0$ , получим

$$V_{n+1,n+1} = (2n+1) r^{-n-1} \cos \varphi P_{n,n}(\sin \varphi) (\cos(n+1)\lambda + i \sin(n+1)\lambda),$$

или

$$V_{n+1,n+1} = (2n+1) \frac{(x+iy)}{r^2} V_{n,n}. \quad (8.23)$$

Подставляя сюда (8.19), будем иметь в вещественном виде

$$\begin{pmatrix} X_{n+1,n+1} \\ Y_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = \frac{2n+1}{r^2} \left[ x \begin{pmatrix} X_{n,n} \\ Y_{n,n} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -Y_{n,n} \\ X_{n,n} \end{pmatrix} \right]. \quad (8.24)$$

Рекуррентное соотношение для присоединенных функций Лежандра, получаемое из (2.10) при  $n := n-1$

$$(n+1-j)P_{n+1,j}(\sin \varphi) = (2n+1) \sin \varphi P_{n,j}(\sin \varphi) - (n+j)P_{n-1,j}(\sin \varphi),$$

позволяет получить рекуррентное соотношение для случая  $n \neq m, j = m$ :

$$(n-m+1)V_{n+1,m} = (2n+1) \frac{z}{r^2} V_{n,m} - \frac{n+m}{r^2} V_{n-1,m}. \quad (8.25)$$

Причем этот же вид соотношений будет сохраняться для  $X_{n,m}, Y_{n,m}$ , а начальные условия запишутся как

$$X_{0,0} = \frac{1}{r}, \quad Y_{0,0} = 0. \quad (8.26)$$

Что же касается формул для вычисления производных от функций  $X_{n,m}, Y_{n,m}$ , то их можно представить двумя способами. Либо получить рекуррентные соотношения типа (8.25), (8.26), выражающие производные для более высоких индексов  $n$  и  $m$  через производные для более низких индексов  $n$  и  $m$ , как это делает А. Дрожинер (Drozyner, 1977). Либо, как это предлагает В.А. Брумберг (Брумберг, 1980), выразить производные через сами дифференцируемые функции. Останемся на последнем подходе. Аналогично (8.9) можно записать для  $Y_{n,m}$ :

$$V_{n,m} = \frac{(-1)^n}{(n-m)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \left( \frac{1}{r} \right), \quad (8.27)$$

что дает

$$\begin{aligned}
V_{n+1,m} &= -\frac{1}{n-m+1} \frac{\partial}{\partial z} Y_{n,m}, \\
V_{n+1,m+1} &= -\left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) Y_{n,m}.
\end{aligned}
\tag{8.28}$$

В силу уравнения Лапласа можно записать:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{1}{r}.$$

Поэтому

$$V_{n+1,m-1} = \frac{(-1)^n}{(n-m+2)!} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^{n-m} \frac{1}{r},$$

или

$$V_{n+1,m-1} = \frac{1}{(n-m+2)(n-m+1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) V_{n,m}.
\tag{8.29}$$

Разрешая формулы (8.27)–(8.29) относительно производных, получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{n,m}}{\partial x} &= -\frac{1}{2} V_{n+1,m+1} + \frac{1}{2} (n-m+2)(n-m+1) V_{n+1,m-1}, \\
\frac{\partial V_{n,m}}{\partial y} &= \frac{i}{2} V_{n+1,m+1} + \frac{i}{2} (n-m+2)(n-m+1) V_{n+1,m-1}, \\
\frac{\partial V_{n,m}}{\partial z} &= -(n-m+1) V_{n+1,m}.
\end{aligned}
\tag{8.30}$$

При  $m = 0$  формулы (8.30) значительно упрощаются. В вещественных переменных первые два соотношения в (8.30) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} X_{n,m} \\ Y_{n,m} \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_{n+1,m+1} \\ Y_{n+1,m+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (n-m+2)(n-m+1) \begin{pmatrix} X_{n+1,m-1} \\ Y_{n+1,m-1} \end{pmatrix}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} X_{n,m} \\ Y_{n,m} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -Y_{n+1,m+1} \\ X_{n+1,m+1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (n-m+2)(n-m+1) \begin{pmatrix} -Y_{n+1,m-1} \\ X_{n+1,m-1} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{8.31}$$

а производные по  $z$  от  $X_{n,m}, Y_{n,m}$  будут совпадать по форме с аналогичной производной от  $V_{n,m}$ .

### Алгоритм, предложенный К.В. Холшевниковым

К.В.Холшевниковым (Холшевников и др., 2005) предложен иной подход к вычислению производных от функции  $U$ .

Будем использовать гравитационный потенциал в форме (8.20)

$$U = fM_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n (C_{n,m} X_{nm} + S_{n,m} Y_{nm}).$$

Как мы видели выше, градиент шаровой функции сам является шаровой функцией, а ее порядок повышается на единицу, поэтому можно записать:

$$\text{grad}U = fM_0 \sum_{n=l+1}^{N+1} r^{n-1} \sum_{k=0}^n (\mathbf{A}_{nk} X_{nk} + \mathbf{B}_{nk} Y_{nk}). \quad (8.32)$$

Остается только выразить безразмерные компоненты  $A_{nk}^i, B_{nk}^i$  векторов  $\mathbf{A}_{nk}, \mathbf{B}_{nk}$  через  $C_{n-1,s}, S_{n-1,s}$ ,  $0 \leq s \leq n-1$ , что можно сделать, используя рекуррентные соотношения. Например, выражения для компонент  $A_{nk}^i, B_{nk}^i$  векторов  $\mathbf{A}_{nk}, \mathbf{B}_{nk}$ , представленные как линейные комбинации  $C_{n-1,s}, S_{n-1,s}$ ,  $n \geq 1$ ,  $s = k-1, k+1$ , при  $i=1, 2$ ,  $s=k$  и при  $i=3$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_{nk}^1 &= -\frac{1+\delta_{1k}}{2}(1-\delta_{0k})C_{n-1,k-1} + v_{nk}C_{n-1,k+1}, \\ B_{nk}^2 &= (1-\delta_{0k}) \left[ -\frac{1-\delta_{1k}}{2}S_{n-1,k-1} + v_{nk}S_{n-1,k+1} \right], \\ A_{nk}^2 &= \frac{1+\delta_{1k}}{2}(1-\delta_{0k})S_{n-1,k-1} + v_{nk}S_{n-1,k+1}, \\ B_{nk}^3 &= -(1-\delta_{0k}) \left[ -\frac{1+\delta_{1k}}{2}C_{n-1,k-1} + v_{nk}C_{n-1,k+1} \right], \\ A_{nk}^3 &= -(n-k)C_{n-1,k}, \\ B_{nk}^3 &= -(1-\delta_{0k})(n-k)S_{n-1,k}. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера,

$$v_{nk} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Значения функций  $X_{n,m}, Y_{n,m}$  в формуле (8.32) вычисляются по формулам (8.24) и (8.25).

### 8.3. Вычисление возмущений от приливных деформаций центрального тела

В задачах численного моделирования движения ИСЗ все возмущения, связанные с Землей, удобно вычислять с помощью рекуррентных соотношений, аналогичных описанным в предыдущем разделе. Обратимся вновь к формуле (4.2)

$$\tilde{R} = \frac{fm_l}{r_l} \sum_{n=2}^{\infty} k_n \left( \frac{r_0}{r_l} \right)^n \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \quad (8.33)$$

где  $r$  — радиус-вектор внешней точки.

Поскольку Земля не является идеально упругим телом, приливной горб будет иметь некоторое запаздывание на угол  $\tau$  от направления на возмущающее тело, причем  $\cos\psi$  может быть выражен через угол  $\tau$  и сферические координаты спутника  $(\alpha, \delta)$  и возмущающего тела  $(\alpha_l, \delta_l)$  следующим образом:

$$\cos\psi = \sin\delta\sin\delta_l + \cos\delta\cos\delta_l\cos(\alpha_l + \delta - \tau).$$

Воспользуемся известной теоремой сложения полиномов Лежандра, нормируем полученные соотношения и, разделяя члены, относящиеся к сферическим координатам спутника и возмущающего тела, введем шаровые функции

$$\begin{aligned}\bar{V}_{n,m} &= \frac{\bar{P}_{n,m}(\sin\delta)\exp(im\alpha)}{r^{n+1}}, \\ \bar{V}_{n,m,l} &= \frac{\bar{P}_{n,m,l}(\sin\delta_l)\exp(im\alpha_l)}{(r_l)^{n+1}}\end{aligned}\quad (8.34)$$

и перепишем разложение (8.33) в виде

$$\tilde{R} = \text{Real} \left[ fm_l \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{e^{-im\tau} k_n r_0^{2n+1}}{2n+1} V_{n,m,l} V_{n,m} \right]. \quad (8.35)$$

Здесь  $\bar{P}_{n,m}$  — нормированные присоединенные функции Лежандра (см. гл. 2). Шаровые функции  $V_{n,m}$ ,  $V_{n,m,l}$  и их производные по прямоугольным координатам могут вычисляться с помощью рекуррентного алгоритма Каннингема.

Сравнивая выражения (8.12) и (8.20), можно получить формулу для разложения геопотенциала, искаженного за счет приливной деформации:

$$\tilde{V} = V + \tilde{R} = \frac{\mu}{r} + \mu \text{Real} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n r_0^n \gamma_{n,m} \bar{V}_{n,m},$$

где  $\gamma_{n,m} = \bar{c}_{n,m} - i\bar{s}_{n,m} + \delta\gamma_{n,m}$ , а  $\gamma_{n,m}$  определено формулой

$$\gamma_{n,m} = \sum_{l=1}^2 \frac{\mu_l}{\mu} \frac{k_n e^{-im\tau} r_0^{n+1}}{2n+1} \bar{V}_{n,m,l},$$

$\mu_l = fm_l$ , причем  $l$  — номер возмущающего тела.

Для более точного учета влияния приливных деформаций можно использовать модель Вара. Различие между моделью Вара и Лява вводится в разложение  $V$  также в виде поправок (IERS Conventions, 1996) к нормализованным гармоническим коэффициентам:

$$\Delta\bar{c}_{n,m} - i\Delta\bar{s}_{n,m} = A_m \sum_{s(n,m)} \delta k_s H_s(i)^{n+m} e^{i\theta_s}, \quad (8.36)$$

$$A_m = \frac{(-1)^m}{r_0 \sqrt{4\pi(2 - \delta_{0,m})}}; \quad \delta_{0,m} = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0, \end{cases}$$

$\delta k_s = k_s - k_2$  ( $k_s$  — числа из модели Вара,  $k_2$  — номинальное число Лява);  $H_s$  — амплитуда членов с индексом  $s$  (табл. 8.1) (см. также прил. 3 к электронной хрестоматии «Динамика искусственных спутников Земли» (<http://solar.tsu.ru>));

$$\theta_s = \sum_{j=1}^6 n_j \beta_j; \quad (8.37)$$

$\tilde{n} = \{n_j\}$  — шестимерный вектор множителей к переменным Дудсона<sup>3</sup>;  $\beta_j$  — переменные Дудсона, связанные с фундаментальными аргументами (см. гл. 1) соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{s} = F + \Omega = \beta_2, \quad N = -\Omega = \beta_5, \\ h = \bar{s} - D = \beta_3, \quad \rho_1 = \bar{s} - D - l' = \beta_6, \\ \rho = \bar{s} - l = \beta_4, \quad \bar{\tau} = s_g + \pi - \bar{s} = \beta_1, \end{aligned}$$

где  $s_g$  — среднее звездное время нулевого меридиана.

**Таблица 8.1. Коэффициенты  $n_j$  для вычисления поправок к  $\bar{C}_{n,m}$  и  $\bar{S}_{n,m}$  за счет различия моделей Вара и Лява**

Числа Дудсона	$\tilde{n}$						$A_m \delta k_s H_s \cdot 10^{12}$
	$\bar{\tau}$	$\bar{s}$	$h$	$\rho$	$N$	$\rho_1$	
Суточные эффекты ( $n = 2, m = 1$ )							
145.555 ( $O_1$ )	1	-1	0	0	0	0	-16.4
163.555 ( $P_1$ )	1	1	-2	0	0	0	-49.6
165.545	1	1	0	0	-1	0	-9.4
165.555 ( $K_1$ )	1	1	0	0	0	0	507.4
165.565	1	1	0	0	1	0	73.5
166.554 ( $\psi_1$ )	1	1	1	0	0	-1	-15.2
Полусуточные эффекты ( $n = 2, m = 2$ )							
257.55 ( $M_2$ )	2	0	0	0	0	0	39.5
273.555 ( $S_2$ )	2	2	-2	0	0	0	18.4

Более полные данные по вычислению поправок к коэффициентам  $\bar{C}_{n,m}$  и  $\bar{S}_{n,m}$  можно найти в (IERS..., 1996).

Динамический эффект от океанических приливов учитывается в виде периодических вариаций нормализованных гармонических коэффициентов  $\bar{C}_{n,m}$ ,  $\bar{S}_{n,m}$ . Вариации определяются формулой

$$\Delta \bar{C}_{n,m} - i \Delta \bar{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} \sum_{\mp} \mp (c_{s,n,m}^{\pm} \mp i s_{s,n,m}^{\pm}) e^{\pm i \theta_s}, \quad (8.38)$$

где

$$F_{n,m} = \frac{4\pi f \rho_{\omega}}{g} \left[ \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0,m})} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+k'_n}{2n+1} \right),$$

<sup>3</sup> Числа Дудсона — это коэффициенты  $n_j$ , закодированные в виде  $n_1(n_2+5)(n_3+5)(n_4+5)(n_5+5)(n_6+5)$ .

$g = 9.798261 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $f$  — универсальная гравитационная постоянная, равная  $6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ ;  $\rho_\omega$  — плотность морской воды,  $\rho_\omega = 1025 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ;  $k'_n$  — нагрузочные деформационные коэффициенты ( $k'_2 = -0.3075$ ,  $k'_3 = -0.195$ ,  $k'_4 = -0.132$ ,  $k'_5 = -0.1032$ ,  $k'_6 = -0.0892$ );  $c_{s,n,m}^\pm$ ,  $s_{s,n,m}^\pm$  — океанические приливные коэффициенты по  $m$  для приливной составляющей  $s$  (см. прил. 2);  $\theta_s$  — аргумент приливной составляющей  $s$ , определенный формулой (8.37).

При вычислении суммы  $\sum \mp$  выбор верхнего знака означает суммирование выражений, связанных с наступающими волнами  $c_{s,n,m}^+$  и  $s_{s,n,m}^+$ , выбор нижнего знака — выражений, связанных с отступающими волнами  $c_{s,n,m}^-$ ,  $s_{s,n,m}^-$ . Океанические приливные коэффициенты, используемые здесь, связаны с амплитудами и фазами Свидерского формулой

$$c_{s,n,m}^\pm - i s_{s,n,m}^\pm = -i \widehat{c}_{s,n,m}^\pm e^{i(\varepsilon_{s,n,m}^\pm + \chi_s)},$$

где  $\widehat{c}_{s,n,m}^\pm$  — океанические приливные амплитуды для  $s$ -й составляющей;  $\varepsilon_{s,n,m}^\pm$  — океанические приливные фазы для  $s$ -й составляющей (см. прил. 2 по адресу <http://solar.tsu.ru>);

$$\chi_s = \begin{cases} 0 & \text{для полусуточного и долгого периодов,} \\ \frac{\pi}{2} & \text{для } k_1, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{для } O_1, P_1, \Psi_1. \end{cases}$$

Таким образом, соотношения (7.38) могут быть записаны в одной из ниже-следующих форм:

$$\Delta \bar{C}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(c_{s,n,m}^+ + c_{s,n,m}^-) \cos \theta_s + (s_{s,n,m}^+ + s_{s,n,m}^-) \sin \theta_s],$$

или

$$\Delta \bar{C}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [\widehat{c}_{s,n,m}^+ \sin(\theta_s + \varepsilon_{s,n,m}^+ + \chi_s) + \widehat{c}_{s,n,m}^- \sin(\theta_s + \varepsilon_{s,n,m}^- + \chi_s)],$$

$$\Delta \bar{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [(s_{s,n,m}^+ - s_{s,n,m}^-) \cos \theta_s - (c_{s,n,m}^+ - c_{s,n,m}^-) \sin \theta_s],$$

или

$$\Delta \bar{S}_{n,m} = F_{n,m} \sum_{s(n,m)} [\widehat{c}_{s,n,m}^+ \cos(\theta_s + \varepsilon_{s,n,m}^+ + \chi_s) - \widehat{c}_{s,n,m}^- \cos(\theta_s + \varepsilon_{s,n,m}^- + \chi_s)].$$

При суммировании по  $s(n,m)$  следует включать все составляющие, входящие в модель Свидерского (см. прил. 2 по адресу <http://solar.tsu.ru>), за исключением случаев, близких к резонансу, когда члены, связанные с отливом, не производят орбитальных возмущений долгого периода ( $>1$  дня) для суточных и полусуточных приливов. Для спутников типа «Лагеос», например, возмущения вдоль орбиты, связанные с комбинацией всех отступающих волн, меньше 5 см.



Для долгопериодических приливов членами, связанными с отступающей волной, можно пренебречь, если удвоить члены, связанные с наступающей волной.

Для вычисления возмущений в наклонении и узле орбиты требуются только члены с четными степенями ( $n$ ). При вычислении возмущений эксцентриситета и наклонения членами с нечетными степенями пренебрегать уже нельзя. Долгопериодические возмущения появляются только тогда, когда степень ( $n$ ) больше чем 1 (для суточных приливов) и 2 (для полусуточных приливов). Наконец, амплитуды океанических приливов и их влияние на спутниковую орбиту убывают с возрастанием так, что для ИСЗ «Лагеос», например, достаточно ограничиться  $n = 6$ .

Для учета атмосферных приливов в качестве  $c_{22}^+$  и  $s_{22}^+$  нужно выбрать  $c_{22}^+ = -0.537$  см,  $s_{22}^+ = 0.3211$  см.

#### **8.4. Особенности представления других возмущений в численном моделировании движения ИСЗ**

##### ***Вычисление лунно-солнечных возмущений***

Распространенным способом определения координат Луны является использование упрощенной теории Хилла–Брауна, координат Солнца — теории Ньюкома.

Следует, однако, иметь в виду, что при прогнозировании движения высоколетающих объектов этот способ задания координат Луны и Солнца вносит значительные ошибки в вычисленные положения спутника.

Ошибки прогнозирования можно существенно уменьшить, если использовать для вычисления координат Луны и Солнца высокоточные теории движения этих объектов. В настоящее время наиболее часто употребляемой является американская высокоточная теория движения больших планет, Солнца и Луны DE405 (Standish, 1998). Теория DE405 получена численными методами, охватывает период 1600–2200 гг. и дает координаты в виде полиномов Чебышева в прямоугольной барицентрической системе координат с экватором Земли и равноденствием J2000.0.

Можно отметить также, что применение аналитических теорий для вычисления координат Луны и Солнца, в отличие от их табличного задания в машине, делает алгоритмы численного прогнозирования движения ИСЗ автономными, не требующими предварительного вычисления таблиц, в то же время табличный способ задания координат Луны и Солнца обладает большей оперативностью.

##### ***Вычисление возмущений от светового давления***

Как уже отмечалось в гл. 4, основную трудность при вычислении возмущений, вызванных световым давлением, представляет учет эффекта вхождения спутника в тень Земли. С. Ферраз-Мелло предложил устранить эту трудность введением в возмущающее ускорение функции тени  $\delta$ , причем  $\delta = 1$ , если спутник освещен Солнцем,  $\delta = 0$  в противном случае. Рассмотрим случай, когда можно

ограничиться цилиндрической формой тени, и сформулируем условия вхождения спутника в тень.

Обозначим через  $\Psi$  угол между осью цилиндра тени и вектором положения спутника (рис. 8.1). На промежутке  $[0, \pi]$   $-1 \leq \cos \Psi \leq 1$ . Введем в рассмотрение угол  $\varphi = \arcsin(r_0/r)$ , где  $r_0$  — экваториальный радиус Земли,  $r = |x|$ .

Разобьем промежутки  $[0, \pi]$  на два:  $[0, \varphi]$  и  $[\varphi, \pi]$  и запишем функцию тени  $\delta$  в виде

$$\begin{aligned} \delta &= 0, & -\varphi \leq \psi \leq \varphi, \\ \delta &= 1, & -\pi \leq \psi \leq -\varphi \text{ и } \varphi \leq \psi \leq \pi. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Сила прямого светового давления с учетом тени переписывается следующим образом:

$$P = kqs'\delta \left( \frac{a_s}{\Delta_s} \right)^2 \left( \frac{x_s - x}{\Delta_s} \right). \quad (8.40)$$

Аналитически условие вхождения в тень можно определить группой соотношений

$$\cos^2 \psi > 1 - \frac{r_0^2}{r^2}, \quad \cos \psi > 0, \quad (8.41)$$

причем

$$\cos \psi = -\frac{xx_s}{rr_s}.$$

Будем далее считать, что тень Земли имеет форму кругового конуса. В этом случае функция тени удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \sin(\theta - \varphi) \geq \sin \gamma, \\ \Psi_c, & \text{если } \sin(\theta - \varphi) < \sin \gamma, \\ 0, & \text{если } \sin(\varphi - \theta) \geq \sin \gamma. \end{cases} \quad (8.42)$$

Здесь

$$\sin \gamma = R_2 / \Delta_2, \quad \sin \varphi = a_1 / r, \quad \cos \theta = (x_s, x_s - x_2) / r\Delta',$$

а значение теневой функции в области полутени  $\delta_c$  определяется в форме

$$\delta_c = 1 - (1/\pi) \left( \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sin^2(\varphi/2)}{\sin^2(\gamma/2)} (\nu - \sin \nu \cos \nu) \right), \quad (8.43)$$

где  $R_2$  — радиус Солнца,

$$\cos \alpha = (\cos \varphi - \cos \theta \cos \gamma) / \sin \theta \sin \gamma,$$

$$\cos \nu = (\cos \gamma - \cos \theta \cos \varphi) / \sin \theta \sin \varphi.$$

Сила, которая создается радиацией, отраженной от Земли, может быть представлена в форме

$$P' = gs' \left( \frac{a_s}{r_s} \right) \left( \frac{r_0}{r} \right) \left[ k' \cos^2 \varphi + k'' \delta \sin(\beta - \psi) \right] \frac{x}{r}. \quad (8.44)$$

Здесь через  $\beta$  обозначено такое значение угла  $\psi$ , при котором диффузное отражение практически перестает оказывать влияние на спутник;  $k'$  — коэффициент инфракрасного отражения от Земли;  $k''$  — коэффициент радиального диффузного отражения. Значения коэффициентов  $k'$  и  $k''$  изменяются в пределах

$$0.2 \leq k' \leq 0.3, \quad 0.37 \leq k'' \leq 0.57.$$

Функция  $\delta$  определена соотношениями

$$\delta = \begin{cases} 1, & \text{если } \cos \psi \geq \cos \beta, \\ 0, & \text{если } \cos \psi < \cos \beta. \end{cases} \quad (8.45)$$

Значение угла  $\beta$  подбирается экспериментальным путем.

### ***Возмущения от сопротивления атмосферы***

Как уже было отмечено в разд. 4.5, на ИСЗ, движущийся на высоте 150–1500 км, заметное влияние оказывает сопротивление атмосферы. Сила сопротивления воздуха, действующая на поступательное движение спутника, направлена противоположно скорости объекта относительно воздуха, а ее абсолютная величина определена формулой

$$P = \frac{1}{2} S c_d \rho v_{\text{отн}}^2,$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения спутника;  $c_d$  — безразмерный коэффициент аэродинамического сопротивления воздуха;  $\rho$  — плотность воздуха;  $v_{\text{отн}}$  — скорость спутника относительно атмосферы. В численном моделировании движения ИСЗ для вычисления плотности воздуха  $\rho$  в зависимости от требуемой точности могут использоваться любые модели атмосферы: динамические, статические, локальные. Описание различных моделей дано в разд. 4.5.

### ***Релятивистские эффекты***

Релятивистские поправки  $\Delta \ddot{\mathbf{x}}$  правых частей уравнений движения, записанных в геоцентрической системе координат, могут быть представлены в виде (Брумберг, 1994)

$$\Delta \ddot{\mathbf{x}} = c^{-2} \sum_{n=1}^6 \Phi_n, \quad (8.46)$$

где  $c$  — скорость света;  $\Phi_1$  — шварцшильдовские возмущения, определяемые полем тяготения Земли, рассматриваемой как сферически-симметричное тело;  $\Phi_2$  — эффекты лenze-терринговской прецессии, порожденной вращением Земли;  $\Phi_3$  — релятивистские квадрупольные члены, обусловленные наличием у Земли моментов инерции второго порядка;  $\Phi_4$  — релятивистские члены, обусловленные взаимодействием Земли и внешних масс (Луны и Солнца), они описывают нелинейную суперпозицию гравитационных полей Земли и внешних масс;  $\Phi_5$  — релятивистские члены, которые можно интерпретировать как приливные возмущения от внешних масс;  $\Phi_6$  — поправки к ньютоновским воз-

мощениям от внешних масс. Формулы для вычисления релятивистских ускорений  $\Phi_n$  можно найти у В.А. Брумберга (1994).

## 9. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (ОДУ)

### 9.1. Вводные замечания

Современные средства наблюдений позволяют получать пространственные положения ИСЗ с точностью, равной 1 миллиардсекунде. Как показано в работе (Черницов, 2002), чтобы не потерять эту точность при использовании наблюдений, нужно иметь возможность вычислять пространственные положения ИСЗ с методической точностью, по крайней мере, в три раза превышающей точность наблюдений. Этого можно достичь только при применении в процессе моделирования движения ИСЗ численных методов высоких порядков.

В данной главе мы дадим описание наиболее часто употребляемых в практике моделирования движения ИСЗ методов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). К ним относятся явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга (Fehlberg, 1969, 1972), высоких порядков, неявный одношаговый алгоритм Эверхарта (Everhart, 1974a, 1974b), метод рациональной экстраполяции Булирша и Штера (Bulirsh, Stoer, 1964, 1966; Stoer, 1974) и многошаговый алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла (Oesterwinter, Cohen, 1969).

Изложение теории методов Рунге–Кутты можно найти в работах Дж. Бутчера (Butcher, 1963, 1964a, 1964b), в двух написанных Дж. Бутчером главах (5-я и 10-я) книги «Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений» (Холл, Уатт, 1979), опубликованной на русском языке в 1979 г., в монографии Т.В. Бордовицыной (1984) и в книге Э. Хайрера, С. Нерсетта и Г. Ваннера (1990). В приложении к последней книге имеются также написанные на языке Фортран программы явных алгоритмов Рунге–Кутты (в модификации Дормана и Принса) пятого и восьмого порядков для решения ОДУ первого и второго порядков. Изложение метода Эверхарта, кроме указанных выше работ самого автора, приводится также в монографии Т.В. Бордовицыной (1984). Обоснование экстраполяционных методов можно найти в монографии Дж. Штеттера (1978) и в книге Э. Хайрера, С. Нерсетта и Г. Ваннера (1990). В приложении к этой книге даны Фортран-программы экстраполяционных алгоритмов переменного шага и порядка для решения ОДУ первого и второго порядков. Изложение многошагового алгоритма Адамса–Мультона–Коуэлла можно найти в указанной выше работе авторов, а также в монографии Т.В. Бордовицыной (1984).

### 9.2. Явные одношаговые алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга

Явные алгоритмы Рунге–Кутты, предложенные Э. Фельбергом, построены по типу вложенных алгоритмов. Определение главного члена погрешности метода интегрирования на одном шаге осуществляется в этих алгоритмах по двум формулам Рунге–Кутты смежных порядков. Полученное значение главного члена ошибки метода на шаге используется затем для выбора шага интегрирования, который основывается на требовании одинаковой локальной точности

вычислений на каждом шаге. Аналогичный же подход к выбору шага можно найти в работе А.К. Платонова, З.К. Власовой и В.А. Степанянца (1976).

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

с начальным условием  $y(t_0) = y_0$  запишем две формулы Рунге–Кутты смежных порядков:

$$y = y_0 + h \sum_{k=0}^s b_k g_k + O(h^{r+1}), \quad \bar{y} = y_0 + h \sum_{k=0}^{s+l} \bar{b}_k g_k + O(h^{r+2}), \quad (9.1)$$

где

$$g_0 = f(t_0, y_0), \quad g_k = f\left(t_0 + c_k h, y_0 + h \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i\right), \quad k = 1, 2, \dots, s+l. \quad (9.2)$$

Для решения дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y)$$

с начальными условиями  $y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$  будем использовать три формулы:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + h \dot{y}_0 + h^2 \sum_{k=0}^s b_k g_k + O(h^{r+1}), \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 + h \sum_{k=0}^s \tilde{b}_k g_k + O(h^{r+1}), \\ \bar{y} &= y_0 + h \dot{y}_0 + h^2 \sum_{k=0}^{s+l} \bar{b}_k g_k + O(h^{r+2}), \end{aligned} \quad (9.3)$$

причем

$$g_0 = f(t_0, y_0), \quad g_k = f\left(t_0 + c_k h, y_0 + \dot{y}_0 c_k h + h^2 \sum_{i=0}^{k-1} a_{ki} g_i\right), \quad k = 1, 2, \dots, s+l. \quad (9.4)$$

Здесь  $y, \dot{y}_0, \bar{y}, g_0, g_k$  —  $n$ -мерные векторы.

Алгоритмы Фельберга построены таким образом, что первые  $s$  значений в формулах для  $y$  и  $\bar{y}$  совпадают. Свободные параметры среди  $c_k$  выбираются из условия минимума главной ошибки метода на шаге. Разность  $TE = \bar{y} - y$  определяет величину главного члена погрешности метода, имеющего порядок  $r$ , на одном шаге интегрирования. Контроль величины шага интегрирования с помощью  $TE$  может быть осуществлен следующим образом. Для всех интегрируемых уравнений на каждом шаге интегрирования вычисляются величины

$$A_i = \frac{TE_{y_i}}{TOL} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (9.5)$$

где  $TOL = \varepsilon y_i$  — абсолютная точность вычислений;  $\varepsilon$  — относительная точность;  $n$  — число интегрируемых уравнений. Затем проверяется условие

$$\frac{1}{2^{r+1}} \leq A_{\max} \leq 1,$$

где  $r$  — порядок метода.

Если  $A_{\max} > 1$ , новый шаг интегрирования уменьшается вдвое,  $H = h/2$ , а если  $A_{\max} \leq 1/2^{r+1}$ , то  $H = 2h$ . Этот критерий смены шага предложен Э. Фельбергом. Для определения шага интегрирования может быть использована также формула Холла

$$H = 0.9h \left( \frac{TOL}{TE_{\max}} \right)^{1/r},$$

позволяющая непрерывно менять шаг интегрирования.  $TE_{\max}$  — максимальная величина из всех  $TE_{yi}$ ; 0.9 — константа, подобранная эмпирически;  $r$  — порядок метода.

Э. Фельберг опубликовал алгоритмы 5 (6)-го и 7 (8)-го порядков для решения уравнений первого порядка, получившие название алгоритмов Рунге–Кутты–Фельберга, и полный набор алгоритмов от 4 (5)-го и до 8 (9)-го порядков для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка. Эти алгоритмы названы Фельбергом алгоритмами Рунге–Кутты–Нистрема (Fehlberg, 1972), так как первые алгоритмы, предназначенные для непосредственного интегрирования уравнений второго порядка, были даны А. Нистремом в 1925 г. Коэффициенты  $a_{ij}, b_i, c_i$  даны Э. Фельбергом в виде рациональных дробей.

Возможность производить оценку точности вычислений на каждом шаге с помощью главного члена ошибки метода является большим достоинством алгоритмов Фельберга. Однако, как отмечает Дж. Бутчер, само вычисление главного члена ошибки метода в алгоритмах Фельберга не для всех задач выполняется одинаково точно, поскольку практически та и другая составные части метода основаны на одной и той же квадратурной формуле. Однако в ряде задач небесной механики алгоритмы Фельберга оказываются достаточно гибкими и дают хорошие результаты.

### 9.3. Неявный одношаговый алгоритм Эверхарта

Рассмотрим основные принципы построения алгоритмов Эверхарта на примере решения уравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (9.6)$$

Пусть шаг интегрирования  $h$ , начальное значения  $y_0$  в начальный момент  $t_0 = 0$  и  $f_0 = f(t_0, y_0)$  — известные величины. Интерполяционный многочлен функции  $f$  по  $t$  в окрестности  $t_0 = 0$  можно представить в виде

$$\frac{dy}{dt} = f = f_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots + A_N t^N. \quad (9.7)$$

Интегрируя уравнение (9.7) по независимой переменной, получим

$$y = y_0 + f_0 t + A_1 t^2 / 2 + \dots + A_N t^{N+1} / (N+1). \quad (9.8)$$

Полином  $N$ -й степени, стоящий в правой части (9.7), не является отрезком ряда Тейлора, поскольку коэффициенты  $A_i$  вычисляются не по известным формулам ряда Тейлора, а определяются из условий наилучшего приближения  $y$  в момент времени  $T = t_0 + h$ .

Выразим коэффициенты  $A_i$  через разделенные разности. Для этого представим функцию  $f$  в виде

$$f = f_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t-t_1) + \alpha_3 t(t-t_1)(t-t_2) + \dots \quad (9.9)$$

В каждый момент времени  $t_i$  имеем

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + \alpha_1 t_1, \\ f_2 &= f_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (9.10)$$

...

отсюда получим разделенные разности

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (f_1 - f_0)/t_1, \\ \alpha_2 &= ((f_2 - f_0)/t_2 - \alpha_1)/(t_2 - t_1), \\ \alpha_3 &= (((f_3 - f_0)/t_3 - \alpha_1)/(t_3 - t_1) - \alpha_2)/(t_3 - t_2), \end{aligned} \quad (9.11)$$

...

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , выразим коэффициенты

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1 + (-t_1)\alpha_2 + (t_2 t_3)\alpha_3 + \dots = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots, \\ A_2 &= \alpha_2 + (-t_1 - t_3)\alpha_3 + \dots = c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + \dots, \\ A_3 &= \alpha_3 + \dots = c_{33}\alpha_3 + c_{43}\alpha_4 + \dots, \end{aligned} \quad (9.12)$$

...

Для коэффициентов  $c_{ij}$  справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, \\ c_{ij} &= -t_{i-1}c_{i-1,1}, \quad i > 1, \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_{i-1}c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (9.6) сводится, прежде всего, к нахождению узлов разбиения  $t_i$  шага  $h$ . Известно (Холл, Уатт, 1979), что за счет выбора разбиения можно повысить порядок точности неявного одношагового метода с  $N+1$  до  $2(N+1)$ , если в качестве значений узлов разбиения  $t_i$ , ( $i=1, \dots, N-1$ ) выбрать корни полинома Лежандра  $N-1$  степени

$$P_{N-1}(2t/T - 1) = 0.$$

Значения  $y$  в моменты времени  $t_i$  определяются формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f_0 t_1 + A_1 t_1^2 / 2 + A_2 t_1^3 / 3 + A_3 t_1^4 / 4 + \dots + A_N t_1^{N+1} / (N+1), \\ y_2 &= y_0 + f_0 t_2 + A_1 t_2^2 / 2 + A_2 t_2^3 / 3 + A_3 t_2^4 / 4 + \dots + A_N t_2^{N+1} / (N+1), \\ y_3 &= y_0 + f_0 t_3 + A_1 t_3^2 / 2 + A_2 t_3^3 / 3 + A_3 t_3^4 / 4 + \dots + A_N t_3^{N+1} / (N+1), \end{aligned} \quad (9.14)$$

...



Эти предсказующие уравнения служат для определения коэффициентов  $A_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), а исправляющее уравнение

$$y(T) = y_0 + f_0 T + A_1 T^2 / 2 + A_2 T^3 / 3 + A_3 T^4 / 4 + \dots + A_N T^{N+1} / (N+1) \quad (9.15)$$

дает значение решения на конце шага  $h$ . Очевидно, формулы (9.14) представляют собой неявные уравнения относительно  $y_i$ , поэтому они решаются итерационным способом.

В алгоритмах Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в разложении решения (9.15). Пусть  $L$  — контрольный параметр такой, что  $TOL = 10^{-L}$  есть требуемая точность вычислений. Тогда новый шаг интегрирования  $T^*$  определяется формулой

$$T^* = T \left( \frac{N+1}{T} \frac{TOL}{|A_N|} \right)^{\frac{1}{N+1}}.$$

Эффективность процесса численного интегрирования во многом зависит от того, насколько удачно осуществлен выбор начального шага. Для уравнений в нормализованном виде Э. Эверхартом в качестве такого шага предложена некоторая величина, полученная путем экспериментальных расчетов. Для метода интегрирования порядка  $p$  она задается формулой

$$T_0 = \left( \frac{p}{11} \right) 0.5^{0.4L}.$$

Оптимальное значение параметра  $L$  определяется опытным путем в зависимости от типа интегрируемых дифференциальных уравнений. Если же  $L$  слишком мало, шаг может оказаться слишком большим и это ухудшит сходимость, а также точность метода. Если же  $L$ , наоборот, слишком велико, интегрирование будет выполняться точно, но метод будет неэффективен по затратам машинного времени.

## 9.4. Экстраполяционные алгоритмы

### 9.4.1. Экстраполяционные схемы Невилла и Штера

Пусть  $D(h)$  есть дискретная аппроксимация решения  $D(0)$ , определенная для шага  $h \in H = [0, T]$ , причем  $h$  достаточно мало. В том случае, если  $D(h)$  имеет асимптотическое разложение

$$D(h) = l_0 + l_1 h^2 + l_2 h^4 + \dots, \quad (9.16)$$

Л. Ричардсон (Richardson, 1910) предложил получать улучшенную аппроксимацию из двух или более значений  $D(h)$ , определенных в  $h_0 > h_1 > \dots > h_n$ , требуя, чтобы линейная комбинация  $D(h_m)$

$$P_0^n = \sum_{m=0}^n C_m^{(n)} D(h_m) \quad (9.17)$$

удовлетворяла условию

$$P_0^n = D(0) + O(T^{2n+2}), \quad (9.18)$$

в то время как  $h_0 \rightarrow 0$ .

Такую процедуру построения улучшенной аппроксимации принято называть экстраполяцией, поскольку она используется на каждом шаге интегрирования. Существенно, что константы  $C_m^{(m)}$  вычислять не нужно. При экстраполяции полиномами  $P_0^n$  может быть найдено непосредственно по рекуррентному алгоритму Невилла, а при экстраполяции рациональными функциями для этой цели может быть использован алгоритм Штера.

Пусть  $P_n^m(h^2)$  есть полином степени  $m$  относительно  $h^2$ , который интерполирует  $D(h)$  в точках  $h = h_k, k = n, \dots, n + m$ . Тогда  $P_n^m$  может быть найдено с помощью следующей линейной рекуррентной схемы:

$$P_0^n = D(h_0), \quad P_n^m = P_{n+1}^m m - 1 + \frac{P_{n+1}^m m - 1 P_n^m m - 1}{(h_n / h_{n+m})^2 - 1} \tag{9.19}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{cccc}
 & & & P_0^0 \\
 & & & P_0^1 \\
 & & P_1^0 & P_0^2 \\
 & & P_1^1 & P_0^3 \\
 P_2^0 & & P_1^2 & \\
 & & P_2^1 & \dots \quad \dots \\
 P_3^0 & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \tag{9.20}$$

Как показано Ф. Бауэром, Х. Рутишаузером и Е. Штифелем (Bauer et al., 1963), эта последовательность преобразований сходится в  $P_0^n$ . Основную вычислительную трудность составляет определение первого столбца диаграммы  $P_0^n$ .

Пусть далее  $r_n^m = r_n^{(\mu\nu)} h^2$  есть рациональная функция, числитель которой есть полином степени  $\mu$ , а знаменатель — полином степени  $\nu$ ,  $m = \mu + \nu$ . Функция  $r_n^m$  интерполирует  $D(h)$  в точках  $h = h_k, k = n, n + 1, \dots, n + m$ . Алгоритм Штера для последовательности  $\mu\nu = (0,0), (0,1), (1,1), (1,2), \dots$  дает следующую рекурсивную схему построения функций  $r_n^m$ :

$$\begin{aligned}
 r_n^{-1} &= 0, \quad r_n^0 = D(h_n), \\
 r_n^m &= r_{n+1}^{m-1} + \frac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-1}}{\left(\frac{h_n}{h_{m+n}}\right)^2 \left[1 - \frac{r_{n+1}^{m-1} - r_n^{m-2}}{r_{n+1}^{m-1} - r_{n+1}^{m-2}}\right] - 1}
 \end{aligned} \tag{9.21}$$

с диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 r_n^{m-2} & & \\
 & r_n^{m-1} & \square \\
 r_{n+1}^{m-2} & \rightarrow & r_n^m \\
 & r_{n+1}^{m-1} & \square \\
 r_{n+2}^{m-2} & & 
 \end{array} \quad (9.22)$$

Исследование сходимости последовательности функций  $r_n^m$  выполнено В. Греггом (Gragg, 1965).

#### 9.4.2. Метод Булирша и Штера

Для того чтобы применить локальную экстраполяцию к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0,$$

необходимо выбрать в качестве основы интегрирования численный метод, для которого существует асимптотическое разложение вида (9.16). В методе рациональной экстраполяции Булирша и Штера для этой цели используется модифицированный метод прямоугольников:

$$\eta_0 = y_0, \quad \eta_1 = \eta_0 + \frac{h_k}{2} f(t_0, \eta_0).$$

Для  $i = 1, 2, \dots, 2n - 1$

$$\begin{aligned}
 \eta_{i+1} &= \eta_{i-1} + h_k f(t, \eta_i), \\
 \eta(h, t) &= \frac{1}{2} [\eta(t_{2n}, h_k) + \eta(t_{2n-1}, h_k) + hf(t, \eta_{2n})],
 \end{aligned} \quad (9.23)$$

где  $h_k = H/n_k$ , а  $H = t - t_0$  — основной шаг интегрирования;  $n_k$  — натуральное число;  $t_i = t_0 + ih_k/2$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда дискретная аппроксимация решения  $D(h_k, t)$  определится следующим образом:

$$D(h_k, t) = \eta\left(\frac{h_k}{2}, t\right). \quad (9.24)$$

Авторы метода рекомендуют выбирать в качестве  $h_k$  следующую последовательность чисел:

$$F = \left\{ H, \frac{H}{2}, \frac{H}{3}, \frac{H}{4}, \frac{H}{6}, \frac{H}{8}, \frac{H}{12}, \dots \right\}. \quad (9.25)$$

#### 9.4.3. Выбор шага интегрирования

Экстраполяционные методы позволяют варьировать одновременно порядок метода, длину основного шага интегрирования и количество этапов вычислений на каждом шаге. Одинаковой точности вычислений можно добиться, лишь увеличивая порядок метода, либо увеличивая число этапов вычислений на шаге, либо уменьшая длину шага интегрирования. Однако при практическом использовании метода следует учитывать, что влияние ошибки округления растет с

увеличением порядка экстраполяции. Поэтому во всех реализованных на ЭВМ версиях алгоритма, начиная с первой программы Булирша и Штера, порядок метода не превосходит шести. Авторами алгоритма предложены два способа выбора шага интегрирования (Bulirsch, Stoer; 1966; Stoer, 1974).

Первый способ, довольно грубый, но весьма простой и удобный для практической реализации, состоит в следующем. Пусть необходимая точность вычислений достигается при порядке экстраполяции  $m < 6$ , т.е. при  $m < 6$  и  $1 \leq k \leq m$ , выполняется неравенство

$$(1/s) |r_k^{m-k} - r_k^{m-k-1}| < \varepsilon, \quad (9.26)$$

где  $\varepsilon$  — заданная точность вычислений;  $s = \max_{t \in [0, T]} |y(t)|$ , тогда длина основного шага интегрирования  $H$  увеличивается и новый шаг  $\tilde{H}$  вычисляется по формуле

$$\tilde{H} = 1.5H. \quad (9.27)$$

Если, напротив, требуемая точность не достигается после девяти этапов, т.е.

$$(1/s) |r_4^6 - r_3^6| < \varepsilon, \quad (9.28)$$

то шаг уменьшается и длина его определяется по формуле

$$\tilde{H} = 0.9(0.6)^{m-6} H. \quad (9.29)$$

Во втором способе выбора шага максимальный порядок экстраполяции не задается, а вычисляется по формуле

$$l = l(\varepsilon) \approx [(m + 2.5) / 2], \quad (9.30)$$

если  $\varepsilon = 10^{-m}$ , где символ  $[ ]$  означает целую часть числа;  $m$  — требуемое число значащих цифр. Новый шаг  $\tilde{H}$  определяется формулой

$$H = \frac{\tilde{H}}{u}. \quad (9.31)$$

Корректирующий множитель  $u$  задается группой соотношений

$$u \approx \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \sqrt[2j+1]{\left| \frac{r_j^{j-1} - r_{j-1}^{j-1}}{s} \right|} \Phi_{j-1, j-1}, & \text{если } j \leq l, \\ \frac{1}{\alpha} \sqrt[2l+3]{\left| \frac{r_j^l - r_{j-1}^l}{s} \right|} \Phi_{j-l, l}, & \text{если } j > l, \end{cases} \quad (9.32)$$

где

$$\Phi_{jl} = (n_j n_{j-1} \dots n_{j-l})^2, \quad \alpha = \sqrt[2l+3]{\varepsilon \Phi_{ll}},$$

$$\Phi_{ll} = n_0^2 \cdot n_1^2 \cdot \dots \cdot n_j^2, \quad n_j = H / h_j.$$

Далее проверяется условие, является ли последний член  $r_j^m$ ,  $m = \min(jl)$  достаточно точным, т.е. имеет ли место соотношение

$$\left| \frac{r_j^j - r_j^{j-1}}{s} \right| \cdot \frac{1}{(n_j^2 - 2)} \leq \varepsilon, \quad \text{если } j \leq l,$$

или

$$\left| \frac{r_{j-1}^l - r_{j-1-l}^l}{s} \right| \cdot \frac{n_{j-1-l}^2}{n_j^2} \leq \varepsilon, \quad \text{если } j > l.$$

Если  $u \leq 1$  и элемент  $r_j^m$  достаточно точен, решение полагается равным  $r_j^m$ ,  $y = r_j^m$  и новый шаг интегрирования выбирается равным  $\tilde{H} = H/u$ . Если  $u > 1$ , вычисляется новый индекс  $i_0(u)$ , которым следует ограничить вычисление начального столбца таблицы  $r_j^m$ :

$$i_0(u) = \begin{cases} l+1, & \text{если } 1 \leq u \leq 1.063, \\ l+2 + [3.14 \cdot \ln u - 1.19], & \text{если } u > 1.063. \end{cases} \quad (9.33)$$

Если при этом количество перевычислений  $A_j$  функций  $f$  удовлетворяет соотношению

$$A_j + uA_l < A_{i_0(u)}, \quad (9.34)$$

то шаг уменьшается:  $\tilde{H} = H/u$ . В противном случае индекс  $j$  полагается равным  $j+1$  и происходит простое расширение таблицы  $r_j^m$ .

## 9.5. Многошаговые методы

### 9.5.1. Принципы построения

Линейные многошаговые методы являются традиционным математическим аппаратом численного решения уравнений движения небесных тел, как естественных, так и искусственных. Более того, первые многошаговые методы были разработаны Адамсом и Коуэллом для решения задач небесной механики. Изложение многошаговых методов можно найти практически во всех учебниках, касающихся численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (см, например, Бахвалов, 1973), а также в некоторых учебниках и статьях по небесной механике (Субботин, 1937; Чеботарев, 1965; Куликов, 1960; Oesterwintwer, Cohen, 1969). Детальное изложение теории многошаговых методов можно найти в (Хайрер и др., 1990). Поэтому в настоящем учебнике мы остановимся лишь на принципах построения разностных формул и приведем получивший распространение в задачах небесной механики алгоритм Адамса–Мультона–Коуэлла. Формулы для вычисления коэффициентов этого метода были получены Ш. Коеном и Е. Хаббардом и приведены в работе (Oesterwintwer, Cohen, 1969) и монографии (Бордовицына, 1984).

Одношаговые методы, как мы видели ранее, для получения значения в  $u$  в  $(n+1)$ -ой точке требуют знания значения  $y$  в  $n$ -й точке, все же остальные значения для вычисления  $y_{n+1}$  не используются. В многошаговых методах, наоборот, для вычисления  $y_{n+1}$  используются некоторые предварительно определенные значения  $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$

Проинтегрируем уравнение

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (9.35)$$

в пределах от  $t$  до  $t+h$  и получим тождество

$$y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (9.36)$$

Заменим далее  $f(\tau, y(\tau))$  каким-либо интерполяционным полиномом  $P(\tau)$ , принимающим значения  $f(t_n, y_n)$  на множестве точек  $t_n$ , для которых  $y_n$  уже известны. Выбор в качестве  $P(\tau)$  интерполяционной формулы Ньютона с разностями назад определит группу методов Адамса.

При  $t = t_n$  мы получим формулу метода Адамса–Башфорта в виде

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{r=0}^k \gamma_r^* \Delta^r f_n \quad (9.37)$$

или в форме Лагранжа

$$y_{n+1} - y_n = h \sum_{r=0}^k a_r^* f_{n-r}. \quad (9.38)$$

Причем  $\Delta^r f_n$  —  $r$ -я разность функции  $f$ , а  $f_{n-r}$  — значение функции в точке  $t_{n-r}$ .

Полагая  $t = t_{n-1}$ , будем иметь формулу Адамса–Мульттона в виде

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{r=0}^k \gamma_r \Delta^r f_n \quad (9.39)$$

или в форме Лагранжа

$$y_n - y_{n-1} = h \sum_{r=0}^k a_r f_{n-r}. \quad (9.40)$$

При выборе в качестве  $P(\tau)$  интерполяционной формулы Стирлинга получим метод Коуэлла. В существующем виде этот метод используется для решения уравнений второго порядка без сведения их к уравнениям первого порядка и определяется формулой

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + h \sum_{r=0}^n c_r f_r. \quad (9.41)$$

Общую формулу многошаговых методов можно принять следующей:

$$\sum_{r=0}^k \beta_r y_{n+r} = h \sum_{r=0}^k \alpha_r f_{n+r}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.42)$$

где  $\alpha_r, \beta_r$  — постоянные, причем  $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ .

Если  $\alpha_k = 0$ , многошаговый метод называется явным. Если же  $\alpha_k \neq 0$ , правая часть формулы (9.42) содержит  $f(t_{n+k}, y_{n+k})$  и формула представляет собой нелинейное уравнение относительно  $y_{n+k}$ . В этом случае метод называется неявным многошаговым. Для одних и тех же  $k$  неявный метод является более точным, чем явный, поскольку обладает более высокой устойчивостью к малым

возмущениям  $y_n$ . Поэтому на практике используются, как правило, неявные многошаговые методы. Нелинейное уравнение (9.40) удобно переписать в виде

$$y_{n+k} = \frac{h\alpha_k}{\beta_k} f(t_{n+k}, y_{n+k}) + g_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.43)$$

причем  $g_n$  содержит известные величины  $y_{n+r}, f_{n+r}, r = 0, 1, 2, \dots, k-1$ . Существование и единственность решения  $y_{n+k}$  уравнения (9.41) для известных многошаговых методов доказана П. Хенричи (Henrici, 1962).

Коэффициенты  $\gamma_r, \gamma_r^*, a_r, a_r^*$  для формул (9.37)–(9.40) до  $r = 8$  можно найти в книге (Хайер и др., 1990). Коэффициенты основных разностных формул до 12-го порядка можно найти в книге (Штифель, Шейфеле, 1975), коэффициенты методов Адамса–Мульттона–Коуэлла до 16-го порядка — в работе (Oesterwinter, Cohen, 1969) и монографии (Бордовицына, 1984).

Начальное приближение определяется обычно с помощью явной многошаговой формулы. В этом случае явный метод называется предсказующим, а неявный — исправляющим, а весь процесс отыскания решения  $y_{n+k}$  называется методом предсказания и коррекции. Для применения многошаговой формулы на каждом  $k$ -м шаге интегрирования необходимо иметь так называемую таблицу интегрирования, которая для метода Адамса–Мульттона состоит из величин

$$y_{n-1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k}, \quad (9.44)$$

а для метода Коуэлла имеет вид

$$y_{n-1}, y_{n-1}, f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots, f_{n-k}, \quad (9.45)$$

где  $k$  — порядок аппроксимирующей формулы.

Вычисление таблиц функций (9.44), (9.45) в начале интегрирования производится, как правило, с помощью какого-либо одношагового метода, однако существуют и самостартующие многошаговые методы. К таким методам относится самостартующий алгоритм метода Коуэлла, развитый Д.К. Куликовым (1960).

Возможны два способа организации методов предсказания и коррекции. В первом способе итерации проводятся до тех пор, пока сходимость не будет достигнута. При этом можно либо фиксировать шаг, оставляя число итерации произвольным, либо фиксировать число итераций, оставляя произвольной величину шага. Такой метод принято называть исправлением до сходимости. Поскольку в многошаговом методе любое изменение шага приводит к перевычислению начальной таблицы интегрирования, то с практической точки зрения гораздо более удобно фиксировать шаг, оставляя число итерации произвольным.

Во втором способе число применений исправляющей формулы фиксировано. Различные схемы вычисления, которые в этом случае могут быть использованы, в обозначениях Холла и Кримера записываются следующим образом:

$$PECE, PEC, P(EC)^m E, P(EC)^m.$$

Здесь  $P$  означает однократное применение предсказующей формулы;  $C$  — однократное применение исправляющей формулы;  $E$  — вычисление функции  $f$ ;  $m$  — число итераций.

### 9.5.2. Алгоритм Адамса–Мульттона–Коуэлла

Перейдем к описанию метода Адамса–Мульттона–Коуэлла, нашедшего широкое применение в исследовании движения больших планет и спутниковой геодезии. Метод предназначен для интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(t, y), \quad y_0 = y(t_0), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0) \quad (9.46)$$

без сведения их к уравнениям первого порядка.

Для построения метода используются формулы (9.40) и (9.41). Коэффициенты  $a_j, c_j$  приведены в табл. 9.1, причем  $D$  — общий делитель, на который должны быть разделены все числа в таблице.

Таблица 9.1. Коэффициенты методов Адамса и Коуэлла

$j$	$a_j$	$c_j$
0	32011868528640000	32011868528640000
1	– 16005934246320000	– 32011868528640000
2	– 2667655710720000	2667655710720000
3	– 1333827855360000	0
4	– 844757641728000	– 133382785536000
5	– 600222534912000	– 133382785536000
6	– 456783110784000	– 116974585728000
7	– 363891528000000	– 100566385920000
8	– 299520219398400	– 86707632211200
9	– 252655401398400	– 75398324601600
10	– 217227737563200	– 66193573118400
11	– 189640115028000	– 58548487788800
12	– 167636336098320	– 52401453198480
13	– 149735464049160	– 47174128491600
14	– 134928496929540	– 42755108505900
15	– 122506205369730	– 38983584907800
16	– 111956703448001	– 35736323456205
$D = 32011868528640000$		

Алгоритм начинается вычислением вспомогательных коэффициентов с использованием коэффициентов Адамса и Коуэлла, приведенных в табл. 9.1, по формулам



$$\gamma'_j = \sum_{i=0}^{[j+1,b]} (-1)^i \binom{b}{i} (a_{j+1-i} - c_{j+1-i}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, a+b,$$

где  $[j+1, b]$  есть наименьшее из  $j+1$  и  $b$ ,

$$\begin{aligned} \gamma_j &= (-1)^i \sum_{j=i}^{a+b} \binom{j}{i} \gamma'_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, a+b, \\ b_j &= (-1)^j \binom{a+b+1}{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, a+b, \\ \alpha_j^* &= (-1)^j \sum_{i=j}^c \binom{i}{j} c_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, c, \\ \beta_j^* &= (-1)^j \sum_{i=j}^c \binom{i}{j} a_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, c, \\ c'_i &= \sum_{j=0}^i c_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ \alpha'_j &= (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{j}{i} c'_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \\ a'_i &= \sum_{j=0}^i a_j, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m, \\ \beta'_j &= (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} a'_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \\ \alpha_j &= (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{j}{i} c_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \\ \beta_j &= (-1)^j \sum_{i=j}^m \binom{i}{j} a_i, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Здесь  $c$  и  $m$  — порядки начальной и основной аппроксимирующих формул метода соответственно; скобками внутри сумм обозначены биномиальные коэффициенты; параметры  $a$  и  $b$  связаны с аппроксимирующей формулой, предназначенной для вычисления величины

$$y_{-1} = y_0 - h\dot{y}_0 + h^2 \sum_{j=0}^{a+b} \gamma_j f_{b-i}. \quad (9.47)$$

Неизвестные ускорения, входящие в формулу (9.47), полагаются равными его начальному значению в интервале от  $a$  до  $b$ . Числа  $a$  и  $b$  не могут превосходить  $c$ . Вне интервала  $(a, b)$  неизвестные ускорения вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} f_{-n} &= \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{-n+1+j}, \quad n = a+1, a+2, \dots, c, \\ f_n &= \sum_{j=0}^{a+b} b_j f_{n-1-j}, \quad n = b+1, b+2, \dots, c. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Положения и скорости в интервале от  $a$  до  $b$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* f_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots, b, \\ y_{n-1} &= 2y_{-n-1} - y_{-n-2} + h^2 \sum_{j=0}^c \alpha_j^* f_{-n+j}, \quad n = 1, 2, \dots, a, \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^c \beta_j^* f_{n-j}, \quad n = 1, 2, \dots, b, \\ \dot{y}_{-n} &= \dot{y}_{-n+1} - h \sum_{j=0}^c \beta_j^* f_{-n+j}, \quad n = 1, 2, \dots, a. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Совокупность формул (9.47)–(9.50) позволяет вычислить начальную таблицу интегрирования. Обычно это делается путем последовательных приближений.

Далее для вычисления  $y_n$  и  $\dot{y}_n$  используются формулы предсказания

$$\begin{aligned} y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha'_j f_{n-1-j}, \\ \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^m \beta'_j f_{n-1-j} \end{aligned}$$

и коррекции

$$\begin{aligned} y_n &= 2y_{n-1} - y_{n-2} + h^2 \sum_{j=0}^m \alpha_j f_{n-j}, \\ \dot{y}_n &= \dot{y}_{n-1} + h \sum_{j=0}^m \beta_j f_{n-j}. \end{aligned}$$

Величины параметров  $m$  и  $c$  подбираются эмпирическим путем, исходя из особенностей задачи.

## 9.6. Сравнительная характеристика методов

Дадим краткую сравнительную характеристику по точности и быстродействию представленных здесь численных алгоритмов. Более подробное изложение результатов исследования эффективности численных алгоритмов можно найти в книгах (Бордовицына, 1984) и (Бордовицына и др., 1991).

Анализ результатов многочисленных исследований по сопоставлению эффективности представленных здесь численных методов в различных задачах динамики небесных тел, как естественных, так и искусственных, позволяет сделать следующие выводы:

- при соответствующем выборе системы уравнений, порядка метода, шага интегрирования и длины разрядной сетки ЭВМ высокой точности вычисления орбит можно достичь любым из изложенных в настоящем разделе методов;
- однако с учетом быстродействия наиболее эффективным практически во всех задачах небесной механики следует считать метод Эверхарта, на

втором месте окажутся метод Булирша–Штера и метод Адамса–Мультон–Коулла, а на третьем — алгоритмы Рунге–Кутты–Фельберга.

## 10. МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ

Движение небесных тел можно исследовать в самой разнообразной формализации. В численном моделировании орбит она представляет собой систему дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно формализовано орбитальное движение, поскольку от этого непосредственно зависят точность и быстродействие численного интегрирования.

Классические уравнения орбитального движения в прямоугольных координатах относительно массивного центрального тела можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{P}.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор положения;  $t$  — время;  $\mu$  — гравитационный параметр центрального тела;  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{P}$  — центральная и возмущающая силы. Причем будем полагать, что  $|\mathbf{P}| \ll |\mathbf{F}|$ .

Численное интегрирование уравнений движения связано со следующими трудностями. Правые части уравнений представляют собой быстроизменяющиеся функции, которые необходимо интегрировать с малым шагом. Это приводит к увеличению объема вычислений, что, в свою очередь, сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Данная трудность усугубляется наличием в уравнениях движения особенности при  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , что в случае сильновытянутых орбит становится причиной эксцентричного поведения правых частей. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс.

В данной главе мы фокусируем свое внимание на известных методах формализованного представления орбитального движения, которые устраняют названные выше трудности. Эти методы будем называть методами теории специальных возмущений<sup>4</sup>. Получение с их помощью качественно новых уравнений, как правило, основывается на некоторой априорной информации об исследуемом орбитальном движении. Мы излагаем принципы тех методов, которые основаны на решении задачи двух тел в предположении, что исследуемая орбита близка к кеплеровской. В частности, мы рассмотрим методы регуляризации, метод вариации координат (Энке) и постоянных (Лагранжа), а также численную стабилизацию Баумгарта.

### 10.1. Стабилизация уравнений орбитального движения

Как уже отмечалось, ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений создает при численном интегрировании благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем

<sup>4</sup> В зарубежной литературе под методами специальных возмущений понимают численные методы (Рой, 1981; Херрик, 1977).

усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому устойчивые уравнения для численного интегрирования более предпочтительны.

Задача стабилизации заключается как раз в том, чтобы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на численное решение и улучшить таким образом поведение неустраняемых ошибок интегрирования.

Родоначальниками стабилизации в небесной механике бесспорно можно считать Й. Баумгарта (Baumgarte, 1973) и П. Накози (Nacozy, 1971). Их стабилизирующие методы основаны на применении известных интегралов, которые содержат дополнительную информацию о решении и рассматриваются как необходимые условия, предъявляемые к решению.

Технически стабилизация достигается путем исправления численного (ошибочного) решения за его отклонение от интегральной поверхности в фазовом пространстве интегрируемых переменных. В возмущенной задаче, когда интегральная поверхность динамична, а ее интегральный параметр становится переменным, для оценки отклонений решения используются те же интегральные соотношения, однако система уравнений дополняется уравнением для интегрального параметра, которое интегрируется численно совместно со всей системой (Baumgarte, 1973), (Бордовицына, Сухоплюева, 1980).

Стабилизация применяется как непосредственно к самому решению в процессе интегрирования (Nacozy, 1971), так и посредством введения дополнительных так называемых стабилизирующих членов в дифференциальные уравнения (Baumgarte, 1973). Очевидно, в этом случае стабилизация тем эффективнее, чем слабее возмущения и чем медленнее меняются параметры опорных интегральных поверхностей.

Из всех интегральных соотношений авторы стабилизирующих методов выделяют энергетические, поскольку, как показывает практика, именно стабилизация по энергии является наилучшим подспорьем в борьбе с ляпуновской неустойчивостью.

### 10.1.1. Неустойчивость кеплеровского движения

Рассмотрим две кеплеровские орбиты  $\mathbf{x}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$ , которые отличаются друг от друга в некоторый начальный момент времени  $t_0$  на малые векторные величины

$$\Delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0 \text{ и } \Delta \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0.$$

Из формул задачи двух тел нетрудно показать, что с точностью до малых первого порядка отклонение  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$  будут удовлетворять оценке

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{3}{2} \frac{\Delta H_K}{H_K} \dot{\mathbf{x}} \Delta t. \quad (10.1)$$

Здесь  $H_K = \text{const}$  — кеплеровская энергия, которая является интегралом орбиты  $\mathbf{x}$  (для определенности);  $\Delta H_K = H_K - \tilde{H}_K = \text{const}$  — разность кеплеровских энергий;  $\Delta t = t - t_0$ .

Если теперь одно из двух решений рассматривать как точное, скажем опорное  $\tilde{\mathbf{x}}$ , а другое, смежное  $\mathbf{x}$ , — как ошибочное, обусловленное ошибкой

$\Delta x_0$  в начальный момент времени, то формулу (10.1) можно использовать как оценку ошибки  $\Delta x$  ошибочного решения на любой другой момент времени.

Оценка (10.1) показывает, что эволюция  $\Delta x$  носит периодически вековой характер: в целом ошибка растет по величине со временем  $t$ , то локально увеличиваясь к перицентру, когда скорость и ускорение возрастают, то локально уменьшаясь к апоцентру, когда скорость и ускорение убывают. Также видно, что средняя скорость роста  $\Delta x$  явно зависит от относительной ошибки в среднем движении: чем меньше  $\Delta H_K / H_K$ , тем ниже скорость  $\Delta x$ . Однако какой бы малой ни была  $\Delta H_K$ , всегда наступит такой момент времени, когда  $\Delta x$  станет недопустимо большой. Собственно говоря, так обнаруживает себя ляпуновская неустойчивость.

Когда кеплеровская орбита интегрируется численно, ошибки, подобные  $\Delta x_0$  и  $\Delta \dot{x}_0$ , возникают на каждом шаге интегрирования. Они, в свою очередь, отклоняют вычисляемую орбиту от интегральной поверхности, задаваемой энергией  $\Delta H_K$  в фазовом пространстве координат и их производных. Это отклонение проявляет себя главным образом как линейный рост  $\Delta H_K$ , но в соответствии с (10.1) это приводит к квадратичному росту  $\Delta x$ .

Таким образом, для того чтобы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на точность численного решения, необходимо тем или иным способом в процессе интегрирования производить искусственную коррекцию вычисляемых переменных, которая бы укладывала ошибочное решение на интегральную поверхность  $H_K = H_K(x, \dot{x})$  и тем самым бы уменьшала  $\Delta H_K$ . В этом и состоит задача стабилизации.

### 10.1.2. Метод Баумгарта

Простой, но мощный метод стабилизации был предложен Й. Баумгартом (Baumgarte, 1973). Метод Баумгарта основан на идее искусственного введения в дифференциальные уравнения движения так называемых стабилизирующих (возмущающих) членов, компенсирующих отклонения численного (ошибочного) решения от некоторой опорной интегральной поверхности (точного решения). Практическое применение метода Баумгарта довольно широко и не ограничивается только задачами динамики. Рассмотрим метод на примере систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть система уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) \quad (10.2)$$

имеет интеграл

$$C(\mathbf{q}) = \text{const}, \quad (10.3)$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор интегрируемых переменных;  $t$  — независимая переменная;  $\mathbf{Q}$  — известная вектор-функция  $\mathbf{q}$  и  $t$ .

Будем стабилизировать систему (10.2) по опорной интегральной поверхности, задаваемой уравнением

$$C(\mathbf{q}) = C^{\sim}, \quad (10.4)$$

причем  $C(\mathbf{q}^{\sim}) \equiv C^{\sim}$  для точного решения  $\mathbf{q}^{\sim}$ .

Следуя Баумгарту, систему (10.2) после введения стабилизирующих членов можно переписать в виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-2}, \quad \Delta C = C(\mathbf{q}) - C^{\sim}. \quad (10.5)$$

Здесь  $\gamma \neq 0$  — так называемый стабилизирующий параметр, который выбирается опытным путем.

Полученные уравнения (10.5) особенны тем, что они асимптотически устойчивы по  $C$ , т.е.  $\Delta C \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  для любых  $\mathbf{q}$ . Иначе говоря, при любых ошибках интегрирования дифференциального уравнения (10.5) его решение  $\mathbf{q}$  будет всегда стремиться «лечь» на интегральную поверхность (10.4).

Использование интегралов в качестве дополнительной информации о численном решении иногда позволяет существенно ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на ошибки численного интегрирования. Однако в большинстве случаев применение интегральной стабилизации не эффективно, поскольку, очевидно, не все интегралы, даже если они имеются, хороши для стабилизации как средства борьбы с ляпуновской неустойчивостью, и это обстоятельство значительно ограничивает область применения интегральной стабилизации.

Тем не менее в небесной механике интегральная стабилизация надежно зарекомендовала себя как великолепное подспорье для решения многих прикладных задач, в том числе и спутниковых.

Пусть теперь система уравнений (10.2) возмущается некоторой функцией  $\mathbf{P}$ :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{q}, t). \quad (10.6)$$

В возмущенном случае опорное значение  $C^{\sim}$  интегральной функции становится переменной и, как нетрудно показать, ее поведение будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{dC^{\sim}}{dt} = \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{P} \right). \quad (10.7)$$

Как и в невозмущенном случае, введем в систему (10.2) те же стабилизирующие члены, поскольку здесь они также будут удовлетворять условию асимптотической устойчивости по  $C$ .

Так как для вычисления стабилизирующих членов используется переменная  $C^{\sim}$ , стабилизация в этом случае предполагает включение уравнения (10.7) в возмущенную систему.

В результате стабилизированная система в возмущенном случае примет вид

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{q}}{dt} &= \mathbf{Q} + \mathbf{P} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-2}, \\ \frac{dC^\sim}{dt} &= \left( \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}}, \mathbf{P} \right), \quad \Delta C = C(\mathbf{q}) - C^\sim.\end{aligned}\tag{10.8}$$

С аналитической точки зрения при  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\sim$  стабилизированная система (10.8) эквивалентна системе (10.6), так как  $\Delta C = 0$ . Однако, в отличие от последней, первая асимптотически устойчива по  $C$ . Это свойство дифференциальных уравнений весьма ценно при численном интегрировании, поскольку оно позволяет удерживать насаждаемое всевозможными ошибками численное решение около интегральной поверхности, учитывая при этом топологические свойства точного решения. Тогда как численное интегрирование нестабилизированных уравнений сопровождается дрейфом ошибки от интегральной поверхности.

Говоря о начальных условиях стабилизированной системы, следует заметить только, что стартовое значение переменной  $C^\sim$  задается по начальным значениям переменных  $\mathbf{q}$ :  $C_0^\sim = C^\sim(\mathbf{q}_0)$ .

Несмотря на то, что после стабилизации уравнения становятся сложнее и требуют больше вычислительного времени, они могут значительно повысить оперативность интегрирования за счет своих замечательных свойств, так как стабилизация позволяет увеличить шаг интегрирования, сохраняя при этом точность численного решения.

### 10.1.3. Возмущенная задача двух тел

Рассмотрим стабилизацию Баумгарта на примере задачи двух тел, уравнения которой можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}.\tag{10.9}$$

В данном случае выберем энергию в качестве интеграла, по которому будем выполнять стабилизацию:

$$H_K = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}.\tag{10.10}$$

Следуя Баумгарту, получим стабилизированную по энергии систему

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \dot{\mathbf{x}} - \gamma \Delta H_K \frac{\ddot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2}, \\ \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} &= \ddot{\mathbf{x}} - \gamma \Delta H_K \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2},\end{aligned}\tag{10.11}$$

где  $\Delta H_K = H_K(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - H_K^\sim$  — отклонение энергии, вычисляемой по формуле (10.10), от опорной  $H_K^\sim = \text{const}$ , а

$$\ddot{\mathbf{x}} \equiv -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}.$$



Впрочем, сам Баумгарт изначально получил другие стабилизированные уравнения, на наш взгляд, более эстетичного вида. В качестве исходных он взял уравнения задачи, записанные в виде системы уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}, \quad (10.12)$$

к которым и применил свою стабилизацию, изначально разработанную им как раз для подобного рода систем. В итоге он получил следующие стабилизированные по энергии уравнения:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} - \gamma \Delta H_K \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2}. \quad (10.13)$$

В возмущенной задаче двух тел уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (10.14)$$

где  $U = U(\mathbf{x})$  — потенциальная функция консервативных возмущающих сил;  $\mathbf{P}$  — неконсервативные силы, а в качестве интеграла примем полную энергию

$$H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U, \quad (10.15)$$

которая является интегралом системы в консервативной задаче.

После стабилизации уравнения возмущенной задачи (10.14) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \dot{\mathbf{x}} - \gamma \Delta H \frac{\ddot{\mathbf{x}}_U}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}_U^2}, \\ \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} &= \ddot{\mathbf{x}}_U + \mathbf{P} - \gamma \Delta H \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}_U^2}, \\ \frac{dH^\sim}{dt} &= (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}), \\ \Delta H &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U - H^\sim, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где

$$\ddot{\mathbf{x}}_U \equiv -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}.$$

Так же как и в невозмущенном случае, стабилизация применительно к системе уравнений второго порядка дает более компактные уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} &= -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} - \gamma \Delta H \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \\ \frac{dH^\sim}{dt} &= (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}), \\ \Delta H &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} + U - H^\sim.\end{aligned}\tag{10.17}$$

Безусловно, утверждение о ляпуновской устойчивости стабилизированной системы (10.16) весьма сомнительно. Это, вообще говоря, нужно доказывать. Но даже если после стабилизации система не становится устойчивой, то, по крайней мере, можно полагать, что при слабых возмущениях «остаточная» неустойчивость будет мала в сравнении с устраняемой неустойчивостью. Очевидно, что эффективность применения стабилизированной системы тем выше, чем слабее влияние неконсервативных сил  $\mathbf{P}$ .

Говоря о численных аспектах в применении стабилизированных уравнений на практике, необходимо отметить следующее. В уравнения движения искусственно вводятся возмущающие (стабилизирующие) члены, которые, очевидно, не рассматриваются в физической постановке задачи. В связи с этим встает вопрос об адекватности решения системы (10.16) реальному орбитальному движению, описываемому системой (10.14).

С вычислительной точки зрения, строго говоря, ни одна из систем не описывает адекватно реальное движение, так как их численное интегрирование сопровождается численными ошибками. В этом случае уместно говорить о степени неадекватности систем, сравнивая их решения с точным аналитическим.

Как показывает практика, численное интегрирование стабилизированной системы (10.16) обеспечивает устойчивое (невозрастающее) поведение ошибки в энергии и линейное в координатах, тогда как интегрирование соответствующей неустойчивой системы (10.14) приводит к линейному росту ошибки в энергии и квадратичному (суперлинейному) в координатах. Эти результаты согласуются с оценками (10.1).

Следует заметить, что поскольку стабилизация выполняется по энергии, то она обеспечивает сохранение только тех переменных, которые непосредственно связаны с энергией, таких как большая полуось, среднее движение или орбитальный период. В то же время введение в уравнения движения стабилизирующих возмущающих сил влечет дополнительные численные ошибки в других орбитальных элементах, которые, однако, не приводят к вековым ошибкам в координатах и их производных. Поэтому стабилизирующие преобразования целесообразно применять лишь при интегрировании на длительных интервалах времени от нескольких десятков орбитальных периодов и более, где явно раскрывается практическая ценность стабилизации.

Использование стабилизированной системы остается эффективным даже в случае, когда опорная энергия  $H^\sim$  стартует от значения, которое лишь приближенно соответствует истинной энергии в начальный момент времени, т.е.  $H^\sim \approx H(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ . Как было показано, постоянная ошибка  $\Delta H$  приводит главным

образом к линейному росту ошибки  $\Delta x$ , и поэтому несоответствие между начальными значениями задаваемой и истинной энергией существенно не изменит характер поведения численной ошибки  $\Delta x$ . Но все же случай равенства остается наиболее предпочтительным. В связи с этой особенностью стабилизированной системы (10.16) опорную величину  $H^{\sim}$  можно рассматривать как самостоятельную переменную, не зависящую от начальных условий, а в невозмущенном случае — как параметр.

В этом смысле известные уравнения в кеплеровских элементах также стабилизированы, если интегрируемые переменные, непосредственно связанные с энергией, рассматривать как самостоятельные. В невозмущенном движении такие переменные обращаются в постоянные параметры. Тогда вся система уравнений становится устойчивой по всем интегрируемым переменным, за исключением энергетических. То же самое, например, можно сказать о системах теории Кустаанхеймо–Штифеля (Штифель, Шейфеле, 1975) или о системах уравнений Шперлинга–Бодде (Silver, 1975).

## 10.2. Регуляризация уравнений движения. Преобразование Кустаанхеймо–Штифеля

Будем рассматривать движение материальной частицы массой  $m$  в поле тяготения центрального тела массой  $M$  под действием консервативных сил с потенциальной функцией  $V$  и неконсервативных сил  $\mathbf{P}$ . Тогда дифференциальные уравнения движения частицы в прямоугольной системе координат, связанной с центральным телом  $M$ , можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \quad (10.18)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (10.19)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  — вектор положения;  $t$  — физическое время;  $\mu = k^2(M + m)$ ;  $k^2$  — универсальная гравитационная постоянная;  $V = V(\mathbf{x})$ .

Уравнения (10.1) сингулярны в окрестности начала координат. Для орбит, имеющих большие эксцентриситеты, наличие особенности в начале координат приводит к сильным и неравномерным изменениям функций правых частей уравнений движения. При численном интегрировании такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования. Это снижает точность численного интегрирования и приводит к непроизводительным затратам машинного времени.

Регуляризовать уравнения движения и их решения позволяет преобразование Кустаанхеймо–Штифеля (KS) (Штифель, Шейфеле, 1975) вместе с временным преобразованием Сундмана  $dt = |\mathbf{x}| ds$ , осуществляющим переход к новой независимой переменной  $s$ , называемой фиктивным временем. Регуляризирующее преобразование Кустаанхеймо–Штифеля задает отображение физического пространства  $(\mathbf{x})$  в четырехмерное KS-пространство  $(\mathbf{u})$  и представляется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad (10.20)$$

где

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix} \quad (10.21)$$

— матрица KS-преобразования;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  — 4-мерный вектор положения в KS-пространстве. Причем для  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$  справедливо соотношение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})^2.$$

Необходимо заметить, что в (10.20) вектор  $\mathbf{x}$  дополняется нулевой четвертой компонентой:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, 0)^T$ .

В результате уравнения движения в новых переменных преобразуются к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} + \frac{\mu - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}')}{2(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left[ -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \right], \quad \mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}}{ds}. \quad (10.22)$$

Подставляя в (10.22) энергетическое соотношение

$$-H_K = \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} = \frac{\mu - 2(\mathbf{u}', \mathbf{u}')}{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} > 0,$$

получим уравнения возмущенного гармонического осциллятора

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{ds^2} - \frac{H_K}{2} \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left[ -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \right]. \quad (10.23)$$

Система (10.23) не замкнута, и ее следует дополнить дифференциальными уравнениями для энергии и времени

$$\frac{dH_K}{ds} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \left( \left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \right) - (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \right), \quad \frac{dt}{ds} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (10.24)$$

При исследовании возмущенного эллиптического движения удобнее в качестве независимой переменной рассматривать так называемую обобщенную эксцентрическую аномалию  $E$ .

Предполагая, что полная энергия

$$-H = \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V > 0,$$

переменную  $E$  введем с помощью дифференциального соотношения

$$ds = \frac{1}{2\omega} dE, \quad (10.25)$$

где  $\omega = \sqrt{-H/2}$  — частота системы. Замена независимой переменной приводит к новой системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{2} \mathbf{u} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left[ V \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{P} + \frac{2\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \frac{d\omega}{dE} \right], \quad (10.26)$$

$$\frac{d\omega}{dE} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \right), \quad (10.27)$$

$$\frac{dt}{dE} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2\omega}. \quad (10.28)$$

Полученные таким образом уравнения и их решения полностью регулярны в окрестности соударения с центральным телом. При отсутствии возмущений решение в KS-пространстве представимо в форме

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \cos \frac{E}{2} + \boldsymbol{\beta} \sin \frac{E}{2},$$

где регулярные оскулирующие элементы  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  — векторные константы.

Скорость изменения функций правых частей в уравнениях (10.26), (10.28) можно понизить, перейдя с помощью известного метода вариации произвольных постоянных к уравнениям в регулярных элементах  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ . Принимая обозначение  $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \omega)^T$ , систему дифференциальных уравнений в регулярных элементах можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{q}}{dE} = \mathbf{R} \left( \frac{E}{2} \right) \mathbf{Q}, \quad (10.29)$$

$$\frac{dt}{dE} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{2\omega} \quad (10.30)$$

с начальными условиями

$$\boldsymbol{\alpha}_0 = \mathbf{u}_0, \quad \boldsymbol{\beta}_0 = 2 \left( \frac{d\mathbf{u}}{dE} \right), \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_K^2 - V_0/2}, \quad (10.31)$$

где

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.32)$$

$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, Q_3)^T$  — вектор возмущений, компоненты которого  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  — четырехмерные векторы, а  $Q_3$  — скаляр:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{Q}_2 = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{4\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left[ V \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{P} + \frac{2\dot{\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|} \frac{d\omega}{dE} \right], \quad (10.33)$$

$$Q_3 = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \right).$$

Точность численного интегрирования уравнения для быстрой переменной (10.30) чувствительна к значению эксцентриситета, поскольку величина  $t$  как функция  $E$  даже в невозмущенном движении может меняться сложным образом. Поэтому целесообразно использовать временной элемент  $\tau$ , который изменяется почти линейно в слабозвозмущенном движении и связан с физическим временем соотношением

$$t = \tau - \frac{1}{4\omega^2}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Дифференцируя правую и левую части этого соотношения и разрешая его относительно производной  $\tau$ , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} \left[ \mu - 2|\mathbf{x}|V + |\mathbf{x}| \left( \mathbf{x}, \mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) - 4 \frac{d\omega}{dE}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \right] \quad (10.34)$$

с начальным условием

$$\tau_0 = \frac{1}{4\omega_0^2}(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) \quad (t_0 = 0). \quad (10.35)$$

Численные эксперименты показывают, что в случае возмущенного эллиптического движения алгоритм с дифференциальным уравнением для временно-го элемента лучше по точности вычисления времени, чем алгоритм с дифференциальным уравнением времени.

Таким образом, система (10.29), (10.34) становится полностью нечувствительна к изменению эксцентриситета. Однако она по-прежнему содержит уравнение для быстрой переменной, которое будет определять размер шага интегрирования.

Кроме того, очевидно, что при численном интегрировании на ЭВМ с ограниченной разрядной сеткой текущие вычисления неограниченно возрастающих величин типа  $\tau$  за счет округления (усечения) производят неограниченно возрастающие ошибки, которые могут усиливаться ляпуновской неустойчивостью.

Кроме того, самостоятельной проблемой для всех перечисленных здесь вариантов регуляризованных уравнений является проблема точного выхода в физическое пространство на заданный момент физического времени.

Попытка решить проблему точного выхода в физическое пространство  $\mathbf{x}$  на заданный момент физического времени  $t$  и одновременно устранить уравнение для быстрой переменной из интегрируемой системы была предпринята Н.А.Шарковским (Шарковский, 1990, 1998).

Подход Шарковского основан на использовании в качестве независимой переменной невозмущенной эксцентрической аномалии  $E_K$  и применении свойств матриц поворота  $\mathbf{R}$  (10.32). (Здесь и ниже индекс  $K$  обозначает переменные в кеплеровском движении.)

Переход к новой независимой переменной осуществляется с помощью преобразования

$$dE = (1 + \varepsilon) dE_K, \quad \varepsilon = \frac{|\mathbf{x}_K| \omega}{|\mathbf{x}| \omega_K} - 1. \quad (10.36)$$

Тогда уравнения (10.29), (10.30) преобразуются к виду

$$\frac{d\mathbf{q}}{dE_K} = (1 + \varepsilon) \mathbf{R} \left( \frac{E}{2} \right) \mathbf{Q}, \quad (10.37)$$

$$\frac{dt}{dE_K} = (1 + \varepsilon) \frac{|\mathbf{x}|}{2\omega} = \frac{|\mathbf{x}_K|}{2\omega_K}. \quad (10.38)$$

Уравнение (10.38) интегрируется в квадратурах

$$t - t_0 = \frac{\mu}{8\omega_K^3} (E_K - \sin E_K) + |\mathbf{x}_0| \left[ \frac{\sin E_K}{2\omega_K} + \frac{(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0) (1 - \cos E_K)}{4\omega_K^2} \right], \quad (10.39)$$

что позволяет исключить его из системы дифференциальных уравнений, решаемой численно, или, иначе говоря, понизить порядок системы. Правые части уравнений (10.37) еще зависят от  $E$ . Чтобы привести их к зависимости от новой переменной  $E_K$ , воспользуемся основными свойствами ортогональных матриц  $\mathbf{R}$ , согласно которым для любых вещественных значений  $\varphi$  и  $\psi$

$$\mathbf{R}(\varphi + \psi) = \mathbf{R}(\varphi)\mathbf{R}(\psi), \quad \mathbf{R}^T(\varphi) = \mathbf{R}^{-1}(\varphi).$$

Применяя эти свойства к уравнениям (10.37) и предполагая, что  $E = E_K + \delta E$  ( $\delta E$  — отклонение возмущенной эксцентрической аномалии от невозмущенной), приведем их к виду

$$\mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \frac{d\mathbf{q}}{dE_K} = (1 + \varepsilon) \mathbf{R}\left(\frac{E_K}{2}\right) \mathbf{Q}, \quad (10.40)$$

Преобразуем левые части уравнений (10.40)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \frac{d\mathbf{q}}{dE_K} &= \frac{d}{dE_K} \left[ \mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \mathbf{q} \right] - \mathbf{q} \frac{d}{dE_K} \left[ \mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{d}{dE_K} \left[ \mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \mathbf{q} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{R}^T\left(\frac{\delta E}{2}\right) \mathbf{q} \varepsilon \mathbf{I}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначая  $\mathbf{R}^T(\delta E/2)\mathbf{q}$  через  $\mathbf{q}^*$ , получим следующую окончательную систему:

$$\frac{d\mathbf{q}^*}{dE_K} + \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{I} \mathbf{q}^* = (1 + \varepsilon) \mathbf{R}\left(\frac{E_K}{2}\right) \mathbf{Q}$$

с начальными условиями (10.31).

Алгоритм Шарковского был апробирован в задачах динамики близких спутников планет (Шарковский, 1998) и зарекомендовал себя как высокоэффективный по точности вычислений и быстродействию.

### 10.3. Метод Энке

Эффективность численных алгоритмов можно повысить, если вместо отклонений действительных координат от заданных начальных значений (иначе говоря, просто координат) интегрировать отклонения от их аналогов на некоторой промежуточной (опорной) орбите, используя при этом априорные сведения о характерных свойствах исследуемого движения. Впервые такой подход была предложен немецким астрономом И.Ф. Энке для исследования кометных орбит (Encke, 1852).

Основная идея метода Энке состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка к реальной

эволюционирующей орбите. Для отклонений координат реальной орбиты от соответствующих величин на опорной траектории составляется система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численными методами. Таким образом, метод Энке нацелен на то, чтобы получить такие дифференциальные уравнения, численное интегрирование которых не требовало бы вычислительных операций с большими величинами, которые, как известно, обременены большими ошибками округления. Представим классическое изложение метода.

### 10.3.1. Классический метод Энке

Пусть движение объекта описывается уравнениями

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \quad (10.41)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0). \quad (10.42)$$

Для получения своих уравнений в качестве промежуточной Энке использовал оскулирующую кеплеровскую орбиту, удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_K}{dt^2} + \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = \mathbf{0}. \quad (10.43)$$

Поскольку промежуточная орбита в момент времени  $t_0$  оскулирует реальную орбиту, то начальные условия уравнений (10.43) будут совпадать с условиями (10.42):

$$\mathbf{x}_{0K} = \mathbf{x}_K(t_0) = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_{0K} = \dot{\mathbf{x}}_K(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0). \quad (10.44)$$

Пусть  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_K$  — изохронные отклонения действительных координат от их аналогов на промежуточной орбите. Тогда дифференциальные уравнения для отклонений запишутся как

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{x}_K}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} + \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P},$$

или

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (10.45)$$

а начальные условия примут тривиальный вид

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}. \quad (10.46)$$

Отклонения  $\delta \mathbf{x}$  можно получить непосредственным интегрированием системы (10.45). Кеплеровский член  $\mu \mathbf{x}_K / r_K^3$  определен заранее из аналитического решения  $\mathbf{x}_K$  задачи двух тел, а  $\mu \mathbf{x} / r^3$  и правая часть уравнений являются функциями действительных координат  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}$  и времени  $t$ . Таким образом, система (10.45) самодостаточна и пригодна для использования.

Вблизи эпохи оскуляции  $\delta \mathbf{x}$  — малые величины. Кеплеровские члены в уравнениях (10.45), как правило, существенно больше. Поэтому их малая разность будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Й.Ф. Энке пред-



ложил прием, устраняющий эту трудность, и тем самым повысил практическую ценность своего метода.

Преобразуем разность кеплеровских членов к виду

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K &= \frac{\mu}{r_K^3} \left( \frac{r_K^3}{r^3} \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_K \right) = \\ &= \frac{\mu}{r_K^3} \left( \left( \frac{r_K^3}{r^3} - 1 \right) \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} \right). \end{aligned} \quad (10.47)$$

Поскольку

$$r^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}) = r_K^2 + 2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}),$$

то

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x})}{r_K^2}.$$

Положим, что

$$2q \equiv \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x})}{r_K^2}, \quad (10.48)$$

тогда

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + 2q \quad \Rightarrow \quad \frac{r_K^3}{r^3} - 1 = (1 + 2q)^{-3/2} - 1 \equiv f(q)q.$$

Разложение в ряд функции  $f$  по степеням  $q$  дает

$$f(q) = -3 + \frac{15}{2}q - \frac{105}{6}q^2 + \dots \quad (10.49)$$

В итоге уравнения Энке принимают окончательный вид

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r_K^3} (fq\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \quad (10.50)$$

с начальными условиями

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}, \quad (10.51)$$

где  $f$  с заданной точностью определяется конечной суммой ряда (10.9).

Неудобство использования полученных уравнений заключается в том, что  $f$  в процессе интегрирования вычисляется приближенно. Однако существуют способы, позволяющие вычислять разность кеплеровских членов без использования рядов.

Представим разность кеплеровских членов в виде

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K &= \frac{\mu}{r^3} \left( \mathbf{x} - \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_K - \frac{r^3}{r_K^3} \mathbf{x}_K \right) = \\ &= \frac{\mu}{r^3} \left( \delta \mathbf{x} - \left( \frac{r^3}{r_K^3} - 1 \right) \mathbf{x}_K \right). \end{aligned}$$

Имеем

$$r^2 - r_K^2 = 2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}).$$

Расписывая разность квадратов и разрешая относительно разности радиусов, получим

$$r - r_K = \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r + r_K}.$$

Тогда

$$\frac{r}{r_K} = 1 + \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r_K(r + r_K)} \equiv 1 + d$$

и

$$\frac{r^3}{r_K^3} - 1 = (1 + d)^3 - 1 = d(3 + 3d + d^2) \equiv D.$$

После соответствующей замены получаем уравнения Энке в виде

$$\frac{d^2 \delta\mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}(\delta\mathbf{x} - D\mathbf{x}_K) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}. \quad (10.52)$$

### 10.3.2. Обобщение метода Энке

Таким образом, метод Энке формально реализуется по следующей схеме.

Предположим, что движение небесного тела описывается системой уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, t), \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0), \quad (10.53)$$

В пространстве  $\mathbf{q}$  выбирается опорная промежуточная орбита  $\mathbf{q}_K = \mathbf{q}_K(t)$ , удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d\mathbf{q}_K}{dt} = \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t), \quad \mathbf{q}_{K0} = \mathbf{q}_K(t_0). \quad (10.54)$$

Прямым вычитанием уравнений (10.53) из (10.54) получаем уравнения для отклонений  $\delta\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_K$ :

$$\frac{d\delta\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}_K + \delta\mathbf{q}, t) - \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t), \quad \delta\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0) - \mathbf{q}_K(t_0). \quad (10.55)$$

Если удастся в  $\mathbf{Q}$  явно выделить невозмущенную  $\mathbf{Q}_K$  и возмущенную  $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_K$  части, путем соответствующих преобразований решается проблема вычитания близких величин

$$\mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K + \delta\mathbf{q}, t) - \mathbf{Q}_K(\mathbf{q}_K, t). \quad (10.56)$$

Следуя терминологии С. Херрика, разность (10.56) будем называть членом Энке.

Вблизи эпохи оскуляции возмущения  $\delta\mathbf{q}$  малы, но со временем возрастают. На достаточно длинных интервалах времени они увеличиваются настолько, что член Энке становится сравнимым с возмущающими членами. В этом случае прибегают к процедуре исправления орбиты путем перевычисления параметров опорного движения на новую эпоху  $t_1$ . Параметры  $\mathbf{q}_K(t_1)$  определяются из текущих значений  $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_K(t_1) + \delta\mathbf{q}(t_1)$  до исправления, а в качестве критерия переопределения параметров рассматривается величина члена Энке.

Причиной возрастания  $\delta\mathbf{q}$ , очевидно, является неточное представление движения промежуточной орбитой, которое, кроме того, усиливается неустойчивостью движения. Представление можно улучшить путем вариации параметров промежуточной орбиты таким образом, чтобы на длительном интервале времени она учитывала основные тенденции динамической эволюции. Другой подход, более фундаментальный, состоит в поиске новых математических моделей для конструирования промежуточных орбит.

### 10.3.3. Уравнения Энке в переменных Кустаанхеймо-Штифеля

Метод Энке в KS-интерпретации имеет разнообразные преимущества. Во-первых, благодаря линейности исходных уравнений в KS-переменных преобразование Энке не требует специальных алгебраических действий для устранения вычитаний близких по значению величин. Во-вторых, как будет продемонстрировано ниже, в результате преобразования формульный вид дифференциальных уравнений принципиально не меняется. В частности, уравнения в отклонениях, описывающие движение в KS-пространстве, сохраняют вид уравнений возмущенного гармонического осциллятора. В-третьих, опорное решение выражается явно через независимую переменную, обобщенную эксцентрическую аномалию.

Для конструирования дифференциальных уравнений Энке примем в качестве промежуточной орбиты невозмущенное решение системы (10.26)–(10.28). В этом случае  $V$  и  $\mathbf{P}$  равны нулю, и дифференциальные уравнения движения принимают вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}_K}{dE^2} + \frac{1}{4} \mathbf{u}_K = \mathbf{0}, \quad \frac{d\omega_K}{dE} = 0, \quad \frac{d\tau_K}{dE} = \frac{\mu}{8\omega_K^3}. \quad (10.57)$$

Решение системы (10.57) имеет простую форму:

$$\mathbf{u}_K = \boldsymbol{\alpha}_K \cos \frac{E}{2} + \boldsymbol{\beta}_K \sin \frac{E}{2}, \quad (10.58)$$

$$\omega_K = \omega_0, \quad \tau_K = \frac{\mu}{8\omega_K^3} E + \tau_0,$$

где  $\boldsymbol{\alpha}_K, \boldsymbol{\beta}_K$  — векторные константы, определяемые из начальных данных, а  $\omega_0, \tau_0$  — начальные значения для  $\omega$  и  $\tau$ .

Следовательно, уравнения в возмущениях относительно решения (10.58) запишутся в виде

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4} \delta \mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left( -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \right) - \frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2} - \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \frac{d\mathbf{u}}{dE}, \quad (10.59)$$

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_K = \delta \boldsymbol{\alpha} \cos \frac{E}{2} + \delta \boldsymbol{\beta} \sin \frac{E}{2},$$

$$\frac{d\delta\omega}{dE} = -\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{8\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \right), \quad (10.60)$$

$$\frac{d\delta\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} \left[ \mu \left( 1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3} \right) - 2rV + r \left( \mathbf{x}, \mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) \right] - \frac{2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dE} \left( \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dE} \right), \quad (10.61)$$

$$\delta\omega = \omega - \omega_K, \quad \delta\tau = \tau - \tau_K.$$

Член Энке в (10.61) как разность кубов легко выражается через малую величину  $\delta\omega$ :

$$1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3} = -\frac{\delta\omega}{\omega_K} \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_K} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_K} \right) + 1 \right].$$

Интересная особенность KS-возмущений состоит в том, что они не изохронны. Независимая переменная  $E$  в регулярных уравнениях является аналогом возмущенной эксцентрической аномалии, а в невозмущенном случае с точностью до постоянной фазы совпадает с кеплеровской. Как и любая аномалия в орбитальном движении, эксцентрическая указывает на местоположение объекта на орбите. Следовательно, отнесенные к аномалии  $E$  возмущения становятся изотопными<sup>5</sup>.

Благодаря устойчивости решения KS-системы по координатам  $\mathbf{u}$  отклонения  $d\mathbf{u}$  в слабозвозмущенном движении остаются малыми на достаточно длительных интервалах времени, в связи с чем реже возникает необходимость исправлять орбиту  $\mathbf{u}_K$ . Между тем известно, что решение  $\tau = \tau(E)$  неустойчиво. Поэтому независимо от малости возмущающих факторов с течением  $E$  отклонения  $\delta\tau$  неограниченно возрастают и промежуточное решение  $\tau_K$  требует периодического переопределения.

В данном разделе уместно отметить еще один очевидный, но важный аспект в методе Энке, который проявляет себя в случае применения метода к системам, подобно рассмотренной выше, с быстроменяющимися и неограниченно возрастающими переменными. Такие переменные, как правило, выражаются в виде различных комбинаций долгот и аномалий, либо времени и временных элементов. Соответственно их уравнения описывают саму динамику тела на орбите. Именно эти уравнения и задают шаг интегрирования при численном решении всей системы в целом.

При удачном выборе опорного движения метод Энке приводит к возмущениям, которые, как правило, малы. Для возмущений в указанных переменных это также справедливо. Интегрирование малых возмущений допускает большой шаг интегрирования, за счет чего, помимо точности, повышается оперативность вычислений.

#### 10.3.4. Метод Энке как метод приведения систем к стандартному виду

В своей монографии А. Рой (1981) привел уравнения возмущенного движения, выражаясь языком Н.Н. Боголюбова, к стандартному виду, где применил метод Энке, преобразовав уравнение истинной долготы  $\lambda$  к уравнению для ее возмущения  $\delta\lambda$ :

<sup>5</sup> От греч.: isos — равный и topos — место.

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{c}{r^2} - \frac{c_K}{r_K^2} + \frac{c_1\dot{c}_2 - c_2\dot{c}_1}{c(c+c_3)}. \quad (10.62)$$

В уравнении  $c, c_1, c_2, c_3$  — соответственно величина и компоненты момента количества движения.

Остановимся на случае, когда время  $t$  выступает как зависимая переменная от эксцентрической аномалии  $E$ . Рассмотрим метод Энке на примерах KS-системы и системы, записанной в кеплеровских элементах.

В регулярной KS-системе уравнение времени имеет вид

$$\frac{dt}{dE} = \frac{r}{2\omega}. \quad (10.63)$$

В невозмущенном движении связь между кеплеровской эксцентрической аномалией и временем задается с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{2\omega_K}{r_K}. \quad (10.64)$$

Введем обозначение:  $\delta E = E - E_K$  и  $\delta r = r - r_K$ . Учитывая (10.63) и (10.64), производная для  $\delta E$  выразится как

$$\frac{d\delta E}{dE} = 1 - \frac{dE_K}{dE} = 1 - \frac{\omega_K r}{r_K \omega} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta r}{r_K} \frac{\omega_K}{\omega}.$$

Таким образом, уравнение для  $\delta E$  запишется в виде

$$\frac{d\delta E}{dE} = \frac{\delta\omega}{\omega} - \frac{\delta r}{r_K} \frac{\omega_K}{\omega}. \quad (10.65)$$

В (10.65)  $\delta\omega$  определяется из уравнения (10.60), а  $\delta r$  вычисляется по формуле

$$\delta r = r - r_K = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - (\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_K) = 2(\mathbf{u}_K, \delta\mathbf{u}) + (\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}).$$

Поправка за возмущение  $\delta E$  однозначно задает время. Действительно, имея  $\delta E$  в шкале  $E$ , всегда можно определить кеплеровскую аномалию как  $E_K = E - \delta E$ . Уравнение (10.64) интегрируется аналитически, а его решение представляет собой известное уравнение Кеплера  $t = t(E_K)$ , которое точно задает связь между временем и аномалией. Следовательно, уравнение времени (10.63) можно заменить уравнением для возмущения независимой переменной (10.65), не нарушая тем самым достаточности системы.

Аналогичный прием можно повторить применительно к системам в кеплеровских элементах. Запишем уравнение времени в виде

$$\frac{dt}{dE} = \frac{R}{n+v}, \quad (10.66)$$

где  $R = 1 - e \cos E$ ;  $n$  — среднее движение, а

$$\begin{aligned} \nu = & \left( \sin \nu \sin E + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left( \cos \nu - 2e \frac{r}{p} \right) \right) \tilde{S} + \\ & + \left( \sin E (\cos \nu + \cos E) - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin \nu \right) \tilde{T}, \end{aligned}$$

$\nu$  — истинная аномалия;  $p$  — фокальный параметр;

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} S, \quad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} T,$$

а  $S$  и  $T$  — радиальная и трансверсальная составляющие возмущающих ускорений соответственно.

Уравнение кеплеровской аномалии примет вид

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{n_K}{R_K}. \quad (10.67)$$

Введем обозначение:  $\delta n = n - n_K$  и  $\delta R = R - R_K$ . Дифференцирование  $\delta E$  дает уравнение

$$\frac{d\delta E}{dE} = 1 - \frac{dE_K}{dE} = 1 - \frac{Rn_K}{R_K(n+\nu)} = \frac{\delta n + \nu}{n + \nu} - \frac{\delta Rn_K}{R_K(n + \nu)},$$

или

$$\frac{d\delta E}{dE} = \frac{\delta n + \nu}{n + \nu} - \frac{\delta Rn_K}{R_K(n + \nu)}. \quad (10.68)$$

В (10.68)  $\delta R$  вычисляется по формуле

$$\delta R = 2e_K \cos E_K \sin^2 \delta E / 2 - \delta e \cos E_K \cos \delta E + e \sin E_K \sin \delta E,$$

а для определения  $\delta n$  и  $\delta e$  можно воспользоваться уравнениями возмущенного движения, записанными для этих отклонений.

### 10.3.5. Уравнения Энке в задачах спутниковой динамики

В классическом методе Энке в качестве опорной используется орбита невозмущенной задачи двух тел. В последнее время предпринимались попытки усовершенствовать метод Энке путем использования лучшей опорной орбиты.

У.Т. Кайнер и М.М. Беннет (1966) показали, что при интегрировании уравнений движения низкого спутника Земли метод Энке можно улучшить, если при построении опорной траектории учесть эффект первого порядка от сжатия Земли.

В основе построения любых промежуточных решений для метода Энке лежат геометрические и динамические свойства орбит, которые могут быть известны заранее. Именно это обеспечивает им практическую ценность в тех или иных задачах численного исследования. Но, к сожалению, чаще всего до интегрирования нам мало что известно об исследуемом движении не только в количественном, но даже в качественном аспекте.

Весьма полезными для построения промежуточных решений могут быть некоторые задачи, имеющие аналитическое решение в частных случаях. Рас-

смотрим данный подход на примере спутников, движущихся по почти круговым экваториальным орбитам, как, например, геосинхронные ИСЗ.

Как уже отмечалось выше, в своем движении ИСЗ испытывают действия двух основных факторов: силы притяжения массы центральной планеты, определяющей кеплеровское движение, и гравитационное влияние ее экваториального утолщения за счет сжатия. Причем для ИСЗ фактор сжатия вносит настолько существенный вклад в возмущения их кеплеровских орбит, что использование решения задачи двух тел для предсказания положений спутников становится неприемлемым уже на малых интервалах времени.

Движение рассматриваемого спутника в поле тяготения сжатой планеты можно с высокой точностью интерпретировать общей задачей двух неподвижных центров, которая имеет аналитическое решение в замкнутых формулах. В общем случае для обеспечения высокой точности и малости возмущений именно это решение и целесообразно принять в качестве промежуточного. Однако на практике использование такой достаточно «тяжеловесной» теории для построения опорных решений является весьма нерациональным.

Намек на изящное решение данной проблемы сформулирован С. Херриком (1978) в следующем тезисе: «Увеличение центральной силы или массы уменьшает возмущения, поскольку произвольная часть членов высокого порядка переходит в члены, определяемые задачей двух тел». В самом деле, ведь фактор сжатия в динамике близких спутников можно трактовать как «эффект дополнительной массы» центральной планеты. Поэтому для построения опорных решений здесь может быть достаточно использовать кеплеровскую теорию с модифицированным гравитационным параметром.

Изложенную идею легко продемонстрировать на примере уравнений в прямоугольных координатах. Для этого предварительно рассмотрим одну простую задачу.

Пусть спутник движется в экваториальной плоскости центральной планеты по круговой орбите. Тогда  $x_3 = 0$  и

$$V = V(r) = -\frac{\lambda}{2r^3},$$

где  $\lambda = \mu J_2 b^2$ ;  $J_2$  — коэффициент второй зональной гармоники;  $b$  — экваториальный радиус планеты, а дифференциальные уравнения движения можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} = -\frac{3}{2} \frac{\lambda}{r^5} \mathbf{x}. \quad (10.69)$$

Группируя коэффициенты при кеплеровском множителе, получим

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 b^2}{r^2} \right) \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (10.70)$$

Таким образом, круговое движение экваториального спутника в поле тяготения сжатой планеты описывается уравнениями задачи двух тел с видоизмененным (увеличенным) гравитационным параметром.

Интересно также заметить, что идея Херрика (1978) была заимствована из общей теории возмущений. В терминологии кеплеровских элементов «эффект дополнительной массы» интерпретируется как наличие в среднем движении постоянных возмущений порядка малости  $J_2$  или, что то же самое, вековых возмущений в средней аномалии.

Получим уравнения Энке относительно промежуточной орбиты Херрика в KS-переменных, принимая во внимание все их преимущества с практической точки зрения.

В терминологии KS-переменных «эффект дополнительной массы» равносильно повышению частоты в KS-пространстве и уменьшению физического периода, что непосредственно следует из получаемых уравнений.

Согласно принятым условиям задачи, дифференциальные уравнения движения в KS-переменных можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4} \mathbf{u} = -\frac{1}{8\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(rV), \quad (10.71)$$

$$\frac{d\omega}{dE} = 0, \quad (10.72)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} \left[ \mu - \frac{\partial}{\partial r}(r^2V) \right]. \quad (10.73)$$

Вычисляя частные производные, преобразуем дифференциальные уравнения (10.71) и (10.73) к виду

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4} \mathbf{u} = -\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3} \mathbf{u}, \quad (10.74)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} \left[ \mu - \frac{\lambda}{2r^2} \right].$$

В круговом движении

$$r = \frac{\mu}{4\omega^2}. \quad (10.75)$$

Подставим соотношение (10.75) в дифференциальные уравнения (10.74) и введем новое обозначение

$$\Phi = \frac{(2\omega)^4 \lambda}{2\mu^3}. \quad (10.76)$$

Тогда уравнения движения можно привести к невозмущенной форме с измененной частотой и периодом:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4}(1 + 4\Phi) \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (10.77)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{\mu}{8\omega^3} [1 - \Phi].$$

Таким образом, как показывают уравнения, сжатие центральной планеты в KS-пространстве (как и в физическом) изменяет частоту движения экватори-



ального спутника и его период. При увеличении сжатия, определяемого величиной  $J_2$ , частота увеличивается, а период соответственно уменьшается.

Решение (10.77) представимо в форме

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha} \cos \varphi + \boldsymbol{\beta} \sin \varphi, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1+4\Phi}{4}} E,$$

$$\omega = \omega_0, \quad \tau = \frac{\mu}{8\omega^3} [1 - \Phi] E + \tau_0.$$

Очевидно, что решение полученных уравнений может достаточно хорошо представлять движение экваториальных спутников с почти круговыми орбитами (в особенности ИСЗ, когда величина  $\Phi$  существенно изменяет частоту движения). Исходя из этого, в алгоритмах типа Энке при исследовании движения данных объектов именно это решение целесообразно использовать в качестве опорного вместо кеплеровского.

На основе нового опорного решения уравнения Энке в отклонениях КС-переменных для случая консервативных сил принимают вид

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta \mathbf{u} = -\frac{1}{8\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(rV) + \Phi \mathbf{u}, \quad (10.78)$$

$$\frac{d\delta\omega}{dE} = 0, \quad \frac{d\delta\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^2} \left[ \mu\Phi - \frac{\partial}{\partial r}(r^2V) \right],$$

а в общем случае

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{u}}{dE^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta \mathbf{u} = \frac{r}{8\omega^2} \mathbf{L}^T(\mathbf{u}) \left( -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} \right) - \frac{V\mathbf{u}}{8\omega^2} - \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dE} \frac{d\mathbf{u}}{dE} + \Phi \mathbf{u},$$

$$\frac{d\delta\omega}{dE} = -\frac{r}{8\omega^2} \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{P}) \right), \quad (10.79)$$

$$\frac{d\delta\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3} \left[ \mu \left( 1 - \frac{\omega^3}{\omega_K^3} \right) [1 - \Phi] + \mu\Phi - 2rV + r \left( \mathbf{x}, \mathbf{P} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right) \right] - \frac{2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dE} \left( \mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dE} \right).$$

Появление в уравнениях Энке (10.79) членов с  $\Phi$ -множителем влечет за собой вычитания величин типа

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3} \mathbf{u} + \Phi \mathbf{u}, \quad \mu\Phi - \frac{\lambda}{2r^2},$$

или

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3} \mathbf{u} + \frac{\lambda}{8\omega_K^2 \bar{r}^3} \mathbf{u}, \quad \frac{\lambda}{2\bar{r}^2} - \frac{\lambda}{2r^2}, \quad (10.80)$$

где

$$\bar{r} = \mu/4\omega^2,$$

которые при вычислении правых частей дифференциальных уравнений приводят к существенной потере точности. С помощью несложных алгоритмических выкладок разности (10.80) можно привести к выражениям с членами, пропорциональными известным малым величинам, и избежать, таким образом, «опасных» вычитаний.

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3} \mathbf{u} + \frac{\lambda}{8\omega_K^2 \bar{r}^3} \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\Phi}{(1+\Delta\omega)^2} [3\Delta r - 3(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3 + 2\Delta\omega + (\Delta\omega)^2], \quad (10.81)$$

$$\frac{\lambda}{2\bar{r}^2} - \frac{\lambda}{2r^2} = \mu\Phi [2\Delta r - (\Delta r)^2].$$

Здесь  $\Delta r = (r - \bar{r})/r$ , а  $\Delta\omega = \delta\omega/\omega_K$ . Во избежание потери точности при прямом вычитании  $r - \bar{r}$  величину  $\Delta r$  следует вычислять по следующей формуле:

$$\Delta r = \frac{\delta r + r_K - \bar{r}}{r},$$

где разность  $r_K - \bar{r}$  задается с помощью аналитического выражения:

$$r_K - \bar{r} = |\alpha_K|^2 - \bar{r} + (2(\alpha_K, \beta_K) \cos \varphi + (|\alpha_K|^2 - |\beta_K|^2) \sin \varphi) \sin \varphi.$$

#### 10.4. Метод вариации постоянных

В методе вариации произвольных постоянных орбита представляется в невозмущенном виде, где орбитальные параметры (элементы) рассматриваются как переменные. В соответствии с формой представления орбиты составляются дифференциальные уравнения для орбитальных параметров, которые затем интегрируются приближенными методами. Следует заметить, что методику Лагранжа можно применять не только к постоянным параметрам, но и к различным переменным функциям этих параметров и времени.

В случае гладких возмущений параметры — медленноменяющиеся переменные, поэтому их уравнения при использовании численных методов будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения.

С вычислительной точки зрения уравнения в кеплеровских элементах (см. гл. 3) неудобны тем, что они довольно сложны и содержат много тригонометрических функций и, кроме того, имеют особенность для нулевых наклонений и эксцентриситетов. Чтобы обойти эти недостатки А. Рой предложил в качестве орбитальных параметров рассматривать момент количества движения  $\mathbf{c}$ , вектор Лапласа  $\mathbf{g}$  и истинную долготу  $\lambda = \nu + \Omega + \omega$ . Их уравнения можно записать в виде (Рой, 1981):

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{c}}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1}{|\mathbf{c}|(|\mathbf{c}| + c_3)}. \quad (10.82)$$

Система (10.82) имеет серьезный недостаток, который проявляется главным образом при интегрировании сильновытянутых орбит. Последнее уравнение в (10.82) сингулярно в начале координат, что приводит к эксцентричному поведению его правой части. Чтобы разрешить эту трудность, достаточно заменить  $\lambda$  на среднюю долготу  $l = M + \Omega + \omega$ , которая в слабозмущенном движении меняется почти линейно.

## 10.5. Исследование эффективности методов теории специальных возмущений в задачах динамики ИСЗ

Выше были изложены основополагающие идеи и принципы построения методов теории специальных возмущений, а также обосновано их применение к решению прикладных задач спутниковой динамики. Далее дается сравнительный анализ эффективности некоторых методов применительно к численному моделированию спутниковых орбит.

### 10.5.1. Численный эксперимент

Численная эффективность методов теории специальных возмущений (табл. 10.1) исследовалась на примере моделирования движения близкого и геосинхронного спутников (табл. 10.2). В табл. 10.1 также приводятся ссылки на уравнения методов;  $G$  — соответствующие интегрируемым переменным обозначения для характеристик численной эффективности методов на приводимых ниже рисунках, а  $N$  — число интегрируемых уравнений. Следует заметить, что в методах Энке опорные решения перевычислялись через каждые 2 оборота. В табл. 10.2.  $T$ ,  $e$  и  $i$  — период, эксцентриситет и наклонение исследуемых орбит соответственно (наклонения для спутников даны относительно экватора Земли). В задачах учитывались следующие возмущающие факторы: влияние несферичности центрального тела и лунно-солнечные притяжения. Другие возмущающие факторы не рассматривались ввиду их незначительного влияния на эффективность численного моделирования. Для интегрирования уравнений движения был использован широко известный среди небесных механиков метод Эверхарта (1974), разработанный автором специально для численного моделирования орбит.

Таблица 10.1. Методы теории специальных возмущений

Переменные	$G$	Ссылка	$N$	Переменные	$G$	Ссылка	$N$
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$	$(t)$	$\mathbf{x}$	6	$\mathbf{c}, \mathbf{g}, l$	$(t)$	$\mathbf{r}_y$	(10.82) 7
$\delta\mathbf{x}, \delta\dot{\mathbf{x}}$	$(t)$	$\delta\mathbf{x}$	(10.52) 6	$\mathbf{u}, \mathbf{u}', h, \tau$	$(E)$	$\mathbf{u}$	(10.26,27,34) 10
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, h$	$(t)$	$\mathbf{st}$	(10.17) 7	$\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}', \delta h, \delta\tau$	$(E)$	$\delta\mathbf{u}$	(10.59–61) 10

Таблица 10.2. Орбиты спутников

Объект	Центр	$T$ (сут)	$e$	$i$ (°)	Интервал (г., об.)	
300 км	Земля	0.063	0.000	50.0	0.038	222
ГСС	Земля	0.997	0.010	10.0	40	14600

Низколетящий ИСЗ (с высотой 300 км) — это быстрый околоземный объект. Всего за 2 недели он совершает 222 оборота. Именно на этом интервале мы и рассматривали его орбитальное движение: во-первых, нас интересовала целесообразность использования исследуемых методов на таком интервале времени применительно к интегрированию довольно гладкой орбиты; во-вторых, рассматривать движение низких спутников на более длительном временном интервале просто не имеет смысла, поскольку он довольно часто подвергается ор-

битальной коррекции за уменьшение его высоты вследствие сопротивления атмосферы. При этом ввиду незначительного влияния на эффективность численного интегрирования сопротивление атмосферы мы все же не учитывали.

Геосинхронный объект интересовал нас лишь как представитель наиболее загрязненной области околоземного пространства, как один из многочисленных фрагментов космического мусора. Его динамика моделировалась на 40-летнем временном интервале, фактически соизмеримом с эрой освоения (и загрязнения) космоса.

### **10.5.2. Характеристики эффективности численного интегрирования**

Для оценки точности интегрирования варьировался параметр интегратора  $L$  (Everhart, 1974) и по решению с большим параметром оценивалась глобальная ошибка решения с меньшим параметром. Быстродействие численного интегрирования оценивалось по числу выполненных шагов. В результате для каждой системы интегрируемых уравнений были получены зависимости точности интегрирования от быстродействия, по которым анализировали эффективность методов теории специальных возмущений.

Следует заметить, что оценка быстродействия по числу шагов интегрирования здесь вполне обоснована. Конечно, предлагаемые методы усложняют уравнения орбитального движения, что естественно сказывается на времени вычисления их правых частей. Поэтому, казалось бы, каждый шаг интегрирования для разных систем должен быть по-разному трудоемок. Тем не менее нельзя забывать, что подавляющая часть времени в современных моделях тратится на вычисление возмущающей функции  $\mathbf{P}$ , которая без изменения присутствует во всех рассматриваемых нами системах; и все артефакты, появляющиеся в уравнениях после преобразований, просто меркнут на фоне конгломерата  $\mathbf{P}$ . Поэтому для оценки быстродействия в нашем анализе эффективности методов достаточно знать лишь число обращений к  $\mathbf{P}$  либо пропорциональное ему число шагов, выполненных за весь процесс интегрирования.

### **10.5.3. Численные результаты**

Характеристики точность–быстродействие приведены на рис. 10.1 и 10.2. Для оценки значимости ошибок интегрирования на рисунках пунктирными линиями приведены два уровня: один соответствует величине большой полуоси орбиты ( $a$ ), второй — приблизительно односекундной угловой ошибке относительно земного наблюдателя ( $1''$ ).

Полученные результаты говорят о том, что методы теории специальных возмущений весьма эффективны и могут быть рекомендованы к применению для численного моделирования спутниковых орбит. Впечатляющие результаты получаются при использовании KS-уравнений ( $\mathbf{u}$ ,  $\delta\mathbf{u}$ ) и уравнений Роя ( $\mathbf{ry}$ ). Так, при сохранении точности интегрирования с их помощью удастся повысить быстродействие в 3–4 раза. Кроме того, метод Энке в KS-переменных ( $\delta\mathbf{u}$ ) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 1–2 порядка.

Высокая эффективность этих уравнений, прежде всего, состоит в том, что они обладают стабилизирующим эффектом. Несмотря на это, использование стабилизированных уравнений (*st*) существенно менее эффективно. По-видимому, это объясняется наличием в этих уравнениях искусственно введенных членов (стабилизирующих возмущений), поведение которых связано с ошибками интегрирования, не имеющими никакого отношения к физике задачи. Поэтому данный артефакт, вполне обоснованный с точки зрения стабилизации как средство для борьбы с ляпуновской неустойчивостью, все же имеет побочный эффект, который со временем заметно искажает динамическую картину задачи.

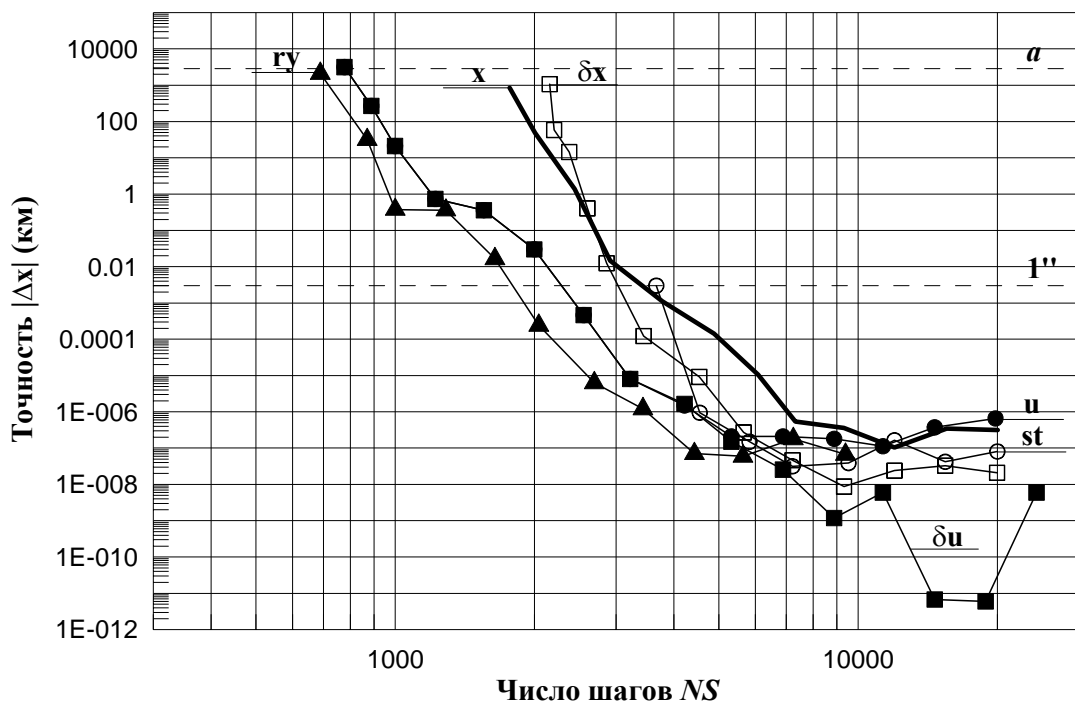


Рис. 10.1. Характеристики точность–быстродействие методов для низколетящего ИСЗ

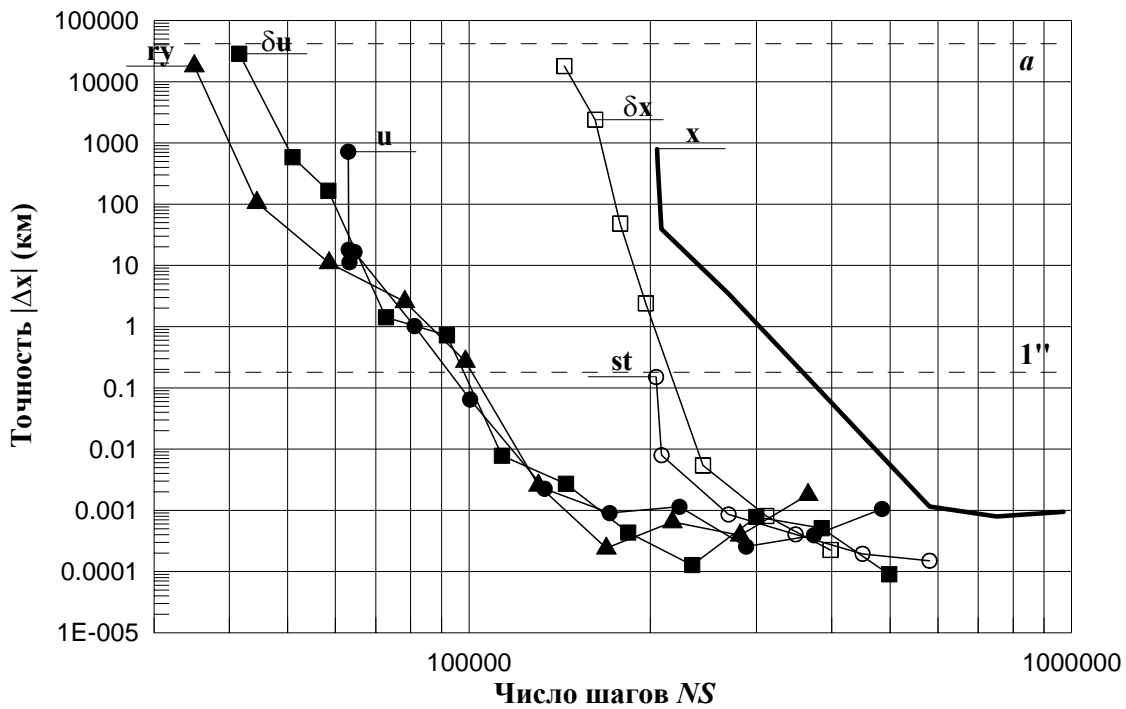


Рис. 10.2. Характеристики точность–быстродействие методов для геосинхронного ИСЗ

Как видно из рисунков, эффективность методов по быстродействию для низколетящего спутника заметно ниже, нежели для геосинхронного объекта. Это главным образом связано с тем, что практическая ценность методов теории специальных возмущений становится тем выше, чем больше временной интервал, на котором рассматривается движение объекта. При сравнении эффективности методов для разных объектов, прежде всего, необходимо помнить, что длительность численного интегрирования (моделирования) определяется не столько величиной временного интервала, сколько количеством совершенных объектом оборотов. При этом 300-километровый спутник совершает почти в 70 раз меньше оборотов, нежели геосинхронный.

## **11. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ**

### **11.1. Вводные замечания**

В этой главе мы рассмотрим примеры применения аналитических методов для построения точных и приближенных моделей движения ИСЗ.

Ограниченные возможности настоящего издания не позволяют дать подробное описание высокоточных аналитических теории движения, разработанных за последние 20 лет, поэтому мы остановимся на них кратко. А для того, чтобы продемонстрировать возможности аналитических методов и показать, как ими можно пользоваться на практике, рассмотрим подробно решение двух приближенных задач с применением метода преобразований Ли.

### **11.2. Высокоточные аналитические модели движения ИСЗ**

Несмотря на большую популярность у специалистов аналитических методов решения задач динамики ИСЗ, полных аналитических теорий движения, способных представлять современные наблюдения, разработано не так уж много. Это связано, прежде всего, с трудоемкостью задачи. Разработка общей аналитической теории движения, пригодной для любых типов орбит, задача практически нереальная, так как именно тип орбиты, ее эксцентриситет и величина большой полуоси определяют структуру аналитической теории. Поэтому все существующие аналитические теории привязаны к конкретному типу орбит.

Мы приведем здесь краткое описание пяти наиболее полных аналитических теорий движения ИСЗ, разработанных отечественными авторами. Иностранные работы по созданию аналитических теорий тоже существуют, но их результаты практически недоступны.

Большая группа специалистов в области небесной механики во главе с Е.П. Аксеновым занималась в 70–80 гг. прошлого столетия созданием теории движения ИСЗ на основе эйлеровой промежуточной орбиты. Была разработана сама теория обобщенной задачи двух неподвижных центров, а затем с использованием этой задачи в качестве промежуточной орбиты была построена полная теория движения ИСЗ с учетом всех возмущений. Описанием этой работы является известная книга Е.П.Аксенова «Теория движения искусственных спутников Земли», опубликованная в 1977 г. В конце 80-х активное участие в этой работе принимала группа томских специалистов во главе с В.А.Тамаровым (1983,1984). Программная реализация полученных аналитических алгоритмов принадлежит В.Н.Емельянову (1987) и В.А.Тамарову (Аксенов и др., 1988).

Первая практически применимая отечественная аналитическая теория движения ИСЗ была разработана В.В.Нестеровым (1984) для использования в программе MERIT. По своим точностным характеристикам она ориентирована на представление лазерных измерений расстояний до ИСЗ «Лагос». Теория была построена методом последовательных приближений Пикара, в качестве промежуточной орбиты использовалась задача Акснеса (см. гл. 5).

М.А.Вашковьяк (1971,1972,1983) разработал численно-аналитические теории движения резонансных ИСЗ, движущихся по почти круговым орбитам с

периодами 24 и 12 ч. При вычислении возмущений от несферичности Земли используется классический подход, который состоит в аналитическом учете короткопериодических возмущений элементов орбиты, связанных с орбитальным движением спутника и вращением Земли, и численном интегрировании осредненных уравнений, свободных от быстрых переменных. Осреднение уравнений выполнено методом Цейпеля. Учет возмущений от Луны, Солнца осуществляется по оригинальной методике, кратко описанной нами в гл. 6, при учете светового давления влияние экранировки спутника Землей не принимается во внимание.

Точность численно-аналитических методик расчета, построенных по этим теориям, на конце интервала в 100 оборотов объекта составляет для 24-часового спутника 500 м вдоль орбиты и 15 м по радиус-вектору и бинормали, а для 12-часового спутника — 40 м по радиус-вектору и 400 м вдоль орбиты и по бинормали.

С.М. Кудрявцевым (Kudryavtsev, 1995) построена полностью аналитическая теория движения ИСЗ пятого порядка с учетом возмущений от всех геодезических сил. Кроме того, этим же автором получено (Kudryavtsev, 2005) высокоточное разложение возмущающей функции, обусловленное притяжением Луны, Солнца и планет, и есть надежда, что построение полностью аналитической теории движения ИСЗ высокого порядка будет продолжено.

### 11.3. Решение главной проблемы движения ИСЗ методом преобразований Ли

Приведем пример применения аналитических методов в задачах динамики ИСЗ. Для этого рассмотрим решение главной проблемы движения ИСЗ, изложенной в гл. 4, методом преобразований Ли. Этот пример предложен К.В. Холщевниковым (1973,1985). Мы приводим его с исправлением некоторых небольших опечаток, имеющих в предыдущих изданиях.

В этой задаче с тремя степенями свободы функция Гамильтона равна

$$h = \frac{\mu}{2a} - J \frac{\mu A^2 P_2(\sin \delta)}{r^3}. \quad (11.1)$$

Здесь  $A$  — экваториальный радиус планеты;  $J$  — коэффициент при второй зональной гармонике; остальные обозначения стандартны. Оскулирующие элементы и координаты  $a, r, \dots$  считаются функциями канонических элементов Делоне  $L_K, l_K$ , где  $L_1 = \sqrt{\mu a}$ ,  $L_2 = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$ ,  $L_3 = \sqrt{\mu a(1-e^2)} \cos i$ , а  $l_1 = l$  — средняя аномалия;  $l_2 = g$  — аргумент перицентра;  $l_3 = \Gamma$  — прямое восхождение восходящего узла.

В качестве промежуточной орбиты выберем эллипс с вращающимися линиями апсид и узлов.

Прежде всего, выразим  $P_2(\sin \delta)$  через элементы, радиус-вектор и истинную аномалию  $\theta$ :



$$h = \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu A^2 J (2 - 3 \sin^2 I) a^3}{4a^3 r^3} + \frac{3\mu A^2 J \sin^2 I a^3 \cos(2\theta + 2g)}{4a^3 r^3}. \quad (11.2)$$

Первый член (11.2) зависит лишь от одной переменной  $L_1$ . Чтобы избежать вырождения, добавим к первому члену среднее значение следующих.

Непосредственным интегрированием легко получить:

$$\begin{aligned} M_l(a^3 r^{-3}) &= (1 - e^2)^{-3/2}, \\ M_l\{a^3 r^3 \cos 2(\theta + g)\} &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Формулы (11.3) показывают, что среднее по  $l = l_1$  не зависит от  $g = l_2$ , что делает задачу о движении спутника близкой к интегрируемой.

Представим  $h$  в форме

$$h = h_0 + \tau h_1 + \tau^2 h_2. \quad (11.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\mu}{2a} + \frac{\mu A^2 J (2 - 3 \sin^2 I)}{4a^3 (1 - e^2)^{3/2}}, \\ h_1 &= \frac{\mu A^2 J (2 - 3 \sin^2 I)}{4a^3} \left[ \frac{a^3}{r^3} - (1 - e^2)^{-3/2} \right] + \frac{3\mu A^2 J \sin^2 I a^3 \cos(2\theta + 2g)}{4a^3 r^3}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Решим теперь задачу с гамильтонианом (11.4) с точностью до  $\tau^2 = J^2$  включительно.

1. Будем обозначать старые и новые переменные одинаково, подразумевая, что  $H, \mathcal{H}, \partial H / \partial L, n, \dots$  выражены через новые (средние) элементы;  $h, \partial h / \partial L$  — через старые (оскулирующие).
2. Согласно (6.49)  $\mathcal{H}_0$  совпадает с  $H_0$ , т.е. с первым из выражений (11.5), где элементы считаются средними.

Вычислим средние движения

$$n_k = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial L_k}. \quad (11.6)$$

Учитывая зависимость  $L_k$  от кеплеровых элементов орбиты, получим

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{e\sqrt{\mu a}} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} I}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = \sqrt{\mu a^{-3}} \left\{ 1 + \frac{3}{4} \frac{A^2 J (2 - 3 \sin^2 I)}{a^2 (1 - e^2)^{3/2}} \right\}, \\ n_2 &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e\sqrt{\mu a}} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} I}{\sqrt{\mu a}} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = \frac{3}{4} \mu J A^2 \frac{4 - 5 \sin^2 I}{a^{1/2} (1 - e^2)^2}, \\ n_3 &= \frac{1}{\sin I \sqrt{\mu a} (1 - e^2)} \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J A^2 \cos I}{a^{7/2} (1 - e^2)^2}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

3. Согласно (6.57), связь между  $T_1$  и  $\mathcal{H}_0$  дается формулой

$$\sum_{k=1}^3 n_k \frac{\partial T_1}{\partial l_k} = H_1 - \mathcal{H}_1. \quad (11.8)$$

Откуда  $\mathcal{H}_1 = M_{l_1, l_2, l_3} H_1 = 0$ . Правая часть (11.7) не зависит от  $l_3$ . Поэтому можно считать  $\frac{\partial T_1}{\partial l_3} = 0$  и (11.8) переписывается как

$$n_1 \frac{\partial T_1}{\partial l} + n_2 \frac{\partial T_1}{\partial g} = H_1(l, g). \quad (11.9)$$

Остальные переменные, от которых зависит  $H_1$ , рассматриваются здесь как параметры. Функция  $H_1$  определяется второй из формул (11.5), где элементы считаются средними. Это значит, в частности, что  $r, \theta$  выражаются теперь через средние элементы по формулам кеплеровского движения.

Из теории линейных уравнений в частных производных известно, что общее решение (11.6) можно получить одной квадратурой

$$T_1 = \frac{1}{n_1} \int H_1 \left( l, \frac{n_2}{n_1} l + C \right) dl + \tilde{C}, \quad (11.10)$$

где  $\tilde{C}$  — произвольная функция, не зависящая от  $l, g$ . После интегрирования следует положить

$$C = g - \frac{n_2}{n_1} l.$$

Интеграл от первого слагаемого для  $H_1$  вычисляется элементарно переходом к истинной аномалии

$$\int \left[ \frac{a^3}{r^3} - (1 - e^2)^{-3/2} \right] dl = (1 - e^2)^{-3/2} (\theta - l + e \sin \theta). \quad (11.11)$$

Здесь использовано

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{(1 + e \cos \theta)^3}{(1 - e^2)^3}, \quad dl = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta.$$

Интеграл от второго слагаемого

$$\int \left( \frac{a^3}{r^3} \exp 2i\theta \right) \exp 2ig dl \quad (11.12)$$

не элементарен. Разложим его по степеням  $\frac{n_2}{n_1} \square J$ .

Для этого вычислим сначала

$$\begin{aligned} \psi = 2i \int \frac{a^3}{r^3} \exp 2i\theta dl &= 2i (1 - e^2)^{-3/2} \int \left\{ \exp 2i\theta + \frac{e}{2} \exp i\theta + \right. \\ &\left. + \frac{e}{2} \exp 3i\theta \right\} d\theta = (1 - e^2)^{-3/2} \left\{ \exp 2i\theta + e \exp i\theta + \frac{1}{3} e \exp 3i\theta \right\} + \text{const.} \end{aligned}$$

Постоянную определим из условия обращения в нуль среднего значения  $M_l \psi = 0$ .

Среднее значение экспоненты равно среднему значению косинуса (Козаи, 1962):

$$M_l \cos k\theta = \frac{(-e)^k}{1 + \sqrt{(1-e^2)^k}} (1 + k\sqrt{1-e^2}),$$

поэтому

$$\psi = (1-e^2)^{-3/2} \left\{ \exp 2i\theta + e \exp i\theta + \frac{e}{3} \exp 3i\theta + \frac{e^2(1+2\sqrt{1-e^2})}{3(1+\sqrt{1-e^2})^2} \right\}. \quad (11.13)$$

Интегрируя (11.12) по частям, получим

$$\int \left( \frac{a^3}{r^3} \exp 2i\theta \right) \exp 2ig \, dl = \frac{1}{2i} \psi \exp 2ig - \frac{n_2}{n_1} \int \psi \exp 2ig \, dl. \quad (11.14)$$

В последнем интеграле можно считать  $g = \text{const}$ , так как ошибка скажется лишь на возмущениях третьего порядка. После весьма громоздких выкладок (Холшевников, 1973) можно получить:

$$\Psi \equiv \int \psi \, dl = -\frac{2}{3e^2} [(\theta-1) - 2e \sin \theta] + \frac{i}{3e^2} \left\{ 2 \left[ -\ln \frac{2(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})(1+e \cos \theta)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] - \frac{e}{1+e \cos \theta} [e + (2+3e^2) \cos \theta + 4e \cos^2 \theta] \right\}. \quad (11.15)$$

Постоянная в неопределенном интеграле (11.15) выбрана из условия нулевого среднего

$$M_l \psi = 0. \quad (11.16)$$

Окончательно формула для  $T_1$  имеет вид

$$T_1 = \frac{\mu A^2 (2 - \sin^2 I)}{4a^3 (1-e^2)^{3/2} n_1} (\theta - l + e \sin \theta) + \frac{3\mu A^2 \sin^2 I}{8a^3 (1-e^2)^{3/2} n_1} \times \\ \times \left[ -\sin(2\theta + 2g) + 2 \sin(\theta + 2g) + \frac{e}{3} \sin(3\theta + 2g) + \frac{e_2(1+2\sqrt{1-e^2})}{3(1+\sqrt{(1-e^2)^2})} \sin 2g \right] + \\ \frac{\mu A^2 \sin^2 I n_2}{4a^3 n_1^2 e^2} \left\{ 2(\theta - 1 - 2e \sin \theta) \cos 2g + 2 \left[ -\ln \frac{2(1-e^2)}{(1+\sqrt{1-e^2})(1+e \cos \theta)} + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \right] \times \right. \\ \left. \times \sin 2g - \frac{e}{1+e \cos \theta} [e + (2+3e^2) \cos \theta + 4e \cos^2 \theta] \sin 2g \right\}.$$

4. Согласно (6.57), находим связь между  $T_2$  и  $\mathcal{H}_2$ :

$$n_1 \frac{\partial T_2}{\partial l} + n_2 \frac{\partial T_2}{\partial g} = F, \quad (11.17)$$

где

$$F = (H_1, T_1) + \frac{1}{2}(H_0, T_1, T_2) + H_2 - \mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}(H_1, T_1) + H_2 - \mathcal{H}_2, \quad (11.18)$$

откуда

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} M_{lg}(H_1, T_1).$$

При вычислении  $(H_1, T_1)$  достаточно получить лишь член нулевого порядка относительно  $J$ , т.е. положить  $n_2 = 0$  в (11.17). С такой точностью  $M_l(H_l, T_l)$  найдено К.В. Холшевниковым (1973). Усредняя по  $g$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \frac{3\mu^{3/2} A^4}{128n_1 a^{13/2}} (1-e^2)^{1/2} \times \left\{ 8\cos^2 I (4-5\sin^2 I) + \right. \\ & \left. + e^2 (8\cos^2 I - 5\sin^4 I) + 4\sqrt{1-e^2} (2-3\sin^2 I)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Функция  $F$  легко может быть найдена, но мы не будем проводить громоздких выкладок. Если учитывать возмущения лишь от зональной части геопотенциала, то  $F$  представит собой линейную комбинацию членов вида

$$F_1 - \exp i(k_1\theta + k_2g), \quad (11.20)$$

$$F_2 = r^{-k_4} (\theta - 1) \exp i(k_1\theta + k_3g) \quad (k_3 = 0, \pm 2). \quad (11.21)$$

При  $k_1 \neq 0$  соответствующие члены  $T_2$  вычисляются простой квадратурой, так как можно в (11.21) положить  $n_2 = 0$  и брать интеграл при  $g = \text{const}$ :

$$T_2 \sim \frac{1}{n_1} \int F_{1,2} dl = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{n_1} \int \frac{F_{1,2} d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}. \quad (11.22)$$

Интеграл от  $F_2$  не элементарен. Однако, как было замечено К. Акснессом (Холшевников, 1973), неэлементарные части интегралов от  $F_2$  (11.21) при различных  $k_1, k_3$  взаимно сокращаются.

Функция  $F_2$  не содержит членов с  $k_1 = 0$ , но в  $F_1$  такие члены присутствуют.

Уравнения для соответствующего слагаемого  $T_2$  имеет вид

$$n_1 \frac{\partial T_2}{\partial l} + n_2 \frac{\partial T_2}{\partial g} = C \exp i k_2 g, \quad (11.23)$$

где  $k_2 \neq 0$ , поскольку среднее значение  $F$  равно нулю. Общее решение (11.23), имеющее нулевое среднее, есть

$$T_2 = \frac{C}{ik_2 n_2} \exp i k_2 g \quad (11.24)$$

и содержит  $n_2$  в знаменателе. Поэтому использованный метод не применим в окрестности (порядка  $10'$ ) критического наклона, где  $n_2 \approx 0$ . Впрочем, при  $n_2 \neq J_2$  можно точное решение (11.23) заменить приближенным непериодическим

$$T_2 = \frac{Cl}{n_1} \exp ik_2 g. \quad (11.25)$$

Однако в таком случае появятся смешанные возмущения второго порядка у всех элементов, кроме  $a$ . Возмущения большой полуоси определяются производной  $\frac{\partial T_2}{\partial l}$  и не содержат  $l$  вне знака тригонометрических функций.

Итак,  $T_2$  может быть получена и выражена через элементарные функции.

5. Полученный новый гамильтониан  $\mathcal{H}$  не зависит от  $l_K$ , поэтому система для средних элементов интегрируется непосредственно:

$$\left. \begin{aligned} a, e, i &= \text{const}, \\ l_K &= l_K^0 + \omega_K (t - t_0). \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

Здесь средние движения  $\omega_K$  могут быть выражены через кеплеровские элементы по формулам (11.7), где следует  $\mathcal{H}_0$  заменить на  $\mathcal{H}$ .

6. Выразим оскулирующие элементы через средние. Обозначая разность оскулирующих и средних элементов символом  $\delta$ , получим из (6.57)

$$\left. \begin{aligned} \delta L_K &= \frac{\partial T}{\partial l_K} + \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial l_K} T_1 \right), \\ \delta l_K &= -\frac{\partial T}{\partial L_K} - \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial L_K} T_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

7. Выразим средние элементы через оскулирующие. Для этого достаточно поменять их местами и изменить знак  $T$

$$\left. \begin{aligned} \delta L_K &= \frac{\partial T}{\partial l_K} - \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial l_K} T_1 \right), \\ \delta l_K &= -\frac{\partial T}{\partial L_K} + \frac{\tau^2}{2} \left( \frac{\partial T_1}{\partial L_K} T_1 \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.28)$$

#### 11.4. Построение численно-аналитических алгоритмов прогнозирования движения ИСЗ

Рассмотрим еще один пример применения метода Хори–Депри, но уже для построения численно-аналитического алгоритма прогнозирования движения ИСЗ. Причем в качестве промежуточной орбиты выбрана задача двух неподвижных центров, а реализация алгоритм преобразований Ли осуществляется в кеплеровых оскулирующих элементах. На такую возможность указывал К.В. Холшевников (1973), алгоритмически эта возможность была реализована

Т.С. Бороненко (1975). Остановимся прежде всего на этом алгоритме (Бордовичина и др., 1991).

#### 11.4.1 Алгоритм преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства

Движение ИСЗ в произвольных переменных фазового пространства может быть описано с помощью следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_p &= \sum_{s=1}^c A_{p,c+s} \frac{\partial f(\sigma, \nu)}{\partial \sigma_{s+c}}, \\ \dot{\sigma}_{p+s} &= \sum_{s=1}^c B_{s,c+p} \frac{\partial f(\sigma, \nu)}{\partial \sigma_s}, \\ A_{p,c+s} &= - \sum_{q=1}^c \frac{\partial \sigma_p}{\partial l_q} \frac{\partial \sigma_{c+p}}{\partial l_{c+q}}, \\ B_{s,c+p} &= \sum_{q=1}^c \frac{\partial \sigma_s}{\partial l_q} \frac{\partial \sigma_{c+p}}{\partial l_{c+q}}, \\ &(p = 1, \dots, c; \quad c = 3).\end{aligned}\tag{11.29}$$

Здесь  $\sigma$  — вектор переменных фазового пространства с компонентами  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2c}$ ;  $l$  — вектор канонических переменных с компонентами  $l_1, \dots, l_{2c}$ ;  $\nu$  — малый параметр;  $f$  — силовая функция, представляемая следующим образом:

$$f = f_1 + R,\tag{11.30}$$

где  $f_1$  — потенциал невозмущенного движения;  $R$  — возмущающая функция, которая является суммой потенциалов различных возмущений,

$$R = \sum_{i=1}^k R_i.\tag{11.31}$$

Функции  $R_i$  — тригонометрические ряды, которые будут определены ниже.

Для того чтобы получить квазивековую систему дифференциальных уравнений, необходимо совершить такое преобразование  $\sigma_i \rightarrow \bar{\sigma}_i$ , чтобы новая силовая функция  $\bar{f}(\bar{\sigma}, \nu)$  не содержала быстроосциллирующих переменных. Разбиение переменных на «быстрые» и «медленные» часто является условным, и решается этот вопрос в процессе построения конкретной методики, рассчитанной на определенный класс ИСЗ.

Алгоритм усредняющих преобразований Ли для произвольных переменных фазового пространства состоит в следующем. Представим силовую функцию  $f(\sigma, \nu)$  в виде усеченного ряда:

$$f = f_{0,1} + \nu f_{0,2} + \dots + \nu^{k-1} f_{0,k}.\tag{11.32}$$

Из теории преобразований Ли для канонических систем дифференциальных уравнений известно, что расчетная схема алгоритма этого метода в конечном итоге сводится к последовательному вычислению скобок Пуассона, возни-

кающих в результате применения дифференциального оператора Ли к некоторым аналитическим функциям  $f_{0,j}$ , входящим в соотношение (11.32). Оператор Ли для канонических систем, как было показано выше, имеет вид

$$D_\eta f_{i,j} = \sum_{p=1}^c \left( \frac{\partial T_{0,\eta}}{\partial l_p} \cdot \frac{\partial f_{i,j}}{\partial l_{p+c}} - \frac{\partial T_{0,\eta}}{\partial l_{p+c}} \cdot \frac{\partial f_{i,j}}{\partial l_p} \right), \quad (11.33)$$

где  $T_{0,\eta}$  —  $\eta$ -й коэффициент в разложении производящей функции  $T(l, v)$ ,

$$T = vT_{0,1} + v^2T_{0,2} + \dots + v^kT_{0,k}. \quad (11.34)$$

Для того чтобы определить оператор Ли для произвольных переменных фазового пространства, нужно сделать подстановку  $l = l(\sigma)$  в соотношение (11.33).

В результате получаем следующее выражение:

$$D_\eta^* f_{i,j} = \sum_{p=1}^{2c} T_{p\eta} \frac{\partial f_{i,j}}{\partial \sigma_p}, \quad (11.35)$$

в котором, как легко показать, функции  $T_{p,\eta}$  по форме совпадают с правыми частями дифференциальных уравнений (11.29). Таким образом, для вычисления функций  $T_{p,\eta}$  достаточно подставить в правые части уравнений (11.29) вместо функции  $f$ ,  $\eta$ -й член разложения производящей функции, выраженный в переменных  $\sigma_i$ .

Формулы замены переменных можно представить с помощью оператора  $D_\eta^*$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_q &= \tilde{\sigma}_q + \sum_{c=1}^k \sigma_{0,p}^{(1)}(\sigma, t) \quad (q = 1, \dots, 6), \\ \sigma_{0,p}^{(1)} &= \sum \sigma_{i,j} \quad (i = 1, 2, \dots, p; j = 0, 1, \dots, p; i + j = p), \\ \sigma_{i,j} &= \frac{1}{i} \sum_{\xi=0}^j D_{\xi+1}^* \sigma_{i-1, j-\xi}. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Новая силовая функция  $\tilde{f}(\tilde{\sigma}, v)$  в результате выполненной замены переменных определится выражением

$$\tilde{f} = \tilde{f}_{0,1} + v\tilde{f}_{0,2} + \dots + v^{k-1}\tilde{f}_{0,k}, \quad (11.37)$$

в котором функции  $\tilde{f}_{0,1}, \dots, \tilde{f}_{0,k}$  не содержат быстроосциллирующих переменных. Последнее достигается специальным выбором производящей функции.

Квазивековая система дифференциальных уравнений для переменных  $\tilde{\sigma}$  и силовой функции  $\tilde{f}$  запишется так

$$\tilde{\sigma}_p = \sum_{s=1}^c \tilde{A}_{p,s+c} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_{c+s}}, \quad \tilde{\sigma}_{p+c} = \sum_{s=1}^c \tilde{B}_{s,c+p} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\sigma}_s}. \quad (11.38)$$

Преобразование переменных (11.36) связывает системы уравнений (11.29) и (11.37). Из теории преобразований Ли известно, что для получения обратных преобразований

$$\tilde{\sigma}_p = \sigma_p + \sum_{c=1}^k \sigma_{0c}(\sigma, \nu) \quad (11.39)$$

достаточно изменить в соотношениях (11.35) знак производящей функции на противоположный.

Вышеописанный алгоритм дает общий подход к построению квази-вековой системы дифференциальных уравнений движения ИСЗ. Конкретное задание функции  $l = l(\sigma)$  определяет тип переменных, в которых строится методика прогнозирования.

#### **11.4.2. Построение полуаналитической методики расчета движения резонансных ИСЗ типа «Навстар» в эйлеровых элементах**

Примем для ИСЗ типа «Навстар» следующие значения периода обращения, эксцентриситета и наклона к плоскости экватора:

$$T = 43085 \text{ с}, \quad e = 0.01, \quad i = 63^\circ.4.$$

В процессе построения аналитической теории движения таких спутников возникает трудность, связанная с появлением малых знаменателей в долгопериодических членах. В то же время универсальные методы точного численного интегрирования, для которых такой проблемы не существует, могут оказаться недостаточно оперативными для пользователей навигационной системы. Очевидно, что в этом случае удобнее применить к исследованию движения ИСЗ полуаналитический метод.

Как показано в работе (Бордовицына и др., 1993), наибольшие возмущения в движении таких спутников вызывают гармоника геопотенциала  $V_{2,0}$  и лунно-солнечное притяжение. В излагаемой ниже приближенной методике (Бордовицына и др., 1991) рассматриваются только эти возмущения, причем влияние гармоник  $V_{2,0}$  учитывается введением симметричного варианта промежуточной орбиты обобщенной задачи двух неподвижных центров.

Возмущения второго порядка относительно сжатия для указанной промежуточной орбиты можно описать с помощью системы дифференциальных уравнений (6.14), пренебрегая в них членами порядка  $\varepsilon^2 \gamma$ . Здесь  $\varepsilon$  — параметр сжатия, определяемый формулой (5.19);  $\gamma$  — параметр, характеризующий малость возмущений функции  $R$ . Для того чтобы устранить в этих уравнениях особенность, связанную с малым эксцентриситетом, введем вместо переменных  $l, g, h$  величины

$$M = l, \quad F = M + g, \quad \lambda' = M + g + h.$$

Для удобства использования машинных программ, оперирующих рядами Пуассона, заменим всюду выражение  $\sqrt{1-e^2}$  его разложением, ограничиваясь квадратом эксцентриситета, и введем величины  $a^* = \sqrt{a}, b^* = \sqrt{fm_0}$ , где  $a$  — большая полуось;  $fm_0$  — гравитационная постоянная Земли. Тогда система уравнений относительно переменных  $a^*, e, i, M, \lambda'$  примет вид



$$\begin{aligned}
\frac{da^*}{dt} &= \frac{1}{b^*} \left\{ \frac{\partial R}{\partial M} + \frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial \lambda'}{\partial R} \right\}, \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1}{a^* b^*} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{e}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial F} + \frac{\partial R}{\partial \lambda'} \right) \right\}, \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1+\frac{1}{2}e^2}{a^* b^* s} \left\{ \alpha \frac{\partial R}{\partial F} - (1-\alpha) \frac{\partial R}{\partial \lambda'} \right\}, \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1}{a^* b^*} \left\{ \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial R}{\partial e} + a^* \frac{\partial R}{\partial a^*} \right\}, \\
\frac{dF}{dt} &= n' + \frac{1}{a^* b^*} \left\{ \frac{e}{2} \frac{\partial R}{\partial e} - \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \frac{\alpha}{s} \frac{\partial R}{\partial i} - a^* \frac{\partial R}{\partial a^*} \right\}, \\
\frac{d\lambda'}{dt} &= n'' + \frac{1}{a^* b^*} \left\{ \frac{e}{2} \frac{\partial R}{\partial e} + \left( 1 + \frac{1}{2} e^2 \right) \frac{1-\alpha}{s} \frac{\partial R}{\partial i} - a^* \frac{\partial R}{\partial a^*} \right\},
\end{aligned} \tag{11.40}$$

где, как и выше,  $\alpha = \cos i$ ;  $s = \sin i$ ,  $n = n_1$ ;  $n' = n_1 + n_2$  и  $n'' = n_1 + n_2 + n_3$  определяются по формулам промежуточного движения и с точностью до  $\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}
n &= \frac{b^*}{a^{*3}} \frac{n}{1-\lambda}, \\
n' &= n(1+\nu), \\
n'' &= n(1+\nu+\mu).
\end{aligned} \tag{11.41}$$

Здесь  $\lambda, \nu, \mu$  вычисляются по формулам (5.21) при  $\sigma = 0$

$$n = 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 (1-e^2)(1-s^2) \left\{ 1 - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \left[ 1 + 11s^2 + e^2(5s^2 - 1) \right] \right\}.$$

Для возмущающей функции  $R$ , используя разложение, полученное Н.В. Емельяновым (1980), с учетом введенных выше замен переменных получим

$$\begin{aligned}
R &= \frac{fm'}{a^{*2}} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k \sum_{q=-\infty}^{\infty} (2-\delta_{j,0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \left( \frac{a^{*2}}{a'} \right)^{k+1} \times \\
&\times F_{k,j,i}(i) X_{k-2,l+q}^{k,k-2l}(e) (S_{k,j} \sin D + C_{k,j} \cos D),
\end{aligned} \tag{11.42}$$

где

$$D = (k - 2l - j)F + qM + j\lambda';$$

$fm'$  и  $a'$  — гравитационная постоянная и большая полуось возмущающего тела соответственно;  $\delta_{j,0}$  — символ Кронекера;  $S_{k,j}$  и  $C_{k,j}$  — тригонометрические ряды, содержащие пять основных угловых аргументов в движении Луны и Солнца:  $l_1, l', F', D', \Gamma$ .

Исключение быстрой переменной  $M$  из возмущающей функции выполним по вышеописанному алгоритму преобразований Ли, ограничиваясь первым приближением. В этом случае схема алгоритма особенно проста и формально сводится к следующим действиям:

1. Выделяется короткопериодическая часть возмущающей функции

$$\tilde{R} \Phi = R - \tilde{R}, \quad (11.43)$$

где  $\tilde{R}$  — функция, в которой отсутствуют члены короткого периода, т.е. члены, для которых  $k - 2l + q \neq 0$ .

Соответствующая (11.42) функция  $\tilde{R}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{R} = & \frac{fm'}{a^{*2}} \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{l=0}^k (2 - \delta_{j,0}) \frac{(k-j)!}{(k+j)!} \left( \frac{a^{*2}}{a'} \right)^{k+1} \times \\ & \times F_{k,j,l}(i) X_0^{k,k-2l}(e) (S_{k,j} \sin D + C_{k,j} \cos D), \end{aligned} \quad (11.44)$$

где

$$D = (k - 2l - j)F + qM - (k - 2l)M + j\lambda', \quad (11.45)$$

а общий член функции  $\Phi$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} C_{\Phi} = & A(a^*, e, i) \cos(k_1 l_1 + k_2 l' + k_3 F' + k_4 D' + k_5 \Gamma + k_6 M \\ & + k_7 F + k_8 \lambda'). \end{aligned} \quad (11.46)$$

2. Определяется производящая функция метода преобразований Ли

$$T = \frac{\tilde{\Phi}}{\sum_{i=1}^8 k_i v_i}, \quad (11.47)$$

где  $\tilde{\Phi}$  получается из  $\Phi$  заменой  $\cos$  на  $\sin$ ; величины  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_8$  есть средние изменения аргументов  $l_1, l', F', D', \Gamma$  и задаются рациональными числами, а  $v_6 = n, v_7 = n', v_8 = n''$  и представляют собой средние изменения угловых элементов орбиты спутника  $M, F$  и  $\lambda'$  соответственно.

Общий член производящей функции  $T$  имеет вид

$$S_T = \frac{A(a^*, e, i)}{\varphi_j + k_6 n + k_7 n' + k_8 n''} \sin(k_1 l_1 + k_2 l' + k_3 F' + k_4 D' + k_5 \Gamma + k_6 M + k_7 F + k_8 \lambda'), \quad (11.48)$$

где  $\varphi_j = \sum_{i=1}^5 k_i v_i$  — некоторые рациональные числа.

3. Далее находятся частные производные функции  $T$  по элементам  $a^*, e, i, M, F, \lambda'$ , подстановка которых в правые части уравнений (11.40) определяет соотношения, связывающие оскулирующие (старые) переменные  $a^*, e, i, F, \lambda', M$  со средними (новыми)  $\tilde{a}^*, \tilde{e}, \tilde{i}, \tilde{F}, \tilde{\lambda}', \tilde{M}$  переменными усредненной задачи.

4. И наконец, подстановка в уравнения (11.40) усредненной возмущающей функции  $\tilde{R}$  дает квазивековую систему дифференциальных уравнений для средних элементов орбиты спутника.

Для числовых расчетов была выбрана модель орбиты с набором угловых элементов, при которых лунно-солнечные возмущения на 30-суточном интервале являются наибольшими и составляют в пространственном положении

спутника величину  $\sim 130$  км. Оптимальная величина шага интегрирования квазивицековых уравнений равнялась 10 оборотам спутника.

**Таблица 11.1. Сопоставление результатов, полученных численным и полуаналитическим методами**

$t - t_0$ (с)	Метод	Векторы положения и скорости			
861700	A–M	$\mathbf{x}$	12194.795	21779.195	8278.547
		$\dot{\mathbf{x}}$	-1.08075	-1.849256	3.274225
	ПМР	$\mathbf{x}$	0.907	0.007	0.758
		$\dot{\mathbf{x}}$	0.00031	0.000075	0.000193
1723400	A–M	$\mathbf{x}$	-12152.231	21714.035	8509.117
		$\dot{\mathbf{x}}$	-1.072501	-1.877213	3.260992
	ПМР	$\mathbf{x}$	0.303	0.044	0.343
		$\dot{\mathbf{x}}$	0.000492	0.000023	0.000068
2585100	A–M	$\mathbf{x}$	-12110.249	21643.438	8744.787
		$\dot{\mathbf{x}}$	-1.063392	-1.905728	3.247462
	ПМР	$\mathbf{x}$	0.319	0.007	5.030
		$\dot{\mathbf{x}}$	0.000070	0.000036	0.000031

В табл. 11.1 приведены значения прямоугольных координат и компонент скорости, полученных при помощи полуаналитической методики расчета (ПМР) и численным интегрированием метода Адамса–Мультона (A–M). В полуаналитической методике учтены вторая зональная гармоника геопотенциала, а также 1-й параллактический член потенциала Луны. В эталонном расчете учтены гармоника  $V_{2,0}$  и полный лунно-солнечный потенциал. Для значений координат и компонент скорости, полученных при помощи ПМР, выписаны только разности между решениями A–M и ПМР.

## **12. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ИСЗ**

### **12.1. Вводные замечания**

Рассмотрим здесь примеры использования численных методов при решении различных прикладных задач динамики ИСЗ. Следует сказать, что численные методы очень широко применяются при разработке моделей функционирования ИСЗ и систем ИСЗ, при разработке высокоточного программного обеспечения для определения параметров движения ИСЗ по данным наблюдений, для решения задач геодинамики и космической геодезии.

Большим достоинством численных моделей является их полная независимость от значений начальных параметров движения ИСЗ, поэтому они особенно удобны в тех практических задачах, где производится постоянное уточнение параметров движения по данным наблюдений, т.е. во всех задачах слежения за объектами. А такие задачи присутствуют в любом космическом эксперименте и при решении любых технических задач с использованием ИСЗ.

Независимость численных моделей от значений начальных параметров движения обуславливает их успешное применение при проектировании космических систем и в исследовательских задачах, связанных с прогнозированием движения и функционирования систем ИСЗ и КА, а также при оптимизации алгоритмов в процессе разработки программно-математического обеспечения космических систем. Какими бы аналитическими или полуаналитическими алгоритмами вы ни пользовались при разработке программно-математического обеспечения, вы обязательно захотите проверить свои алгоритмы на численных моделях.

Так что можно сказать, что численные методы и численные модели применяются повсеместно в практике работ, связанных с проектированием и использованием систем ИСЗ и КА.

### **12.2. Высокоточные численные модели движения ИСЗ**

Для решения на основе современных высокоточных наблюдений задачи определения параметров движения ИСЗ, а также задач геодинамики необходимо иметь модели движения, превосходящие наблюдения по точности, по крайней мере в три раза. Только в этом случае, как показано в работе (Черницов, Тамаров, 2003), полученные методом наименьших квадратов оценки определяемых параметров будут несмещенными. В противном случае ошибка модели попадет в оценку определяемых величин. Поэтому современные высокоточные численные модели должны учитывать влияние всех сил, действующих на ИСЗ, включая слабые возмущения. Алгоритмы, позволяющие моделировать действие этих сил, описаны нами в гл. 8 этого учебного пособия.

В настоящее время все организации, занимающиеся обработкой современных спутниковых наблюдений, имеют либо собственные, либо приобретенные высокоточные модели движения ИСЗ. В 80–90-х гг. прошлого столетия широко использовались в отечественной практике три высокоточные модели движения ИСЗ: «Новосибирская модель», разработанная в НИГАИКе (ныне

СГГА) Ю.В. Сурниным, С.В. Кужелевым и др. (1977), модель «Киев-Геодинамика», разработанная в ГАО НАНУ В.К. Тарадием и М.Л. Цесисом (1984), и «Численная модель движения ИСЗ», разработанная Т.В. Бордовицкой, Н.А. Шарковским и др. в НИИ ПММ при Томском университете (1984, 1992). Эти три модели и сейчас используются для обработки наблюдений и исследования движения ИСЗ в ряде организаций. Однако по современным требованиям они нуждаются в уточнении моделей действующих на ИСЗ сил в соответствии с новыми IERS-соглашениями и учета ряда слабых возмущений, влияние которых становится заметным при использовании высокоточных наблюдений. Обновление томской программы уже предпринято ее авторами (Бордовицына и др., 2004).

Упрощенный вариант программы «Численная модель движения ИСЗ», предназначенный для дистанционного решения модельных задач динамики ИСЗ, входит в один из разделов сайта <http://solar.tsu.ru>. Ниже мы приведем различные примеры использования «Численной модели движения ИСЗ» в решении задач динамики ИСЗ и прежде всего рассмотрим задачу исследования структуры орбитальных возмущений ИСЗ.

### 12.3. Методика численного исследования структуры возмущений и ее применение

Рассмотрим методику численного исследования структуры возмущений для ИСЗ.

Пользуясь свойством аддитивности возмущающих ускорений, которые вызываются действием всех сил, рассмотренных нами в гл. 4, уравнения (3.1) перепишем в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} = \sum_k \mathbf{G}_k, \quad (12.1)$$

где  $U_0$  — потенциал выбранной промежуточной орбиты;  $\mathbf{G}_k$  ( $k=1,2,3,\dots$ ) — возмущающее ускорение, создаваемое какой-либо одной  $k$ -й силой  $\mathbf{F}_k$ . В качестве характеристики возмущений, обусловленной действием силы  $\mathbf{F}_k$ , возьмем модуль разности

$$\Delta r = \left( \sum_{i=1}^3 \Delta x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (12.2)$$

векторов решений, полученных с учетом и без учета оцениваемого возмущающего фактора, так что

$$\Delta x_i = (x_i)_k - (x_i)_0, \quad i=1,2,3, \quad (12.3)$$

$(x_i)_0$  — некоторое опорное решение, соответствующее уравнениям (12.1) при равенстве правых частей нулю;  $(x_i)_k$  — решение уравнения вида

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{G}_k. \quad (12.4)$$

При такой оценке возмущений вне поля зрения остаются так называемые комбинированные возмущения, обусловленные совместным влиянием различных возмущающих факторов. По величине эти возмущения значительно меньше каждого из составляющих возмущений. Оценку комбинированных возмущений, обусловленных действием сил  $F_k$  и  $F_j$ , можно получить сравнением решений  $(x_i)_k$  уравнений (12.4) с решением  $(x_i)_{k,j}$  уравнений

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{G}_k + \mathbf{G}_j.$$

В результате получим оценку смешанных возмущений

$$\Delta x_i = (x_i)_{k,j} - (x_i)_k.$$

Чтобы включить в оценку (12.3) самые крупные комбинированные возмущения, вызванные совместным влиянием сжатия с другими возмущающими факторами, можно в качестве  $U_0$  взять потенциал задачи, определяющий движение спутника в поле сжатого сфероида.

Разность решений уравнений (12.1) и уравнений невозмущенного движения дает оценку совокупного влияния возмущений в прямоугольных координатах спутника.

## 12.4. Исследование структуры орбитальных возмущений ИСЗ различных классов орбит

### 12.4.1. Исследование орбитальных возмущений геодинимических ИСЗ с высотами полета выше 300 км

Геодинимическими ИСЗ принято называть неуправляемые хорошо отцентрированные объекты сферической формы, летящие в диапазоне высот от 300 км и выше. Эти объекты не несут на себе солнечных батарей или каких-то других приборов. Как правило, они представляют собой латунные шарики, покрытые уголковыми отражателями для наблюдения этих объектов с помощью лазерных дальномеров. Эти спутники запускаются для целей геодезии, а также для исследования динамических процессов, которые происходят в теле Земли, отсюда и их название.

Для исследования возмущений от гармоник геопотенциала выберем девять моделей движения ИСЗ, отличающихся высотой полета (табл. 12.1).

Таблица 12.1. Параметры движения

$H$ (км)	$a$ (км)	$e$	$i$ (°)	$T$ (с)
300	6678.13629	0.001	62.8	5431
500	6878.13629	0.001	62.8	5676
800	7178.13629	0.001	62.8	6052
1200	7578.13629	0.001	62.8	6565
1600	7978.13629	0.001	62.8	7091
2200	8578.13629	0.001	62.8	7906
3000	9378.13629	0.001	62.8	9038
4100	10738.13629	0.001	62.8	10674
5900	12300.00000	0.040	109.8	13680

Примечание:  $H$  — высота полета спутника;  $a$  — большая полуось орбиты;  $e$  — эксцентриситет;  $i$  — наклон орбиты к плоскости экватора;  $T$  — период обращения спутника. Высота полета последнего спутника совпадает с высотой полета спутника «Лагеос», используемого для решения задач геодинамики на основе лазерных наблюдений этого объекта.

Для получения оценок влияния гармоник высокого порядка был проведен численный эксперимент на интервале времени в 10 оборотов спутника.

В качестве показателя влияния гармоник высокого порядка был принят вклад каждой следующей группы гармоник 10 порядков относительно предыдущих. Для этого рассчитывались координаты спутника на некоторой сетке исследуемого временного интервала с учетом и без учета указанной группы гармоник и определялся максимум разностей этих координат. Оценка влияний гармоник от 20 до 360 порядков приведена на рис. 12.1–12.9. Здесь же показан уровень численной ошибки метода, за пределами которого учет влияния гармоник геопотенциала становится неопределенным.

Графики, приведенные на рис. 12.1–12.9, показывают, что с увеличением порядка влияние гармоник убывает по степенному закону. Графики позволяют определить границу, до которой целесообразно производить оценку влияния возмущений, эта граница обусловлена ошибкой численного моделирования. Так, для спутника с высотой полета 300 км достаточно взять разложение гравитационного потенциала до 290-го порядка. Для спутника с высотой полета 1600 км этот порядок будет равен 60. Для спутников с высотой полета 5900 км достаточно взять порядок, равный 30. Сводный график представлен на рис. 12.10. Данными, приведенными на рис. 12.1–12.10, можно пользоваться для выбора числа гармоник, необходимого для достижения заданной точности прогнозирования движения.

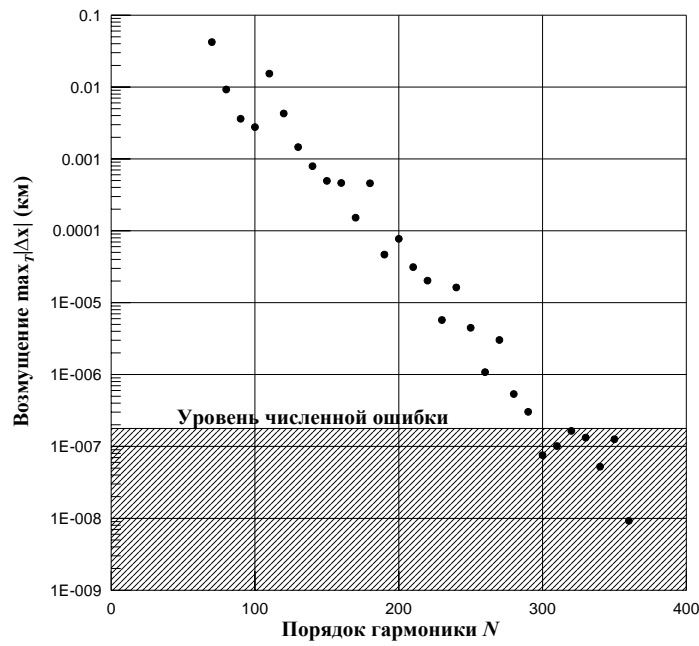


Рис.12.1. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 300$  км

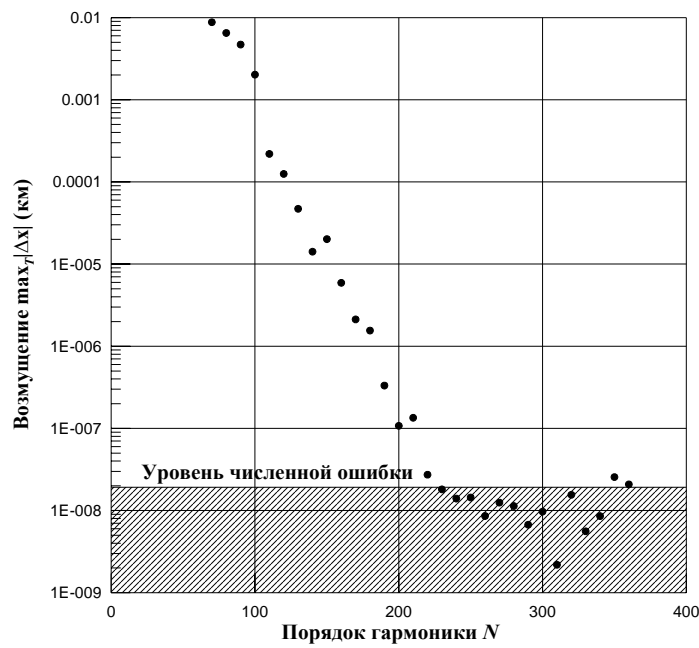


Рис.12.2. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 500$  км



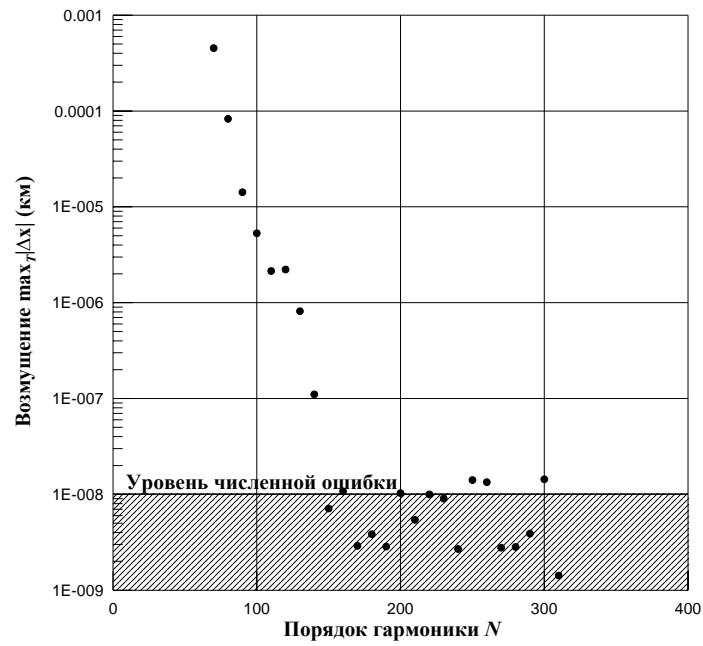


Рис.12.3. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 800$  км

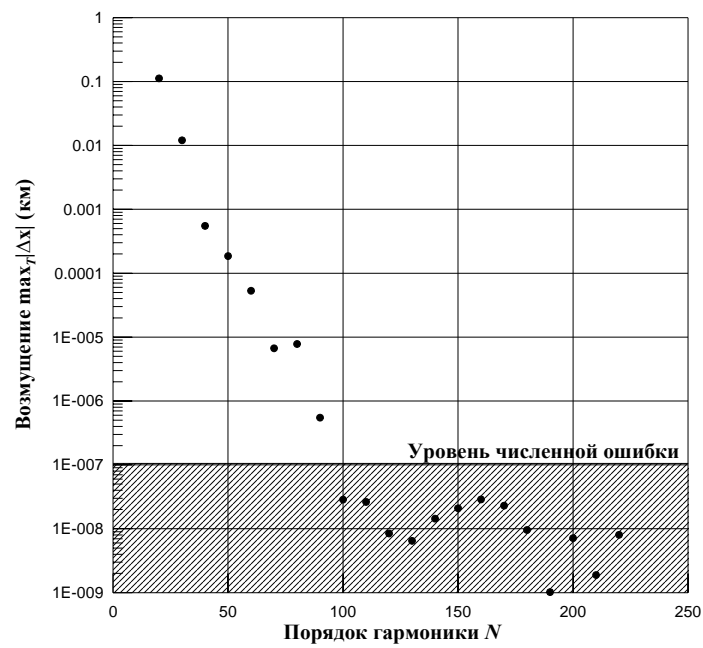


Рис. 12.4. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 1200$  км

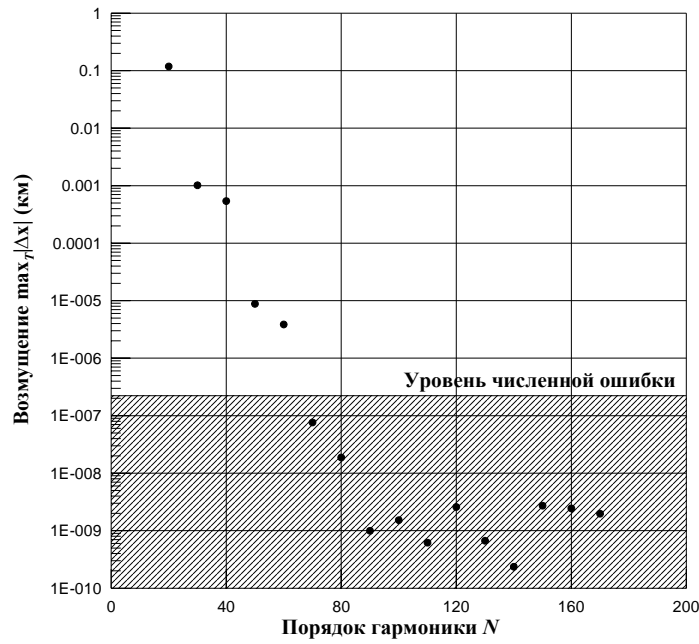


Рис. 12.5. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 1600$  км

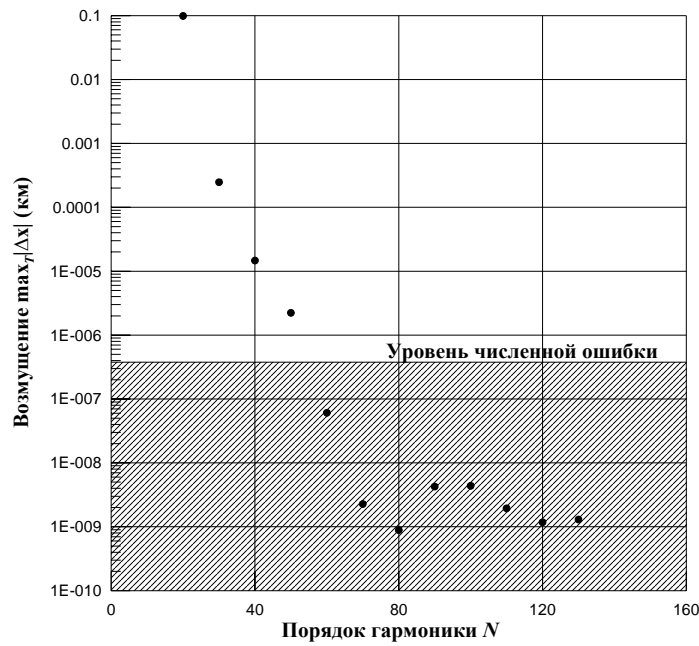


Рис. 12.6. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 2200$  км

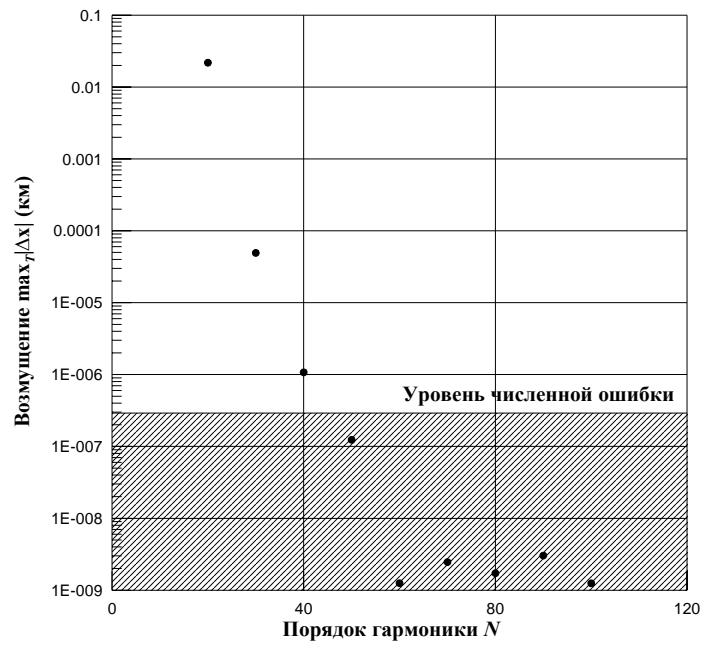


Рис. 12.7. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 3000$  км

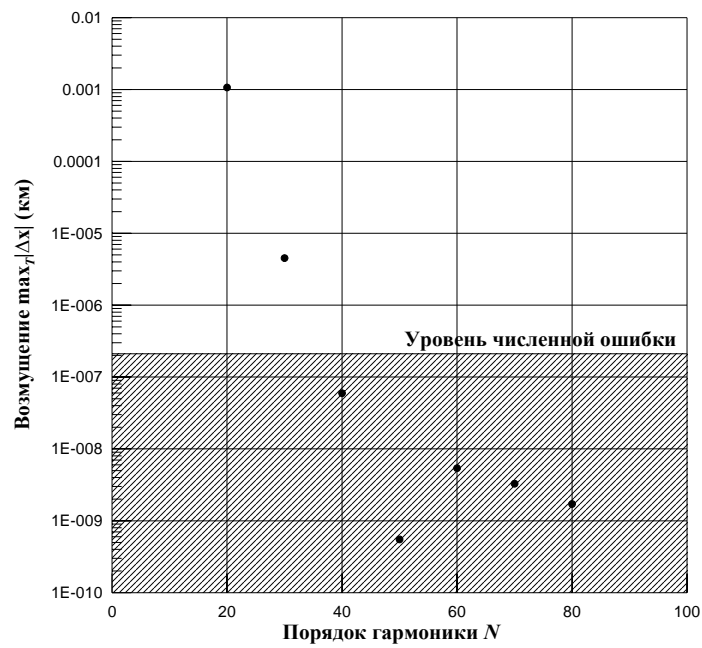


Рис.12.8. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 4100$  км

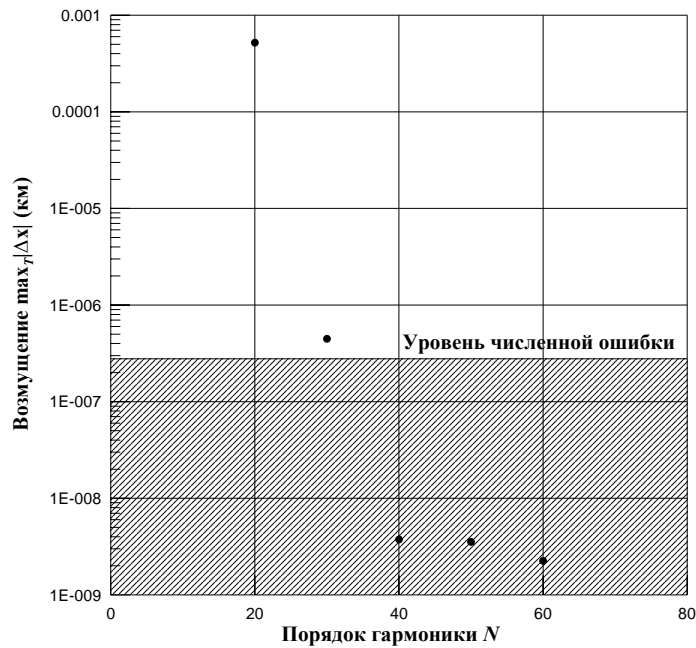


Рис.12.9. Оценка влияния высоких гармоник геопотенциала.  $H = 5900$  км

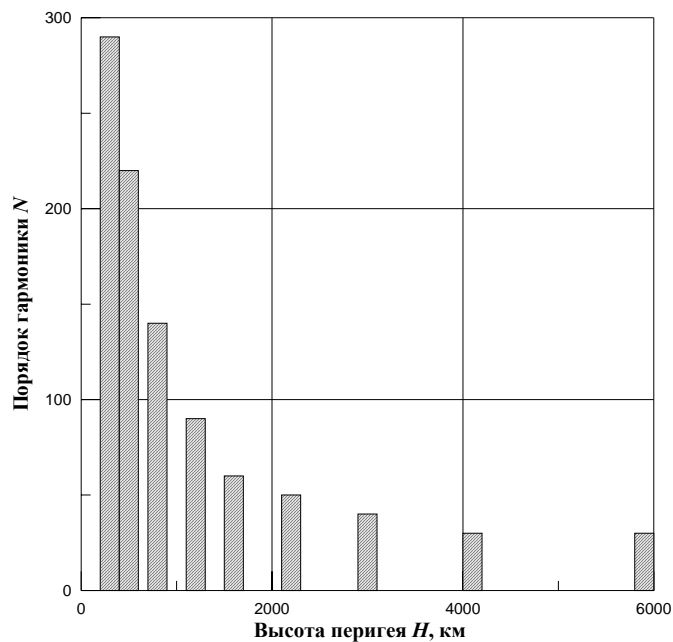


Рис.12.10. Зависимость числа значимых гармоник от высоты перигея спутника

Дадим описание структуры других возмущающих сил, действующих на ИСЗ с высотами полета от 300 км.

Безусловно, главным возмущающим фактором, действующим на движение спутников с высотами полета от 300 до 1300 км, является атмосфера. Причем влияние это настолько велико, что спутники с высотами полета 300 и 350 км, имеющие почти круговые орбиты, успевают войти в плотные слои атмосферы за первые сутки своего существования.

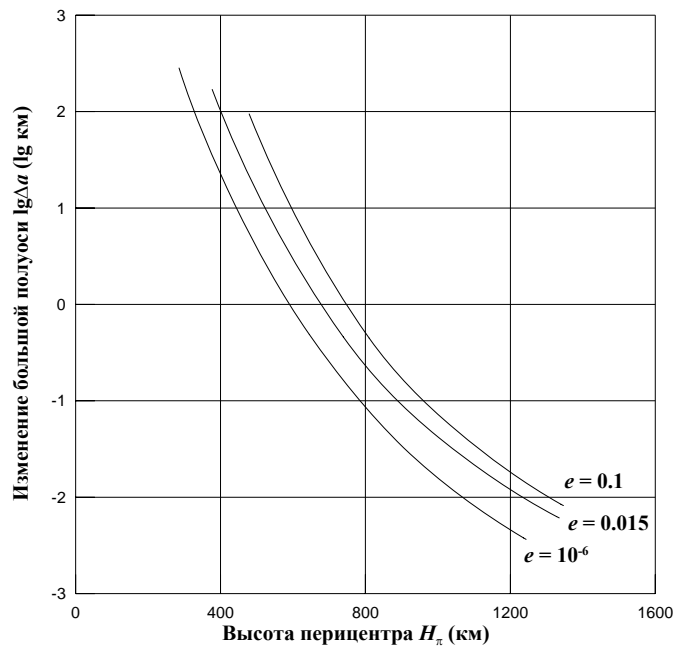


Рис.12.11. Зависимость изменения большой полуоси от высоты полета спутника. Интервал времени 1 сут.

На рис.12.11 (Бордовицына и др.,1991) показано изменение большой полуоси спутника под действием атмосферы за одни сутки. Изменение дано для трех объектов с различными эксцентриситетами орбит. Значения эксцентриситетов приведены на графике.

Значительную роль в изменении плотности атмосферы играет, как известно, солнечная активность, главным показателем которой может служить интенсивность  $F_{10.7}$  потока радиоизлучения на волне 10.7 см. На рис. 12.12 показано изменение большой полуоси орбиты спутника с эксцентриситетом  $e = 0.015$  под действием атмосферы при различных значениях индекса солнечной активности  $F_{10.7}$ . В качестве единицы измерения  $F_{10.7}$  выбрана величина, равная  $10^{-22}$  Вт/м<sup>2</sup> Гц. Оценки получены с использованием модели Барлье (Barlier et al., 1978).

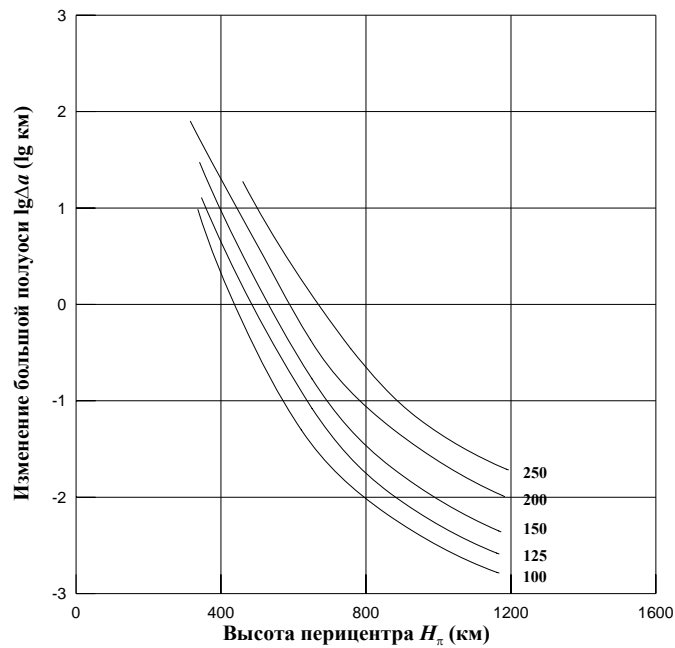


Рис. 12.12. Изменение большой полуоси при различных значениях индекса  $F_{10.7}$

Таким образом, несмотря на значительное убывание влияния атмосферы с высотой при потребности в высоких точностях прогнозирования атмосферное торможение нужно учитывать до высот перигея 1300 км. В этих случаях необходимо также учитывать влияние Луны и Солнца.

Ниже (рис. 12.13–12.15) даны оценки влияния лунно-солнечных возмущений для спутников с высотами перигея 300, 500 и 800 км на интервале прогнозирования 2 сут. На рисунках хорошо прослеживаются короткопериодические возмущения, восходящие ветви долгопериодических возмущений. Несмотря на разницу в высоте полета, оценки получаются достаточно близкими, поскольку более низкий спутник делает за двое суток больше оборотов, чем более высокий.

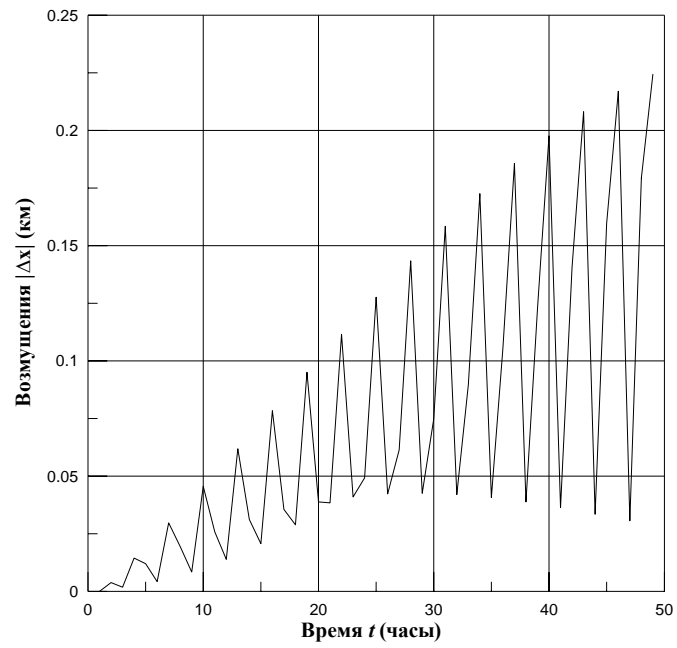


Рис.12.13. Влияние лунно-солнечных возмущений.  $H = 300$  км

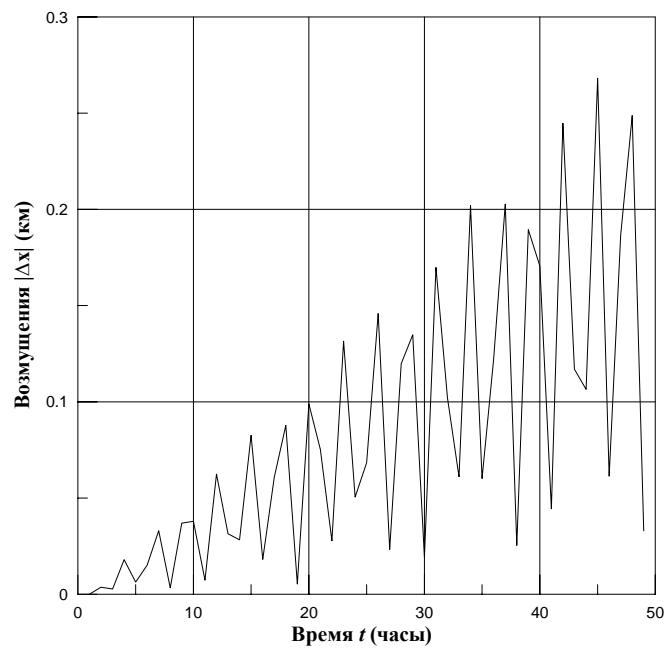


Рис. 12.14. Влияние лунно-солнечных возмущений.  $H = 500$  км

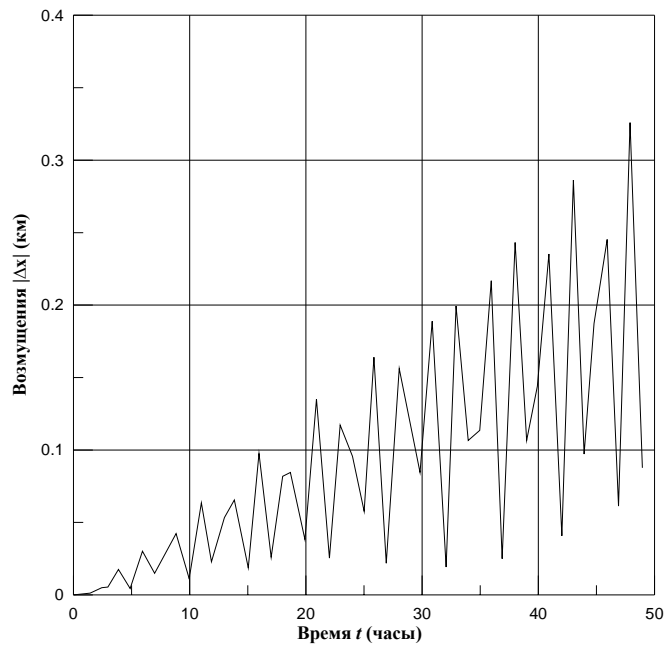


Рис.12.15. Влияние лунно-солнечных возмущений.  $H=800$  км

#### 12.4.2. Исследование орбитальных возмущений резонансных ИСЗ

Рассмотрим задачу исследования резонансных возмущений ИСЗ, движущихся в окрестности резонанса 1 к 2 с собственным вращением Земли. Период обращения таких объектов близок к 12 ч. По таким орбитам могут двигаться спутники системы глобального позиционирования GPS. Номинальный период обращения этих объектов составляет 11 ч. 45 мин., но под действием возмущений период обращения этих объектов может приближаться к 12 ч.

Для того чтобы продемонстрировать влияние резонансных возмущений, будем рассматривать вместе с резонансным объектом с параметрами

$$T = 43085 \text{ с}, \quad e = 0.01, \quad i = 63^\circ.4$$

нерезонансный объект, отличающий от данного только периодом обращения  $T = 41400$  с.

Используя формулу (7.2), предварительно можно определить, что для ИСЗ рассматриваемого типа резонансными являются гармоники гепотенциала

$$V_{2,2}, V_{3,2}, V_{4,4}, V_{5,2} \dots$$

Явление резонанса по периоду обращения спутника для гармоники  $V_{2,2}$  гепотенциала демонстрируют графики рис. 12.16. Приведенные оценки показывают, что область острого резонанса очень мала. На рис. 12.17–2.21 даны результаты, которые позволяют оценить влияние резонансных гармоник  $V_{2,2}, V_{3,2}, V_{4,4}$  на движение рассматриваемого типа ИСЗ и зависимость этих возмущений от различного выбора начальной долготы восходящего узла и долготы перицентра от узла. Заштрихованные области на этих графиках — области изменения короткопериодических возмущений.



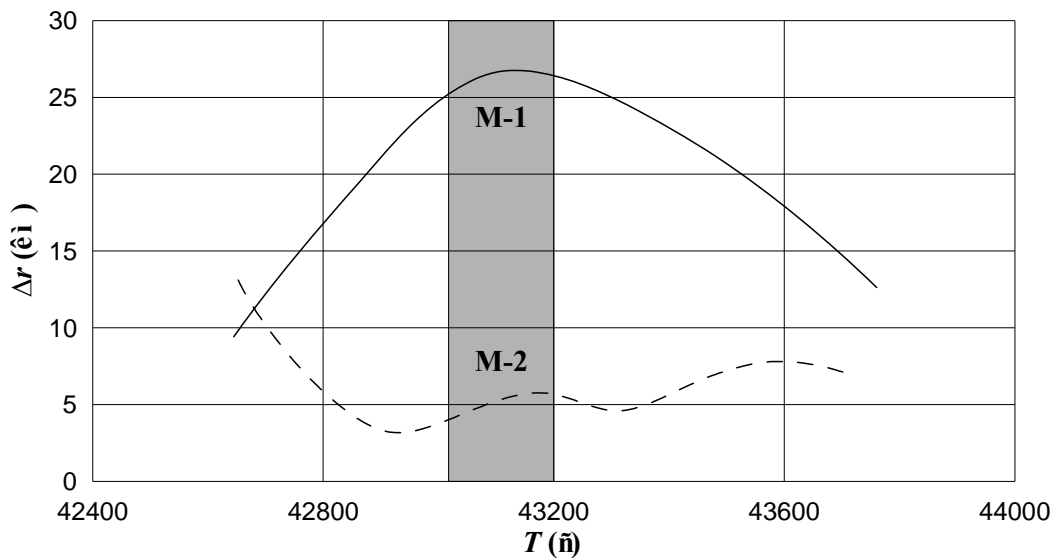


Рис. 12.16. Исследование области резонанса по периоду обращения спутника

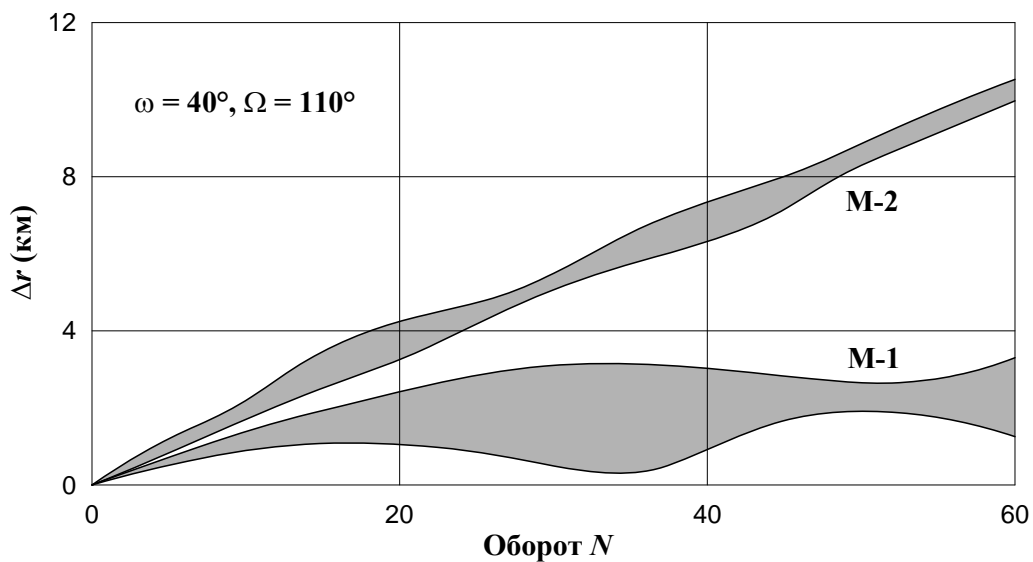


Рис.12.17. Возмущения от гармоники  $V_{2,2}$  как функции времени ( $\Delta t = 30$  сут)

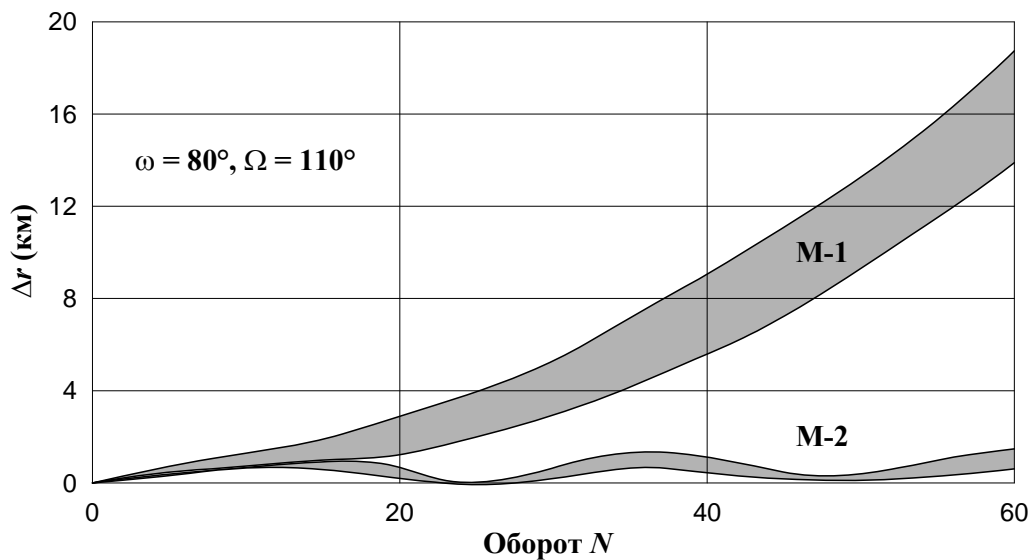


Рис. 12.18. Возмущения от гармоники  $V_{2,2}$  как функции времени ( $\Delta t = 30$  сут)

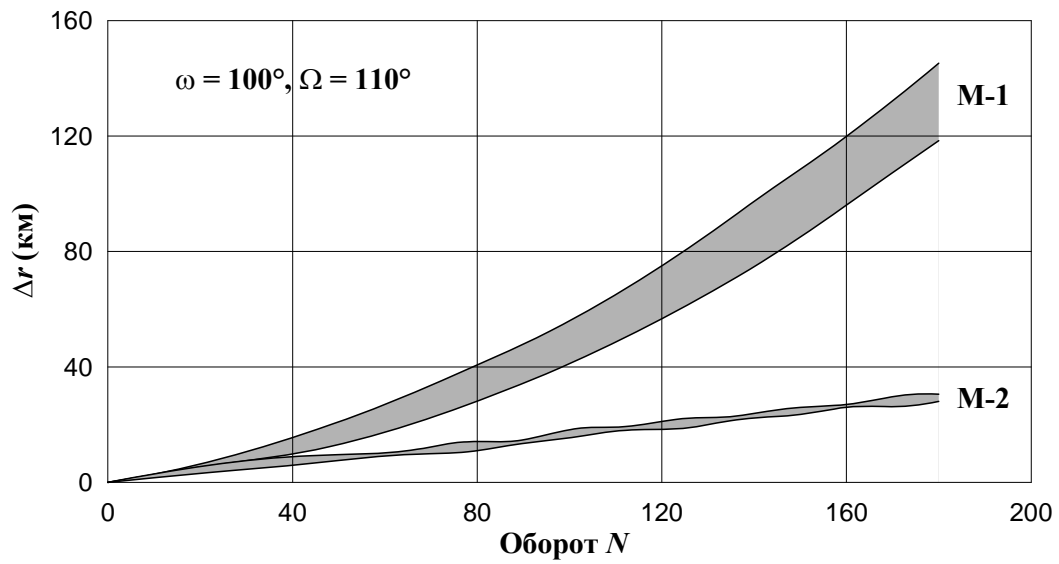


Рис. 12.19. Возмущения от гармоники  $V_{2,2}$  как функции времени ( $\Delta t = 90$  сут)

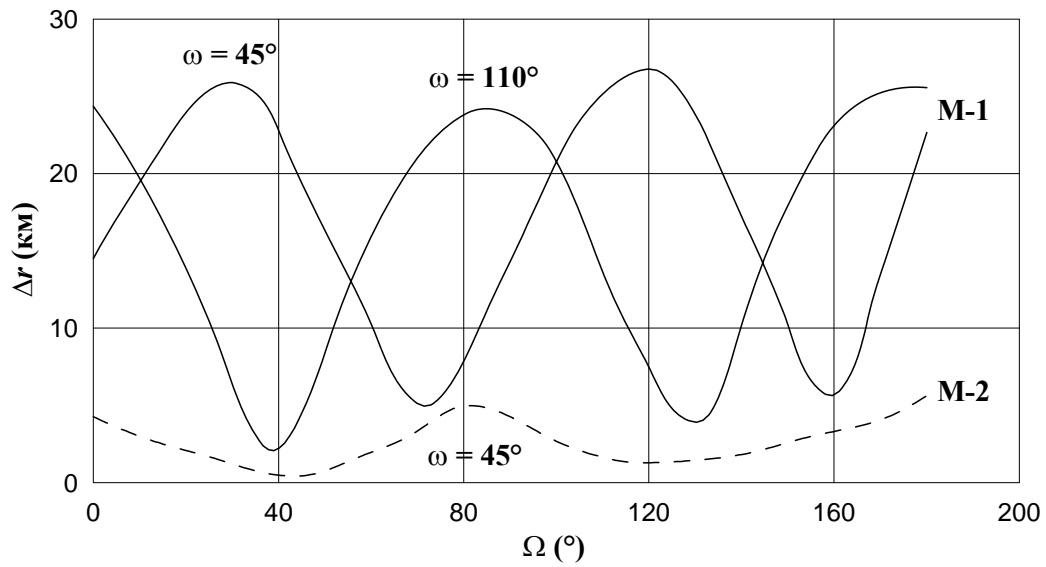


Рис. 12.20. Влияние гармоники  $V_{3,2}$  в конце 30-суточного интервала как функция  $\Omega$

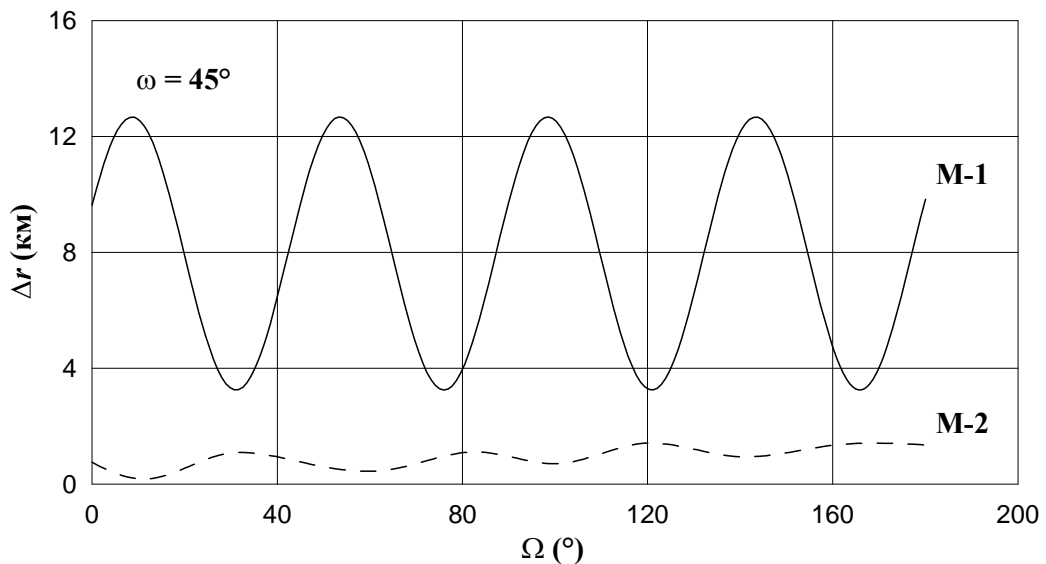


Рис. 12.21. Влияние гармоники  $V_{4,4}$  в конце 30-суточного интервала как функция  $\Omega$

Интересно отметить, что при характерном возрастании в резонансном случае величина амплитуды долгопериодических колебаний не всегда одинакова, а зависит от выбора угловых переменных. Кроме того, наличие резонанса может приводить к возрастанию амплитуды короткопериодических возмущений.

На рис. 12.22 для того же спутника приведена оценка области изменения лунно-солнечных возмущений в зависимости от величины долготы узла спутника. Эта оценка показывает, что величина лунно-солнечных возмущений существенно образом зависит от положения орбиты спутника в пространстве.

Графики, приведенные на рис. 12.23–12.24, позволяют оценить влияние светового давления на движение 12-часового ИСЗ. Показана зависимость величины возмущений от отношения площади миделевого сечения  $S$  к массе спутника  $m$ , а также накопление величины возмущений со временем при двух различных значениях этого отношения.

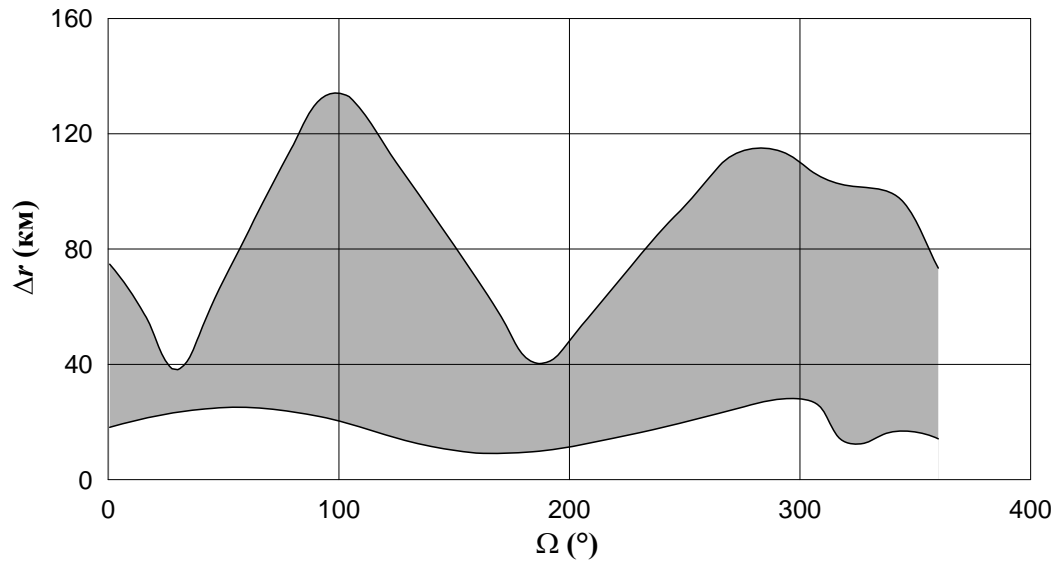


Рис.12.22. Область возможных значений лунно-солнечных возмущений в движении 12-часового ИСЗ на 30-суточном интервале времени

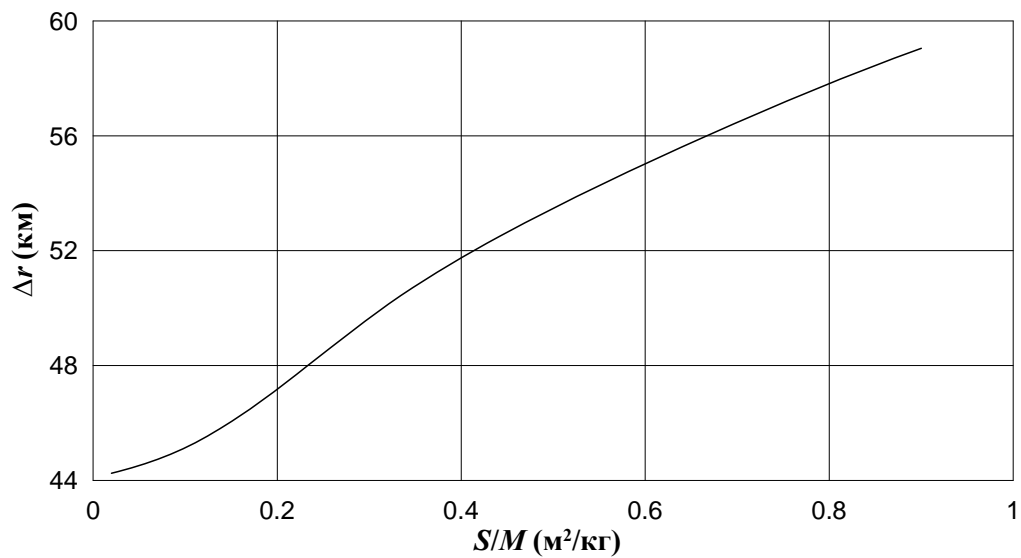


Рис. 12.23. Изменение величины возмущений от светового давления в движении 12-часового ИСЗ в зависимости от отношения  $S/m$

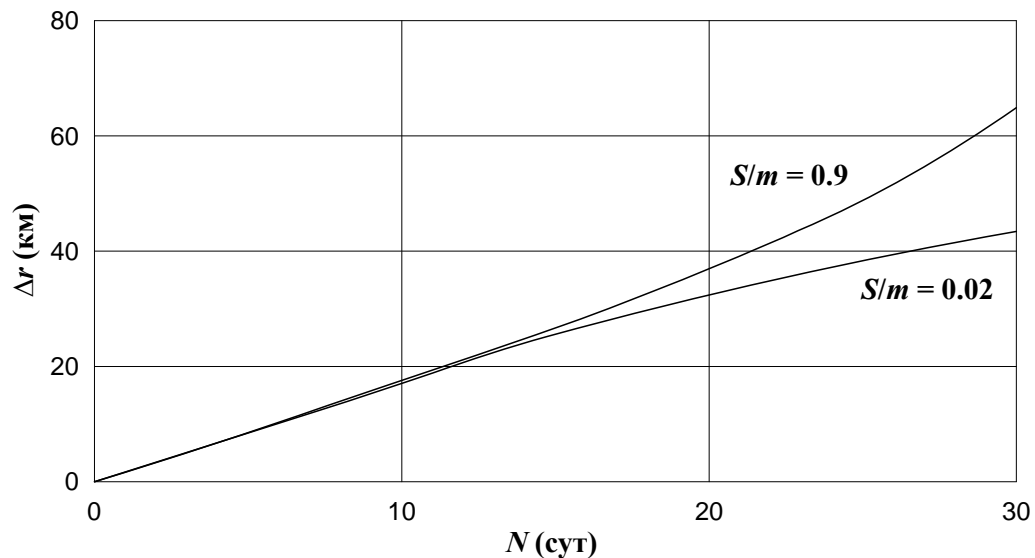


Рис. 12.24. Влияние возмущений от светового давления на движение 12-часового ИСЗ как функция времени

### 12.5. Определение трасс спутников

При моделировании процесса функционирования ИСЗ и КА очень часто возникает задача определения трассы спутника на поверхности Земли. Поскольку трасса спутника есть совокупность его подспутниковых точек, рассмотрим два способа определения координат подспутниковой точки: точный с использованием численного моделирования движения ИСЗ и приближенный — в рамках задачи двух тел.

1. Пусть нам известны величины: точный вектор положения спутника  $\bar{x}$ , вычисленный с учетом всех возмущений с помощью «Численной модели движения ИСЗ»,  $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5}$  [рад/с] — скорость среднего звездного вращения Земли, дата (юлианская) наблюдения.

Находим звездное время по формуле (1.5) из гл. 1

$$h = H_0 + \omega(t_0 - \Delta H),$$

где  $t_0$  — временной интервал от  $0^h$  UT1 на дату наблюдения до момента наблюдения,  $H_0$  определяется формулой (1.6):

$$H_0 = 24110^s, 54841 + 8640184^s, 812866T_* + 0^s, 093104T_*^2 - 6^s, 2 \cdot 10^{-6} T_*^3$$

Здесь  $T_*$ , как и раньше, задается выражением

$$T_* = \frac{d_*}{36525},$$

где  $d_*$  — число дней во всемирном времени от эпохи J2000.0.

Переход к вращающейся системе координат задается матрицей перехода

$$B = \begin{pmatrix} \cosh h & \sinh h & 0 \\ -\sinh h & \cosh h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а вектор положения определяется как

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}.$$

Тогда координаты подспутниковой точки на поверхности Земли определяются формулами

$$\begin{cases} \lambda = \operatorname{arctg} \frac{y_2}{y_1}, \\ \varphi = \operatorname{arcsin} \frac{y_3}{r}, \end{cases}$$

где

$$r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}.$$

2. Пусть заданы элементы орбиты спутника. Величина  $H_0$  определяется как в предыдущем случае.

Пусть  $\bar{S} = h + \Omega$  есть модифицированное звездное время. Координаты подспутниковой точки на сфере единичного радиуса запишутся в виде

$$\begin{cases} y_1 = \cos u \cos \bar{S} + \cos i \sin u \sin \bar{S}, \\ y_2 = \cos u \sin \bar{S} + \cos i \sin u \cos \bar{S}, \\ y_3 = \sin i \sin u, \end{cases}$$

где  $i$  — наклон орбиты к экватору;  $u$  — аргумент широты;  $S$  — звездное время от эпохи прохождения начального меридиана через восходящий узел. Имеем

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \lambda = \frac{-\cos u \sin \bar{S} + \cos i \sin u \cos \bar{S}}{\cos u \cos \bar{S} + \cos i \sin u \sin \bar{S}}, \\ \sin \varphi = \sin i \sin u, \end{cases}$$

откуда и получаем координаты подспутниковой точки.

Аргумент широты находится с использованием формулы

$$u = v + \omega,$$

где  $v$  — истинная аномалия;  $\omega$  — аргумент перицентра;

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2},$$

$e$  — эксцентриситет, а эксцентрическая аномалия  $E$  определяется из уравнения Кеплера

$$E = M + e \sin E.$$

Здесь  $M$  — средняя аномалия, вычисляемая по формуле

$$M = n(t - t_0) + M_0,$$

$M_0$  — средняя аномалия в начальный момент времени;  $t_0$  и  $t$  — начальный и текущий моменты времени соответственно; среднее движение  $n$  определяется выражением

$$n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}},$$

$a$  — большая полуось орбиты;  $fM$  — гравитационная постоянная.

Второй способ является приближенным, он позволяет находить координаты подспутниковой точки в рамках невозмущенной задачи двух тел. Однако эти же формулы могут быть использованы и для точного определения подспутниковой точки при задании оскулирующих возмущенных элементов на текущие моменты времени  $t$ . В этом случае  $M$  будет совпадать с  $M_0$ .

## 13. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ОБРАЗОВАНИЯ И ЭВОЛЮЦИИ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА

### 13.1. Проблема космического мусора

Быстрое освоение космического пространства с момента запуска первого искусственного спутника Земли привело к его замусориванию. Околоземное пространство засорено отслужившими свой срок космическими аппаратами, отработавшими верхними ступенями ракет-носителей, различными элементами конструкций типа переходников, крышек и т.п. Все это называется космическим мусором. Дополнительная засоренность возникает в результате преднамеренных или самопроизвольных взрывов на орбитах или при столкновении космических аппаратов.

По данным Л.В. Рыхловой (2003) и Х. Клинкрада (Klinkrad, 2006) общее число объектов искусственного происхождения, зарегистрированных в околоземном космическом пространстве с момента запуска первого ИСЗ и по 1 января 2002 г., составляет 27044 объекта. Из них 18051 объект уже разрушились и сгорели в атмосфере. На орбитах на 1 января 2002 г. находились 8993 объекта, причем среди них были всего 2853 космических аппарата и только 6% функционирующих, а все остальное космический мусор. Это только каталогизированные объекты. В целом предполагается, что в космосе на сегодня находится около 14000 объектов размером от 5–10 см и более и только 4% из них — работающие КА.

По типу орбит все каталогизированные объекты делятся на следующие классы или области:

- LEO — low-Earth orbits, т.е. низкоорбитальные объекты;
- MEO — medium Earth orbits, объекты между LEO и GEO;
- GEO — geostationary orbits, объекты на геостационарных орбитах;
- GTO — GEO transfer orbits, объекты на орбитах перехода в область GEO;
- HEO — highly eccentric orbits, объекты с большими эксцентриситетами орбит.

Последние два класса в значительной степени совпадают.

В процентном отношении все каталогизированные аппараты делятся по областям следующим образом: LEO — (с высотами менее 2000 км) — 69.2%; MEO — 3.9%; GEO — 7.8%; HEO/GTO — 9.7%. И небольшая фракция, примерно 150 объектов, выведена на внеземные орбиты.

Всего зарегистрировано 188 взрывов и столкновений аппаратов на орбитах, 173 из них занесены в каталог NASA «History of on-orbit satellite fragmentation», который можно найти по адресу (<http://orbitaldebris.jsc.nasa.gov>). Данными этого каталога мы будем пользоваться в своих модельных расчетах.

### 13.2. Математические модели распада космического аппарата на орбите

Описание различных способов образования космического мусора и их математических моделей дано в книге Х. Клинкрада «Космический мусор. Модели и анализ риска» (Klinkrad, 2006). Мы остановимся здесь только на двух наиболее распространенных способах образования космического мусора — это взрыв



аппарата на орбите и столкновение космических аппаратов. Предлагаемые алгоритмы составлены А.Г. Головкиной (2006) (см. также Бордовицына, 2007) по анализу литературных источников и оттестированы по данным наблюдений.

Будем предполагать, что момент распада космического аппарата в результате изотропного взрыва координаты каждого фрагмента совпадают с координатами родительского тела, а компоненты скорости фрагмента определяются по формулам

$$\begin{aligned} \dot{x}_{10} &= v_1 + \Delta v \cos \tau, \\ \dot{x}_{20} &= v_2 + \Delta v \sin \tau \cos \varphi, \\ \dot{x}_{30} &= v_3 + \Delta v \sin \tau \sin \varphi, \end{aligned} \quad (13.1)$$

где  $v_1, v_2, v_3$  — компоненты скорости родительского объекта в геоцентрической системе координат. Параметры  $\Delta v$ ,  $\tau$  и  $\varphi$  задают величину и направление вектора скорости фрагмента относительно родительского тела и рассматриваются как случайные величины, определяемые с помощью метода обратных функций по заданным функциям плотности распределения.

Плотности распределения для  $\tau$ ,  $\varphi$  и массы фрагментов задаются следующими формулами:

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad p(\tau) = \frac{\sin \tau}{2}, \quad p(\eta) = \frac{s-1}{1-\eta_{\max}^{1-s}} \eta^{-s}, \quad (13.2)$$

где  $s = 0.83$ ;  $\eta = m/m_{\min}$ ;  $\eta \in (1, \eta_{\max}]$ ;  $\eta_{\max} = m_{\max}/m_{\min}$ ;  $m_{\min}, m_{\max}$  — минимальная и максимальная масса фрагмента.

Величина  $\Delta v$  связана случайным образом со средней скоростью  $\Delta \bar{v}$

$$\Delta v = \begin{cases} \Delta \bar{v}(0.1 + 0.6\sqrt{3y}), & 0.00 \leq y \leq 0.75, \\ \Delta \bar{v}(1.3 - 0.6\sqrt{1-y}), & 0.75 \leq y \leq 1.00, \end{cases} \quad (13.3)$$

где  $y$  — случайная величина от 0 до 1 с равномерной плотностью распределения. Средняя скорость  $\Delta \bar{v}$  для двух рассматриваемых здесь моделей распада (изотропный взрыв и столкновение) задается формулами:

а) взрыв

$$\log \Delta \bar{v} = -0.0676(\log d)^2 - 0.804 \log d - 1.514, \quad (13.4)$$

б) столкновение

$$\log \left( \frac{\Delta \bar{v}}{V} \right) = \begin{cases} A_c + B_c [\log(d/d_m)] & d \geq d_m, \\ A_c & d < d_m, \end{cases} \quad (13.5)$$

где  $d_m = E^{\frac{1}{3}}/C_c$ ,  $V, E$  — относительная скорость и кинетическая энергия ударника;  $A_c, B_c, C_c$  — постоянные величины, имеющие следующие численные значения:

$$\begin{aligned}A_c &= -0.125, \\B_c &= -0.0676, \\C_c &= 8.01 \cdot 10^8,\end{aligned}$$

а  $d$  — диаметр фрагмента (м). В предположении, что фрагмент имеет сферическую форму, диаметр определяется по формуле  $d = 2\sqrt{A/\pi}$ , где  $A$  — площадь поперечного сечения фрагмента ( $\text{м}^2$ ), которая находится из логарифмического нормального распределения:

$$p(A) = \frac{1}{0.8\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{A} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln A - \ln \bar{A}}{0.8} \right)^2},$$

а масса фрагмента  $m$  (кг) находится из соотношения

$$m = \begin{cases} 62.013 \bar{A}^{1.13} & \bar{A} \geq 8.04 \cdot 10^{-5}, \\ 2030.33 \bar{A}^{1.5} & \bar{A} \leq 8.04 \cdot 10^{-5}, \end{cases}$$

где  $\bar{A}$  — средняя площадь поперечного сечения фрагмента ( $\text{м}^2$ ).

Формула (13.5) справедлива только в случае катастрофического распада. Является ли столкновение катастрофическим, определяется из условия

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{m_i} \leq 0.1, \text{ режим кратеризации,} \\ \frac{\alpha}{m_i} \geq 0.1, \text{ катастрофический распад.} \end{cases}$$

Величина  $\alpha$  определяется по формуле

$$\alpha = 1.15V^2 m_p.$$

При катастрофическом распаде  $m_e = m_i + m_p$ , а в режиме кратеризации  $m_e = \alpha$ , где  $m_e$  — извергнутая масса;  $m_i$  — масса космического аппарата;  $m_p$  — масса ударника в кг.

### 13.3. Вычисления пространственной плотности фрагментов

Для определения плотности пространство, занятое частицами, разбивается на ячейки с определенным шагом по расстоянию от центра Земли  $r$  (км), по прямому восхождению  $\alpha$  и склонению  $\delta$  или по широте и долготе.

Для построения алгоритма должны быть заданы следующие параметры:

- интервал времени, отсчитываемый от момента распада КО;
- прямое восхождение, склонение (или широта и долгота) и радиус-вектор фрагментов на каждой выбранной орбите;
- для каждой непустой ячейки её нижние границы по прямому восхождению, склонению (или широте и долготе) и высоте, объем ячейки и число фрагментов в ней.

Пространственная плотность фрагментов в заданный момент времени определяется как отношение числа фрагментов, попавших в ячейку пространства, к ее объему.

#### **13.4. Численное моделирование распределения и эволюции орбит групп фрагментов распада**

Вычисленные по координатам и скоростям параметры орбит индивидуальных фрагментов позволяют построить статистические одномерные распределения для каждого из шести элементов и двумерное распределение по большой полуоси и эксцентриситету. Последнее распределение используется для выбора одной для каждой ячейки распределения характерной орбиты, в качестве которой принимается первая из общего списка орбит, попавшая в заданную ячейку. Каждой из выбранных орбит может быть приписан вес, равный числу фрагментов, попавших в заданную ячейку двумерного распределения (в процентах от общего числа фрагментов).

Информация о выбранных орбитах служит входной информацией к программе численного интегрирования, которая используется для вычисления элементов орбит фрагментов на произвольные моменты времени с учетом заданного набора возмущающих сил.

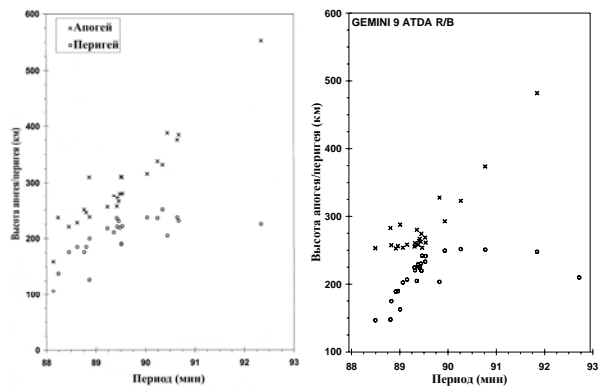
Для исследования эволюции орбит фрагментов может быть использована численная или аналитическая модель движения ИСЗ, описанные в предыдущих разделах. Главные требования к этим моделям: высокая оперативность и устойчивое сохранение заданной (как правило, не очень высокой) точности прогнозирования на больших интервалах времени.

#### **13.5. Тестирование модели взрыва по данным наблюдений**

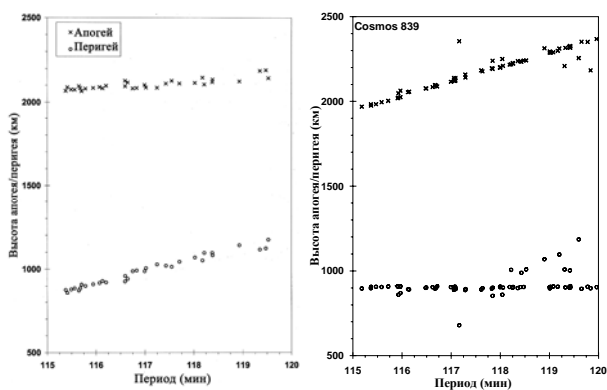
Результаты наблюдений фрагментов распада космического аппарата на орбите в каталоге NASA представлены в виде графиков зависимости высоты апогея/перигея фрагментов от периода обращения.

По данным, полученным в результате моделирования, были вычислены необходимые параметры и построены аналогичные графики (рис. 13.1, 13.2).

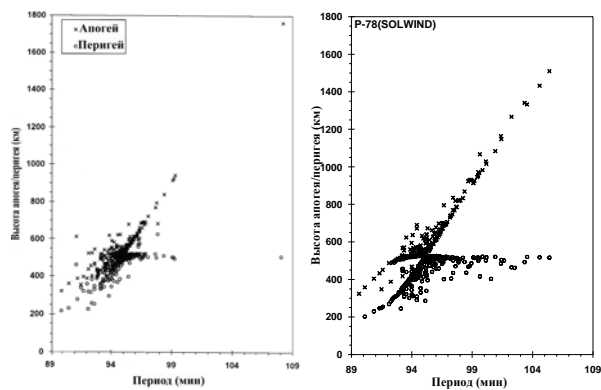
Сравнивая результаты моделирования с данными наблюдений, мы видим, что модели распада довольно точно отражают действительность.



a) GEMINI 9 ATDA R/B



b) P-78(SOLWIND)



c) Cosmos 839

Рис. 13.1. Распределение фрагментов распада КА в результате взрыва по данным моделирования (справа) и наблюдений (слева)

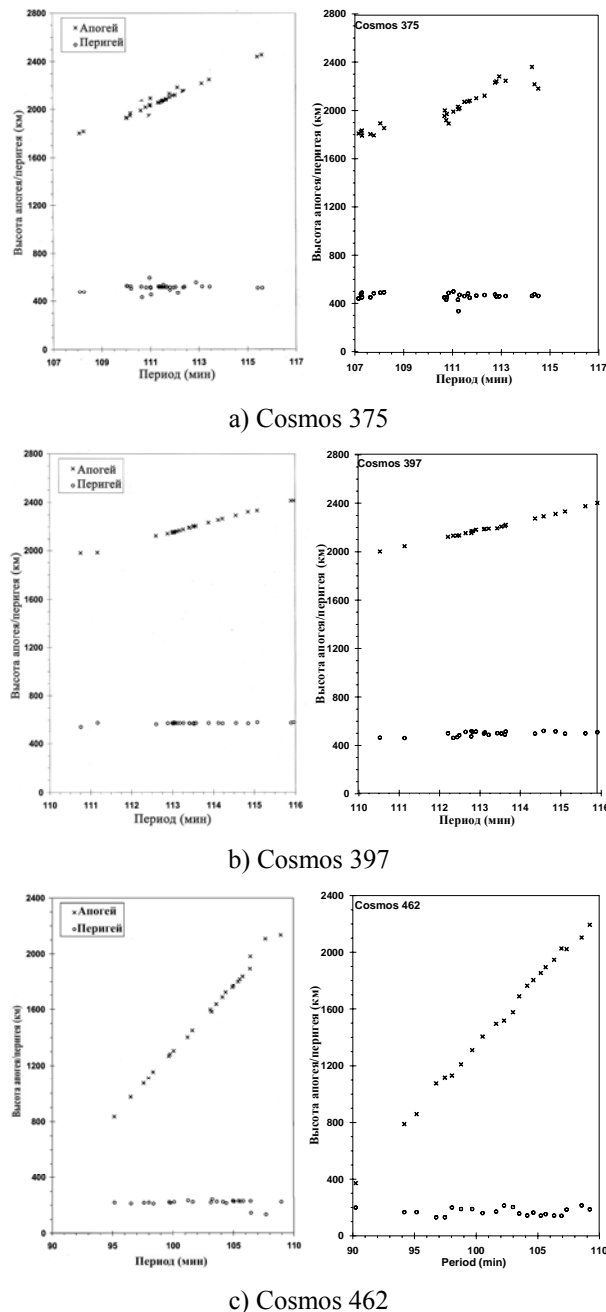


Рис. 13.2. Распределение фрагментов распада КА в результате столкновения по данным моделирования (справа) и наблюдений (слева)

## 13.6. Примеры численного моделирования распределения и эволюции фрагментов распада КА на орбитах

### 13.6.1. Моделирование взрыва на геостационарной орбите

Первым этапом при моделировании было извлечение фрагментов заданной массы, удовлетворяющей распределению масс. При этом массы варьировались в пределах от 0.05 г до 10 кг. Второй этап — расчет углов  $\tau$  и  $\varphi$ , которые задают направления векторов скоростей, по заданным функциям плотности распределения. Третий этап — вычисление скорости фрагмента относительно

эпицентра взрыва. Последним этапом при моделировании является нахождение абсолютных скоростей фрагментов.

В результате распада образовалось облако (рис. 13.3), состоящее из 270 частиц массами от 0.05 г до 10 кг. При этом максимальная скорость, соответствующая минимальной массе, составила 0.1 км/с, а минимальная — 0.01 км/с.

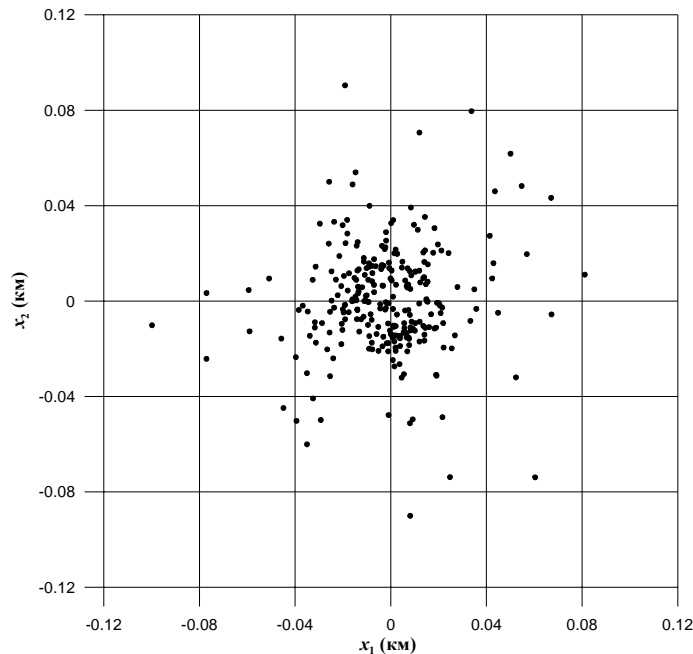


Рис. 13.3. Распределение фрагментов взрыва через 1 с

### ***13.6.2. Анализ динамической эволюции распределения фрагментов распада на геостационарной орбите***

Моделирование эволюции распада производилось на интервалах времени до 365 сут. На рис. 13.4, 13.5 показаны конфигурации распределения фрагментов в конце первых 6 сут., когда наступило замыкание облака фрагментов, и через год после взрыва. На коротких интервалах времени фрагменты постепенно распространяются вдоль геостационарной орбиты, хотя большинство из них, особенно обладающие наибольшей массой, остаются вблизи номинального родительского тела. Через год мы видим равномерное распределение фрагментов распада.

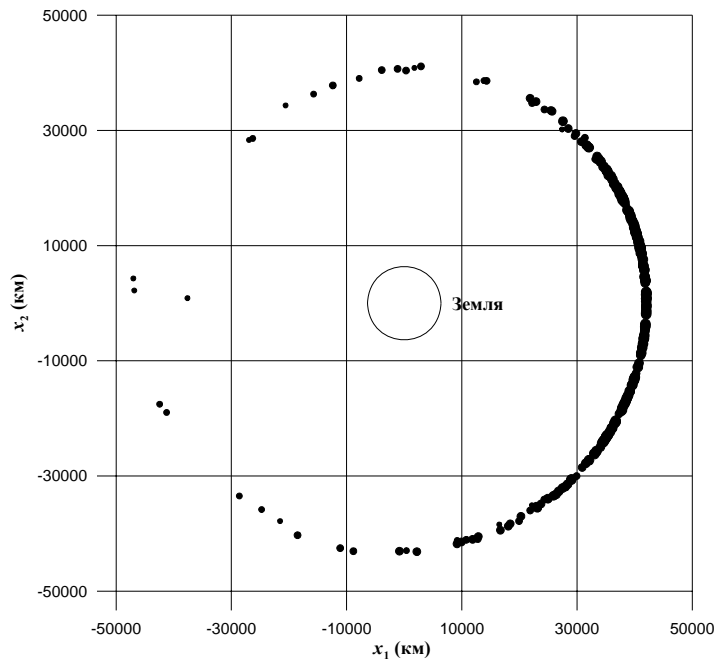


Рис. 13.4. Распределение фрагментов через 6 сут

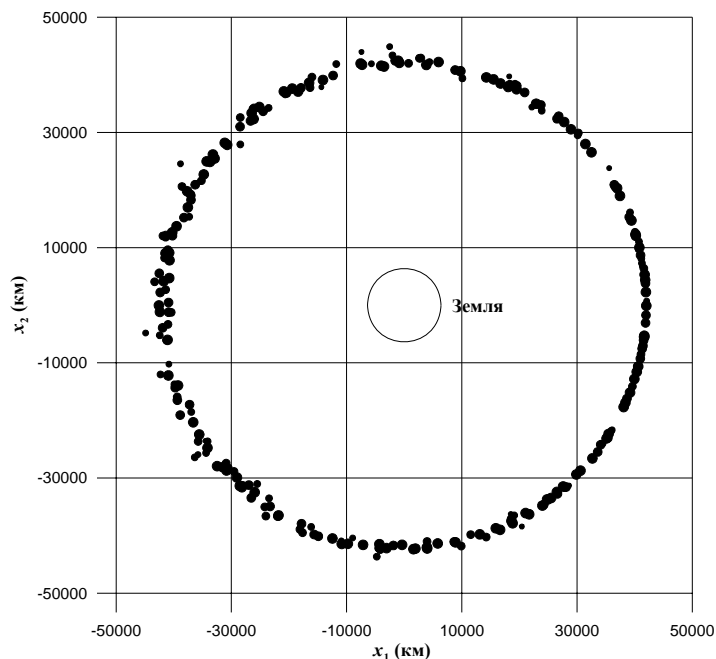


Рис. 13.5. Распределение фрагментов через 1 год

Более детальные исследования орбитальной эволюции объектов геостационарной зоны представлены в работах (Кузнецов, 2003; Бордовицына и др., 2006; Бордовицына, 2007).

### ***13.6.3. Исследование динамической эволюции и распределения фрагментов распада КА, движущихся по вытянутым орбитам***

В качестве КА, движущихся по вытянутым орбитам, были выбраны реальные космические аппараты Cosmos 862 и Cosmos 1317 (табл. 13.1), взорвавшиеся на орбитах. Главная особенность орбит этих объектов состоит в том, что в перигее фрагменты распада того и другого объектов проходят через верхние

слои атмосферы. На рис. 13.6, 13.7 мы приводим данные об орбитальной эволюции фрагментов распада этих объектов от момента распада до полного выгорания.

Таблица 13.1. Данные о взорвавшихся объектах

<i>N</i>	Наименование объекта	Момент взрыва (день.месяц.год)	Высота апогея (км)	Высота перигея (км)	Наклонение (°)
1	Cosmos 862	15.03.1977	39645	765	63.2
2	Cosmos 1317	25.01.1984	39055	1315	62.8

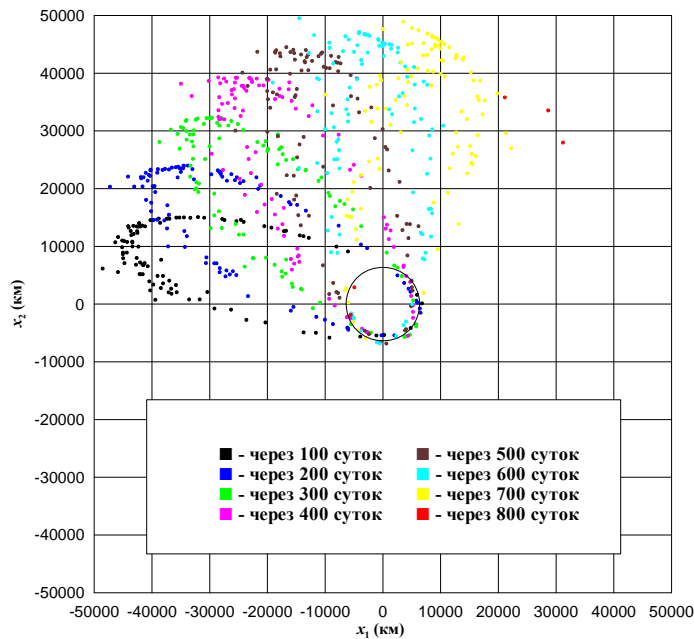


Рис. 13.6. Орбитальная эволюция фрагментов КА Cosmos 862 от момента взрыва до полного выгорания

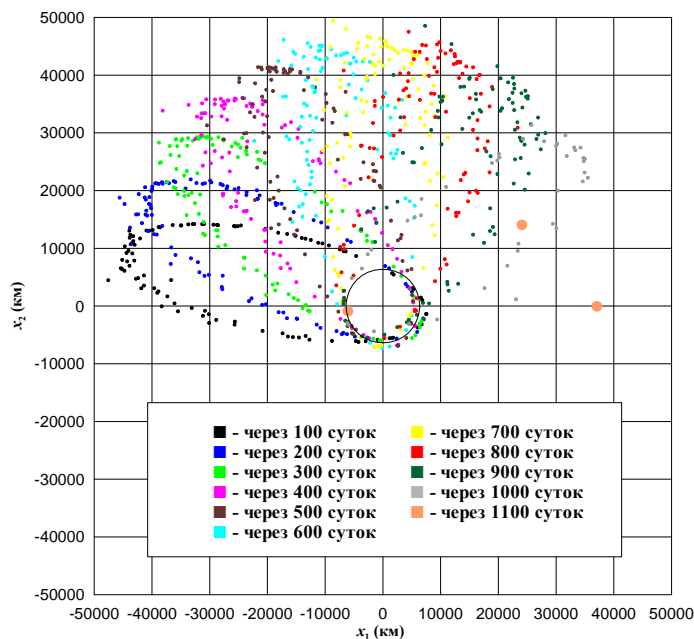


Рис. 13.7. Орбитальная эволюция фрагментов КА Cosmos 1317 от момента взрыва до полного выгорания



Как показывают графики, приведенные на рис. 13.6. и 13.7, полное выгорание КА Cosmos 862 происходит после 800 сут., КА Cosmos 1317 после 1100 сут. с момента взрыва.

**ЛИТЕРАТУРА**

- Авдюшев В.А.* Численные алгоритмы типа Энке в регуляризирующих элементах // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики: Сб. статей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 121–125.
- Авдюшев В.А.* Новая промежуточная орбита в задаче о движении близкого спутника сжатой планеты // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. Вып. 3. С. 126–127.
- Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977. 360 с.
- Аксенов Е.П.* Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986. 320 с.
- Аксенов Е.П., Носков Б.Н.* Одна форма дифференциальных уравнений возмущенного движения спутника // Астрон. ж. 1972. № 49. С. 1292–1299.
- Антонович К.М.* Использование спутниковых радионавигационных систем в геодезии. В 2 т. М.: ФГУП «Картоцентр», 2005. 334 с.
- Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука. 1973. 632 с.
- Бордовицына Т.В., Сухоплюева Л.Е.* Исследование эффективности численных алгоритмов, использующих стабилизирующие преобразования // Бюл. Ин-та теор. астрономии. Л.: Изд-во ИТА АН СССР, 1980. Т. 10 (163). С. 591–596.
- Бордовицына Т.В.* Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
- Бордовицына Т.В.* Сравнительная характеристика различных критериев оценки точности численного интегрирования уравнения движения небесных тел // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. Вып. 14. С. 88–92.
- Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Бороненко Т.С. и др.* Численные и численно-аналитические алгоритмы прогнозирования движения ИСЗ. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 156 с.
- Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В. и др.* Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ // Изв. вузов. Физика. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1992. Т. 35. С. 62–70.
- Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А.* Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. Вып. 16. С. 33–57.
- Бордовицына Т.В., Батулин А.П., Васильева П.В., Головкина А.Г.* Структура и эволюция комплекса фрагментов космического мусора, образовавшегося в результате распада космических аппаратов на орбитах // Материалы пятой всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики» (Томск, октябрь 2006 г.) Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 420–421.
- Бороненко Т.С.* Алгоритм для реализации в системе Авто-Аналитик метода усреднения уравнений возмущенного движения в кеплеровых элементах,

- основанного на преобразованиях Ли // *Астрономия и геодезия*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1975. Вып. 5. С. 27–45.
- Брумберг В.А.* Аналитические алгоритмы небесной механики. М.: Наука, 1980. 208 с.
- Васильева П.В.* Использование в задачах исследования динамики низколетящих ИСЗ новой национальной модели атмосферы ГОСТ 25645.166-2004 // *Материалы пятой всероссийской конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики»* (Томск, октябрь 2006 г.) Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. С. 432–433.
- Вашковьяк М.А.* Численно-аналитический метод расчета движения стационарного ИСЗ. Препринты Ин-та прикл. матем. АН СССР. 1971. № 34–35.
- Вашковьяк М.А.* О методе приближенного расчета движения стационарного ИСЗ // *Космич. исслед.* 1972. Т. 10, № 2. С. 147–158.
- Вашковьяк С.Н.* Представление функции тени в виде ряда по степеням эксцентриситета орбиты спутника // *Сообщения ГАИШ*. М.: Изд-во МГУ, 1979. № 208–209. С. 3–6.
- Вашковьяк М.А.* О численно-аналитическом методе расчета движения 12-часового ИСЗ по почти круговым орбитам // *Космич. исслед.* 1983. Т. 21, № 6. С. 819–823.
- Демин В.Г.* Движение искусственного спутника в нецентральной поле Земли. М.: Наука, 1968. 352 с.
- Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. Учебное пособие для студентов университетов. М.: Наука, 1983. С. 1–351.
- Емельянов Н.В.* Метод вычисления лунно-солнечных возмущений элементов орбит ИСЗ // *ГАИШ*. 1980. Т. 49. С. 122–129.
- Емельянов В.Н.* Влияние притяжения Луны и Солнца на движение ИСЗ // *Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства*. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 44–63.
- Емельянов Н.В.* Построение аналитической теории движения искусственных спутников с точностью до третьего порядка относительно сжатия Земли // *Астрон. ж.* 1986. Т. 63. С. 800–809.
- Каула У.* Спутниковая геодезия. М.: Мир, 1970. 172 с.
- Кислик М.Д.* Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли / *Искусственные спутники Земли*, 1960. Вып. 4. С. 3–17.
- Кузнецов Э.Д., Гламазда Д.В.* Динамическая эволюция частиц, образовавшихся в результате взрыва объекта на геостационарной орбите // *Труды конференции «Околоземная астрономия — 2003»*. (Терскол, сентябрь 2003 г.) М.: Институт астрономии РАН. 2003. Т. 2. С. 52–59.
- Куликов Д.К.* Интегрирование уравнений движения небесной механики на электронных вычислительных машинах по квадратурному методу Коуэлла с автоматическим выбором шага // *Бюл. ИТА*. 1960. Т. 7, № 10. С. 770–797.

- Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. № 8. С. 5.
- Нестеров В.В.* Параметры вращения Земли по лазерной дальнометрии ИСЗ ЛАГЕОС во время короткой кампании МЕРИТ // Письма в АЖ. 1984. Т. 10, № 6. С. 465–468.
- Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М., Таратынова Г.П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты // УФН. 1957. Т. 58. Вып. 1. С. 31–50.
- Платонов А.К., Власова П.К., Степанянц В.А.* Многоточечный метод интегрирования с переменным шагом для обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1976. 18 с. (Препринт/ ИПМ:72).
- Прохоренко В.И.* Долговременная эволюция орбит ИСЗ под влиянием гравитационных возмущений, обусловленных сжатием Земли, с учетом возмущений от внешних тел // Изв. вузов. Физика. Приложение. Небесная механика и прикладная астрономия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. Т. 49, № 2. С. 63–73.
- Рой А.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
- Рыхлова Л.В.* Проблемы околоземной астрономии // Околоземная астрономия / Под ред. А.Г. Масевич М.: ИНАСАН, 1998. С. 8–16.
- Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1971. 862 с.
- Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
- Субботин М.Ф.* Курс небесной механики. Т. 2. Л., М.: Гл. редакция общетехнической лит-ры, 1937. 404 с.
- Тамаров В.А.* Вычисление лунно-солнечных возмущений в движении искусственных спутников Земли // Деп. ВИНТИ. 1983. № 4682/83. 53 с.
- Тамаров В.А.* Смешанные вековые возмущения спутниковых орбит // Астрон. ж. 1984. Т. 61. № 1. С. 177–183.
- Тамаров В.А., Черницов А.М.* Аналитический алгоритм вычисления возмущений в движении ИСЗ, обусловленных сопротивлением атмосферы // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. Вып. 16. С. 134–148.
- Тарадий В.К., Цесис М.Л.* Численное определение траекторий искусственных спутников Земли методом Адамса переменного порядка // Астрон. и астрофиз. 1984. № 53. С. 56–65.
- Таратынова Г.П.* О движении искусственного спутника в нецентральной поле тяготения Земли при наличии сопротивления атмосферы // УФН. 1957. Т. 58. Вып. 1. С. 51–58.
- Тимошкова Е.И.* Уравнения возмущенного движения спутника // Астрон. ж. 1971. Т. 48, № 5. С. 1061–1066.
- Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Лунно-солнечные возмущения в движении спутников планеты // Уч. зап. ЛГУ. 1974. № 373. С. 141–156.

- Уральская В.С., Журавлев С.Г.* Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1980. Т. 15. С. 5.
- Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990. 512 с.
- Херрик С.* Астродинамика: В 3 т. М.: Мир, 1977. Т. 2. 263 с.
- Херрик С.* Астродинамика: В 3 т. М.: Мир, 1978. Т. 3. 360 с.
- Холл Дж., Уатт Дж.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
- Холишевников К.В.* Преобразования Ли в небесной механике. // Астрономия и геодезия. Томск.: Изд-во Том. ун-та, 1973. Вып. 4. С. 21–43.
- Холишевников К.В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. 208 с.
- Холишевников К.В., Питьев Н.В., Титов В.Б.* Притяжение небесных тел. СПб.: Изд-во СПб. ун-та, 2005. 104 с.
- Чеботарев Г.А.* Аналитические и численные методы небесной механики. М., Л.: Наука, 1965. 369 с.
- Черницов А.М., Тамаров В.А.* О способе построения аналитического алгоритма вычисления влияния светового давления на движение ИСЗ // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. Вып. 16. С. 239–245.
- Черницов А.М., Тамаров В.А.* Определение допустимого уровня систематических ошибок наблюдения при построении областей возможных движений малых тел // Изв. вузов. Физика. Приложение. Небесная механика и прикладная астрономия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2006. Т. 49, № 2. С. 75–81.
- Шарковский Н.А.* Вариационные алгоритмы Энке // Алгоритмическое и программное обеспечение теории движения ИСЗ. Л.: Изд-во ИТА АН СССР, 1990. С. 71–72.
- Шарковский Н.А.* Вариационный метод Энке // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. Вып. 16. С. 13–21.
- Штеттер Х.* Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978. 462 с.
- Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
- Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965. 540 с.
- Bauer F.I., Rutishauser H., Stiefel E.* New Aspects in Numerical Quadrature // Proc. of Symp. – In Appl. Math., Americ. Math. Soc. 1963. P. 199–218.
- Barlier F., Berger C., Falin J., et al.* A Thermospheric Model Based on Satellite Dragdata // Ann. Geophys. 1978. Vol. 34, № 1. P. 9–24.
- Baumgarte J.* Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion // Cel. Mech. 1973. Vol. 5 (4). P. 490–501.
- Brumberg V.A.* On Relativistic Equations of Motion of an Earth Satellite // Cel. Mech. and Dyn. Astron. 2004. Vol. 88. P. 209–225.

- Bulirsch R., Stoer J.* Fehlerabschätzung und Extrapolation mit rationalen Funktionen bei Verfahren vom Richardson-Typus // Num. Math. 1964. № 6. P. 413–427.
- Bulirsch R., Stoer J.* Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations by Extrapolations Methods. // Num. Math. 1966. № 8. P. 1–13.
- Butcher J.C.* Coefficients for the Study of Runge–Kutta Integration Processes // J. Austral. Math. Soc. 1963. Vol. 3. P. 185–201.
- Butcher J.C.* On Runge–Kutta Processes of High Order // J. Austral. Math. Soc. 1964a. Vol. 4. P. 179–195.
- Butcher J.C.* Implicit Runge–Kutta Processes // Math. Comp. 1964b. Vol. 18. P. 50–64.
- Drozyner A.* Recurrent Calculation of Gravitational Acceleration of a Satellite // Acta Astronomica. 1977. Vol. 27, № 1. P. 15–22.
- Encke J.F.* Über eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen // Astr. Nach. 1852. Vol. 33. P. 377–398.
- Everhart E.* Implicit Single–Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech., 1974a. Vol. 10. P. 35–55.
- Everhart E.* On Efficient Integrator of Very High Order and Accuracy with Appendix Listing of RADAU. Denver., Univ. of Denver, 1974b. P. 20.
- Fehlberg E.* Klassische Runge–Kutta–Nistrom Formeln fünfter und siebenter Ordnung mit schrittweisen Kontroll // Computiog. 1969. Vol. 4. P. 93–106.
- Fehlberg E.* Klassische Runge–Kutta–Nistrom Formeln mit schrittweisen Kontroll für Differentialgleichungen  $x' = f(t, x)$  // Computiog. 1972. Vol. 10. P. 305–315.
- Giacaglia G.E.O.* Evolution of Geopotential and Luna–Solar Perturbations by a Recursive Algorithm // Appl. Math. Res. Lab. Paper. Univ. of Texas, Austin. 1975. № 1073. P. 1–18.
- Gragg W.B.* On Extrapolation Algorithms of Ordinary Initial Value Problems // J. SJAM. Numer. Anal. 1965. Vol. 2. P. 384–403.
- Harris I., Priester W.* Time-Dependent Structure of the Upper Atmosphere. NASA TN D – 1443 Goddard Space Flight Center. Maryland, 1962.
- Henrici P.* Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equation. New-York–London–Sydney, 1962. 407 p.
- IERS Conventions, 1996 – IERS Technical Note // U.S. Naval Observatory, 1996. Vol. 21. 98 p.
- Jacchia L.G.* Thermospheric Temperature, Density and Composition: New Models; SAO Special Report 375. Cambridge, 1977. 103 p.
- Jarnagin M.P.* Expansions in Elliptic Motion // Astron. papers Am. Ephemeris, 1965. Vol. 18. P. 1–659.
- Klinkrad H.* Space debris. Springer, 2006. 430 p.
- Kozai Y.* Mean Values of Cosine Functions in Elliptical Motion // Astron. J., 1962. Vol. 67. № 5. P. 311–312.
- Kudryavtsev S.M.* The Fifth-Order Analytical Solution of the Equations of Motion of a Satellite in Orbit around a Non-spherical Planet // Celest. Mech. & Dyn. Astron. 1995. Vol. 61. P. 207–215.

- Kudryavtsev S.M.* Harmonic Development of an Arbitrary Function of the Moon/Sun/planets Coordinates to Poisson Series // Shopbell P.L, Britton M.C., Ebert R. (eds.) Proc. of Astron. Data Analysis Software and Systems XIV, ASP Conference series, Astron. Soc. of the Pacific, 2005. Vol. 347. P. 133–137.
- Kyner W.T., Bennett M.M.* A modified Encke special perturbation method // Astron. J. 1966. Vol. 71. P. 579–582.
- Montenbruck O., Gill E.* Satellite Orbits. Models, Methods and Applications. – Springer. 2000. 369 p.
- Nacozy P.E.* The Use of Integrals in Numerical Integrations of the N-Body Problem // Astrophys. Space Sci. 1971. Vol. 14. P. 40–51.
- Oesterwinter C., Cohen C.* New Orbital Elements for Moon and Planets // Celest. Mech. 1969. Vol. 5. P. 317–395.
- Richardson L.F.* The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations with an Application to the Stresses in a Masonry Dam // Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A. London, 1910. Vol. 210. P. 307–357.
- Roy A.E.* Luni-solar Perturbations of an Earth satellite // Astrophys. and Space Sci. 1969. Vol. 4, № 4. P. 375–386.
- Silver M.A.* A Short Derivation of the Sperling–Burdet Equations // Cel. Mech. 1975. Vol. 11 (4). P. 339–341.
- Standish E.M.* JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // Interoffice Memorandum. 1998. Vol. 312. F-98-048. P. 1–18.
- Stoer J.* Extrapolation Method for the Solution of Initial Value Problem and Their Practical Realization // Lect. Not. in Math. 1974. № 362. P. 1–21.