ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
№ 49 ФИЗИКА 2006

УДК: 521.1

В.А. АВДЮШЕВ, Т.В. БОРДОВИЦЫНА

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ШПЕРЛИНГА–БОДЕ

В работе приведены новые регуляризирующие и стабилизирующие алгоритмы в переменных Шперлинга–Боде. Алгоритмы основаны на различных формах записи уравнений движения. Рассматриваются две формы уравнений в прямоугольных переменных Шперлинга–Боде с фиктивным временем и обобщенной эксцентрической аномалией в качестве независимых переменных и соответствующие им уравнения в регулярных оскулирующих элементах. Кроме того, в работе представлены уравнения Энке в переменных Шперлинга–Боде, использующие в качестве опорной орбиту Херрика.

1. Введение

Как известно, классические уравнения движения небесных тел имеют ряд особенностей, существенно затрудняющих процесс их численного интегрирования. К этим особенностям относятся сингулярность уравнений движения, связанная с притягивающими центрами, и ляпуновская неустойчивость решений этих уравнений даже в невозмущенном случае. Существует и хорошо развита теория регуляризации и стабилизации уравнений движения, основанная на преобразованиях Кустаанхеймо–Штифеля [1]. Однако широкого применения в практике астрономических вычислений эта теория не находит. Связано это, по-видимому, с тем, что использование четырехмерного параметрического пространства Кустаанхеймо–Штифеля вместо трехмерного физического лишает результаты наглядности. Вместе с тем имеется преобразование, которое позволяет осуществить регуляризацию и стабилизацию уравнений движения непосредственно в физическом пространстве. Это — преобразование Шперлинга–Боде [2], но в отличие от преобразования Кустаанхеймо–Штифеля у него нет развитой теории. В этой и ряде других наших работ [3,4] мы предпринимаем попытку ликвидировать этот недостаток и сделать алгоритмы, основанные на преобразованиях Шперлинга–Боде, достоянием практики. В настоящей работе представлены различные формы записи уравнений движения в переменных Шперлинга-Боде. В частности рассматриваются уравнения в прямоугольных координатах с обобщенной эксцентрической аномалией в качестве независимой переменной, уравнения в регулярных оскулирующих переменных, уравнения орбиты Херика [5] в переменных Шперлинга–Боде и их использование в построении алгоритмов типа Энке, а также дифференциальные уравнения для вычисления изохронных производных.

2. Уравнения в прямоугольных переменных Шперлинга–Боде

Будем рассматривать движение материального тела пренебрежимо малой массы в поле тяготения центрального тела с массой M под действием возмущающих сил $\mathbf{F}$ разнообразной природы. Тогда уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} = \mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор положения исследуемого тела, t — физическое время, μ — гравитационный параметр центрального тела, $r = |\mathbf{x}|$ — радиус-вектор. Рассмотрим форму представления уравнений в прямоугольных переменных Шперлинга–Боде, предложенную в работе [2].

Известно, что уравнения (1) в невозмущенном случае имеют интеграл энергии и интеграл Лапласа:

$$\frac{\omega^2}{2} \equiv \frac{\mu}{r} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} = \mathrm{const}, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{x}\left(\frac{\mu}{r} - \omega^2\right) - r\dot{r}\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{const}, \tag{2}$$

а в возмущенном случае энергия ω^2 и вектор Лапласа $\mathbf{A}$ переменные и описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}\omega^2}{\mathrm{d}t} = -2\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = 2\mathbf{x}(\mathbf{F}\cdot\dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}) - r\dot{r}\mathbf{F}. \tag{3}$$

Введем новую независимую переменную с помощью временного преобразования Судмана

$$\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}s, \tag{4}$$

где s — так называемое фиктивное время. Используя соотношения (2–4), уравнение (1) можно представить в форме возмущенного гармонического осциллятора [2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2}+\omega^2\mathbf{x}+\mathbf{A}=r^2\mathbf{F},\\
&\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2}+\omega^2 r-\mu=r\mathbf{F}\cdot\mathbf{x},\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{\omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}',\\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s}=2\mathbf{x}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')-\mathbf{x}'(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x})-rr'\mathbf{F},\\
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=r,
\end{aligned}\tag{5}$$

где штрих означает производную по s.

3. Уравнения в регулярных оскулирующих элементах Шперлинга–Боде.

Перепишем уравнения движения (5), выбрав в качестве независимой переменной угловую величину. Для этого достаточно, вместо временного преобразования $\mathrm{d}t=r\,\mathrm{d}s$ взять преобразование вида $\omega\,\mathrm{d}t=r\,\mathrm{d}E$ [2], тогда независимая переменная E будет иметь смысл угловой переменной, а уравнения (5) перепишутся следующим образом

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}E^2}+\mathbf{x}+\frac{\mathbf{A}}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}[r^2\mathbf{F}+\mathbf{x}'(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')],\tag{6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}E^2}+r-\frac{\mu}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}(r\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}+r'\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}'),\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}E}=-\frac{1}{\omega}\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}',\\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}E}=2\mathbf{x}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')-\mathbf{x}'(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x})-rr'\mathbf{F},\\
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}E}=\frac{r}{\omega}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь штрих означает производную по E.

Потребуем теперь, чтобы решение уравнений (6–7) имело вид гармонического осциллятора

$$\mathbf{x}=\boldsymbol{\alpha}(E)\cos E+\boldsymbol{\beta}(E)\sin E-\frac{\mathbf{A}}{\omega^2},\quad \mathbf{x}'=-\boldsymbol{\alpha}(E)\sin E+\boldsymbol{\beta}(E)\cos E,\tag{8}$$

и известным методом вариации произвольных постоянных получим уравнения для оскулирующих элементов

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\alpha}}{\mathrm{d}E}=-\frac{1}{\omega^2}[r^2\mathbf{F}-\mathbf{x}'(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')]\sin E+\frac{1}{\omega^4}[\omega^2\mathbf{A}'+2\mathbf{A}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')]\cos E,\\
&\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}E}=\ \ \frac{1}{\omega^2}[r^2\mathbf{F}-\mathbf{x}'(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')]\cos E+\frac{1}{\omega^4}[\omega^2\mathbf{A}'+2\mathbf{A}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{x}')]\sin E.
\end{aligned}\tag{9}$$

Наконец, для достаточности систему (9) необходимо дополнить последними тремя уравнениями (7).

4. Уравнения Шперлинга–Боде при наличии консервативных возмущений

Положим, что возмущающие силы $\mathbf{F}$ слагаются из консервативных с потенциалом $V = V(\mathbf{x})$ и неконсервативных сил $\mathbf{P}$, т.е.

$$\mathbf{F}\equiv-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}.$$

Как известно, в консервативном случае система (1) имеет интеграл:

$$\frac{\omega^2}{2} \equiv \frac{\mu}{r} - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V = \text{const}, \tag{10}$$

называемый интегралом полной энергии.

Введем обобщенный вектор Лапласа

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{x}\left(\frac{\mu}{r} - \omega^2 + V\right) - r\dot{r}\dot{\mathbf{x}}. \tag{11}$$

В возмущенном случае

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\omega}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}'), \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = 3V\mathbf{x}' + \mathbf{x}\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'\right) + 2\mathbf{x}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}') - \mathbf{x}'\left(\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right]\cdot\mathbf{x}\right) - rr'\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right].$$

Тогда возмущенные уравнения движения Шперлинга–Боде можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} + (\omega^2 - V)\mathbf{x} + \mathbf{A} = r^2\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right],\\
&\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} + (\omega^2 - V)r - \mu = -3rV + r\left(\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right]\cdot\mathbf{x}\right),\\
&\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\omega}\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}',\\
&\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = 3V\mathbf{x}' + \mathbf{x}\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'\right) + 2\mathbf{x}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}') - \mathbf{x}'\left(\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right]\cdot\mathbf{x}\right) - rr'\left[-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}\right],\\
&\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = r.
\end{aligned} \tag{12}$$

5. Орбита Херрика

Теперь рассмотрим задачу о движении спутника в поле тяготения сжатой (до гармоники J_2) планеты по круговой экваториальной орбите. В этом случае гравитационный потенциал планеты и его градиент можно записать как

$$V = -\frac{\mu J_2 b^2}{2r^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} = \frac{3}{2}\frac{\mu J_2 b^2}{r^5}\mathbf{x}, \quad \text{а} \quad \mathbf{P} = \mathbf{0},$$

где b — экваториальный радиус планеты. Кроме того, справедливы соотношения:

$$r = \text{const} \quad \Rightarrow \quad r' = 0, \quad \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}' = 0, \quad V = \text{const}, \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}' = 0.$$

Из второго уравнения (12) немедленно получаем соотношение

$$r = \frac{\mu}{\omega^2 - V}. \tag{13}$$

Поэтому согласно (11) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

Таким образом, уравнения движения (12) примут вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2} + \Omega^2\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}s} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = r, \quad \text{где} \quad \Omega^2 = \omega^2 + 2\frac{\mu J_2 b^2}{r^3} = \text{const}. \tag{14}$$

Уравнения (14) имеют простое решение, которым можно воспользоваться в методе Энке [5] для приближенного представления движения спутника с почти круговой экваториальной орбитой[1]. Здесь для построения опорной орбиты радиус-вектор в (14) предлагается вычислять по формуле (13) с частотой ω и потенциалом V, взятыми для возмущенной орбиты на начальную эпоху.

[1] Например, подобное решение было использовано нами ранее для вывода уравнений Энке в переменных Кустаанхеймо–Штифеля [6].

Так уравнения Энке с опорной орбитой (16) можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2}+\Omega^2\delta\mathbf{x}+\mathbf{A}=-(\omega^2-V-\Omega^2)\mathbf{x}+r^2\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right],\\
&\frac{\mathrm{d}^2\delta r}{\mathrm{d}s^2}+\frac{\mu}{r_J}\delta r=-\left(\omega^2-V-\frac{\mu}{r_J}\right)r-3rV+r\left(\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right]\cdot\mathbf{x}\right),\\
&\frac{\mathrm{d}\delta\omega}{\mathrm{d}s}=-\frac{1}{\omega}\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}',\\
&\frac{\mathrm{d}\delta\mathbf{A}}{\mathrm{d}s}=3V\mathbf{x}'+\mathbf{x}\left(\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{x}'\right)+2\mathbf{x}(\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}')-\mathbf{x}'\left(\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right]\cdot\mathbf{x}\right)-rr'\left[-\frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}+\mathbf{P}\right],\\
&\frac{\mathrm{d}\delta t}{\mathrm{d}s}=\delta r,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$r_J=\frac{\mu}{\omega_J^2-V_0},\quad \Omega^2=\omega_J^2+2\frac{\mu J_2 b^2}{r_J^3},$$

где динамические переменные **x**, r, ω, **A**, t вычисляются как суммы их опорных аналогов и возмущений по схеме $z=z_J+\delta z$ (J обозначает опорные величины).

Уравнения в вариациях

Если при улучшении орбиты по наблюдательным данным исправляется вектор начальных параметров $\mathbf{X}=(\mathbf{x}_0,\dot{\mathbf{x}}_0)$, то возникает необходимость вычислять изохронные производные вида $\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$. Для их определения используют так называемые уравнения в вариациях, которые интегрируются совместно с уравнениями движения. Уравнения в вариациях выводятся непосредственно из уравнений движения (1), однако в нашем случае для совместного интегрирования с уравнениями Шперлинга–Боде их необходимо переписать относительно фиктивного времени s. Получим эти уравнения.

Перепишем уравнения движения (1) в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2}=\mathbf{F}-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}\equiv\mathbf{G}.\tag{16}$$

Тогда уравнения для дифференциальных коэффициентов можно записать как

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}+\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}},\tag{17}$$

а после применения временного преобразования (4) уравнения (17) примут вид

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}=r^2\left(\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{x}}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}\right)+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\mathbf{X}}.\tag{18}$$

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Минобразования РФ ЕО2-11.0-6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука. — 1975. — 304 с.
2. Silver M. // Cel. Mech. — 1975. — V. 11. — P. 39–41
3. Баньщикова М.А., Авдюшев В.А //Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. Томск: Изд-во ТГУ. — Вып. 5. — 2002.
4. Баньщикова М.А. // Известия вузов. Физика. — 2003. (В печати)
5. Херрик С. Астродинамика. М.: Мир. — 1977. — Т. 3. — 360 с.
6. Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A. // Cel. Mech. — 2001. — V. 80. — I. 4 — P. 227–247.