

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра астрономии и космической геодезии

ЗЕНКОВА Полина Николаевна

**МЕТОДЫ АДАМСА–МУЛЬТОНА И
ИХ ЭФФЕКТИВНОСТЬ В ЗАДАЧАХ
ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ**

(курсовая работа)

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. _____

Автор работы

Зенкова П.Н. _____

Томск — 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
1 МЕТОДЫ АДАМСА	3
1.1 Методы с постоянным шагом	3
1.2 Предиктор–корректор	4
1.3 Методы с переменным шагом	5
2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ АДАМСА–МУЛЬТОНА	6
2.1 Постановка численного эксперимента	6
2.2 Анализ численных результатов	7
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	11

ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов исследования орбит является математическое моделирование. Математическая модель орбитального движения представляет собой совокупность уравнений, связывающих между собой параметры, которые непосредственно характеризуют динамическое состояние объекта на орбите. Таким образом, исследовательский процесс сводится к решению конкретной математической задачи, а именно к решению соответствующих уравнений. В современной постановке почти все такие задачи не имеют точных решений, поэтому при моделировании используются приближенные численные методы.

Современная математическая модель орбиты основывается на достаточно сложных дифференциальных уравнениях небесной механики, которые не интегрируются аналитически. Для их решения прибегают к приближенным численным методам интегрирования, и весь этот процесс реализуется на подручном компьютере.

В последнее время для численного интегрирования дифференциальных уравнений орбитального движения все чаще используются неявные (одношаговые) методы Рунге–Кутты. Главным недостатком этих методов является то, что на каждом шаге интегрирования требуется неоднократное обращение к функциям правых частей уравнений, причем тем больше, чем выше порядок метода и чем ниже скорость сходимости итерационного процесса, требуемого в виду неявности для решения соответствующей системы нелинейных уравнений. Этот недостаток отсутствует в многошаговых методах. Независимо от порядка метода, он требует только несколько обращений к правым частям, причем явный метод требует только одно обращение.

Учитывая это обстоятельство, мы поставили перед собой цель исследовать эффективность многошаговых методов Адамса применительно к численному моделированию орбитального движения. Для этого нам предстояло решить ряд задач: 1) составить алгоритм для программной реализации метода Адамса; 2) на основе составленного алгоритма написать программу интегратора на языке Фортран; 3) провести численный эксперимент по исследованию эффективности метода Адамса; 4) выполнить анализ полученных численных результатов.

1 МЕТОДЫ АДАМСА

1.1 Методы с постоянным шагом

Многошаговые методы появились гораздо раньше, чем методы Рунге–Кутты. Впервые их получил Дж.К. Адамс еще в 1855 г. [1]. Тем же способом, что и Адамс, выведем первое семейство многошаговых методов (Адамса–Башфорта).

Предположим, для задачи Коши:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0;$$

нам известны первые $r + 1$ решения $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_r$ на равномерной сетке t_0, \dots, t_r с шагом h . Тогда для шага $r + 1$ формально решение можно представить как

$$\mathbf{x}(t_{r+1}) = \mathbf{x}(t_r) + \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) dt. \quad (1)$$

Заменим подынтегральную функцию на ее интерполирующий полином Ньютона, полученный по узловым значениям $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_i, \mathbf{x}_i)$ ($i = 0, \dots, r$):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_{0,1}(t - t_0) + \mathbf{f}_{0,1,2}(t - t_0)(t - t_1) + \\ + \dots + \mathbf{f}_{0,1,\dots,r}(t - t_0) \dots (t - t_{r-1}), \quad (2) \end{aligned}$$

где разделенные разности вычисляются из треугольника

$$\begin{array}{ccccccc} t_0 & \mathbf{f}_0 & & & & & \\ & & \mathbf{f}_{0,1} & & & & \\ t_1 & \mathbf{f}_1 & & \mathbf{f}_{0,1,2} & & & \\ & & \mathbf{f}_{1,2} & & \dots & \mathbf{f}_{0,1,\dots,r} & \\ t_2 & \mathbf{f}_2 & & \dots & & & \\ \dots & \dots & \dots & & & & \\ t_r & \mathbf{f}_r & & & & & \end{array}$$

Тогда численный аналог (1) будет задаваться формулой

$$\mathbf{x}_{r+1} = \mathbf{x}_r + \int_{t_r}^{t_{r+1}} \mathbf{p}(t) dt. \quad (3)$$

Согласно (3), для $r = 0, 1, 2$ получаем следующие явные формулы Адамса:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_0 \quad (\text{метод Эйлера}), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + h \left[\frac{3}{2}\mathbf{f}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{f}_0 \right], \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2 + h \left[\frac{23}{12}\mathbf{f}_2 - \frac{16}{12}\mathbf{f}_1 + \frac{5}{12}\mathbf{f}_0 \right]. \end{aligned}$$

Формулы Адамса получаются при интегрировании интерполяционного многочлена (2) от t_r до t_{r+1} , т.е. вне интервала интерполяции. Однако, как мы знаем, вне этого интервала интерполяционный многочлен обычно дает довольно плохое приближение. Чтобы разрешить эту проблему, Адамс предложил для интерполяции использовать значение \mathbf{f}_{r+1} вместо \mathbf{f}_0 . В итоге он получил неявные методы (Адамса–Мульттона). Приведем первые из них для $r = 0, 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_1 \quad (\text{неявный метод Эйлера}), \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + h \left[\frac{1}{2}\mathbf{f}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 \right] \quad (\text{правило трапеций}). \end{aligned}$$

Итак, любой s -шаговый метод Адамса можно представить в виде

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{s-1} + h \sum_{i=0}^s \beta_i \mathbf{f}_i, \quad (4)$$

где β_i — постоянные метода. Если $\beta_s = 0$, метод явный, иначе — неявный. Порядок метода определяется точностью интерполирующей формулы (2). В общем случае явный метод (4) имеет порядок $p = s$, неявный — $p = s + 1$. Следует заметить, что при $s = 0$ в неявном случае мы получаем одношаговый неявный метод Эйлера.

1.2 Предиктор–корректор

Неявная схема интегрирования предполагает итерационное решение системы нелинейных уравнений относительно искомого решения \mathbf{x}_s . Для этого обычно применяют метод простых итераций.

Итерационный процесс требует начального приближения решения нелинейной системы. Обычно его получают из явной схемы с точностью

на порядок ниже. Явную схему называют предиктором (P), тогда как неявную — корректором (C), а итерационную процедуру в целом — предиктор–корректором. Кроме того, как самостоятельный этап выделяют также вычисление функций правых частей уравнений \mathbf{f}_s (E). Символьно схема предиктор–корректор представляется как $P(EC)^l E$, если правая часть \mathbf{f}_s уточняется по исправленному решению, или $P(EC)^l$ без уточнения правой части. Здесь l — число итераций до сходимости итерационного процесса с заданной точностью. Обычно $l = 2-4$.

Например, для метода трапеций (неявного метода Адамса второго порядка) в качестве предиктора используют метод Эйлера (явный метод Адамса первого порядка) и, следовательно, процедура предиктор–корректор $P(EC)^l$ имеет вид

$$P : \mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_0, \quad E : \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1^l) \quad C : \mathbf{x}_1^{l+1} = \mathbf{x}_0 + h \left[\frac{1}{2}\mathbf{f}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{f}_1 \right].$$

1.3 Методы с переменным шагом

Изменение величины шага для эффективного численного интегрирования в многошаговых методах гораздо сложнее, чем в одношаговых. Это связано с тем, что при использовании многошаговой схемы интегрирования получение каждого следующего решения на новом шаге предполагает перевычисление предыдущих решений на новой равномерной сетке с соответствующим шагом. Для этого, как правило, прибегают к интерполяционным многочленам. Главный недостаток такого подхода состоит в том, что вместе с решениями необходимо перевычислять и значения правых частей уравнений. Другой подход — это построение многошаговых схем интегрирования на неравномерной сетке.

Если в явном методе Адамса в качестве приближения подынтегральной функции выбрать полином Ньютона

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_{s-1} + \mathbf{f}_{s-1,s-2}(t - t_{s-1}) + \dots + \mathbf{f}_{s-1,s-2,\dots,0}(t - t_{s-1}) \dots (t - t_1),$$

то для s -го решения при известных s предыдущих решениях обобщение метода на случай переменного шага дает схему интегрирования

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{s-1} + \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_{i1} \mathbf{f}_{s-1,s-2,\dots,s-1-i}, \quad (5)$$

где коэффициенты γ_{i1} вычисляются рекуррентно по формулам [2]

$$\gamma_{0j} = (t_s - t_{s-1})^j / j!, \quad \gamma_{ij} = (t_s - t_{s-i})\gamma_{i-1,j} - j\gamma_{i-1,j+1}.$$

На практике (5) удобно использовать в тандеме с неявными схемами интегрирования. В неявных методах с переменным шагом выбирается полином

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{f}_{s-1} + \mathbf{f}_{s-1,s-2}(t - t_{s-1}) + \dots + \mathbf{f}_{s,s-1,\dots,0}(t - t_{s-1}) \dots (t - t_0).$$

Тогда решение можно представить как

$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_s^P + \gamma_{s1}\mathbf{f}_{s,s-1,\dots,0}, \quad (6)$$

где \mathbf{x}_s^P — решение-предиктор (5).

Удобство тандема (5) и (6) в данном случае состоит в том, что корректирующий член в (6) можно использовать для контроля шага, поскольку он представляет собой оценку ошибки явного метода, т.е.

$$\|\mathbf{e}\|_{cal} = \|\gamma_{s1}\mathbf{f}_{s,s-1,\dots,0}\|.$$

Размер шага в процессе интегрирования выбирается по формуле

$$\bar{h} = h \left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}} \right)^{1/(p+1)}, \quad (7)$$

где \bar{h} — новый шаг интегрирования, а $\|\mathbf{e}\|_{tol}$ — задаваемая точность.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОВ АДАМСА–МУЛЬТОНА

2.1 Постановка численного эксперимента

Для исследования эффективности методов Адамса–Мультонна был проведен численный эксперимент. Предварительно на основе схемы интегрирования многошагового метода был написан интегратор на языке Фортран. Эффективность многошагового интегрирования исследовалась на примере уравнений плоской нормированной эллиптической задачи двух тел ($\mu = 1$, $a = 1$, $e < 1$, $I = 0$)¹:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

¹Здесь μ — гравитационный параметр; a — большая полуось; e — эксцентриситет; I — наклонение.

или

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

с начальными условиями

$$r_1 = 1 - e, \quad r_2 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = \sqrt{(1 + e)/(1 - e)}.$$

Здесь $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — векторы положения и скорости соответственно. Интегрирование выполнялось на интервале времени 1000 оборотов в компьютерной арифметике с двойной точностью.

Следует отметить некоторые особенности в компьютерной реализации метода Адамса–Мульттона. За стартовые брались решения, вычисленные путем численного интегрирования уравнения классическим методом Рунге–Кутты (4-го порядка) [1] с уменьшенным в восемь раз шагом. Размер шага интегрирования выбирался по формуле (7). При этом, если конечный момент оказывался внутри шага интегрирования, то шаг выбирался принудительно, с тем что бы обеспечить получение численного решения на заданный момент времени в конце интервала интегрирования. Кроме того, решения нелинейных уравнений в корректоре выполнялось методом простых итераций. На каждом шаге для уточнения решения выполнялось две итерации, что предполагало два обращения к функции правых частей.

В процессе интегрирования оценивались точность и быстродействие. Точность интегрирования $|\Delta \mathbf{x}|$ оценивалась на конце временного интервала путем сравнения полученных результатов интегрирования с начальными данными, а быстродействие — количеством обращений к процедуре правых частей уравнения. Каждой задаваемой точности $\|\mathbf{e}\|_{tol}$ соответствуют свои показатели глобальной точности и быстродействия. Таким образом, варьируя $\|\mathbf{e}\|_{tol}$ мы получили характеристики интегрирования «точность–быстродействие» для различных порядков метода Адамса в круговой задаче (рис. 1), а также для 9-го порядка метода в задачах с различными эксцентриситетами (рис. 2).

2.2 Анализ численных результатов

На рис. 1 представлены характеристики «точность–быстродействие» для различных порядков p в круговом случае ($e = 0$). Из рисунка видно,

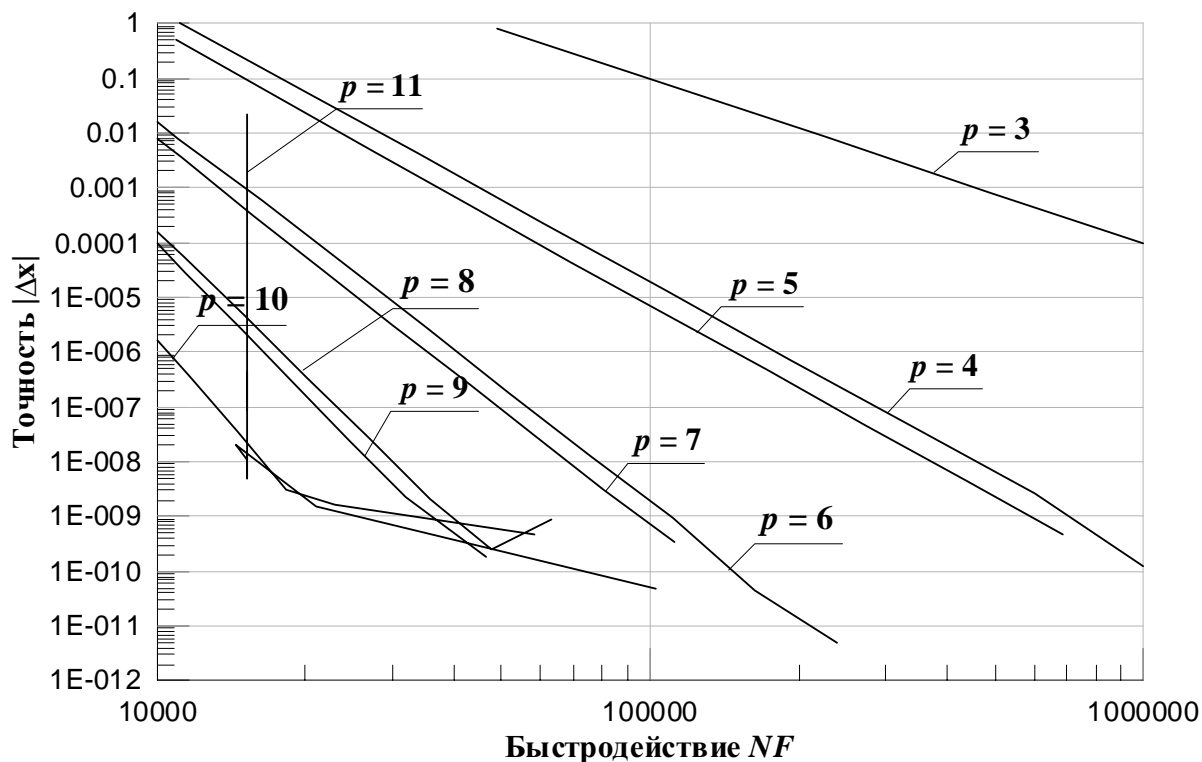


Рис. 1: Эффективность численного интегрирования для методов Адамса–Мултона различных порядков ($e = 0$)

что при увеличении порядка численного метода эффективность интегрирования улучшается: повышаются как методическая точность, так и быстродействие.

Впрочем, следует заметить, что методы с соседними порядками, $p = 2i$ и $p = 2i + 1$, фактически одинаково эффективны. С чем это связано, нам пока неизвестно. Возможно, численные решения для методов четных порядков обладают лучшими свойствами с точки зрения численного интегрирования. В дальнейшем мы предполагаем исследовать это вопрос детально.

Достаточно необычный результат имеет место для метода 11-го порядка: при варьировании локальной точности быстродействие не изменяется, хотя глобальная точность при этом все же повышается. Это, конечно же, вызвано тем, что шаг интегрирования выбирается неправильно, и в процессе интегрирования он практически один и тот же для достаточно широкого диапазона изменения величины $\|\mathbf{e}\|_{tol}$. Видимо, для методов высоких порядков при интегрировании с достаточно большим шагом оценка локальной точности $\|\mathbf{e}\|_{cal}$ по разделенной разности $\mathbf{f}_{s,s-1,\dots,0}$ в (7)

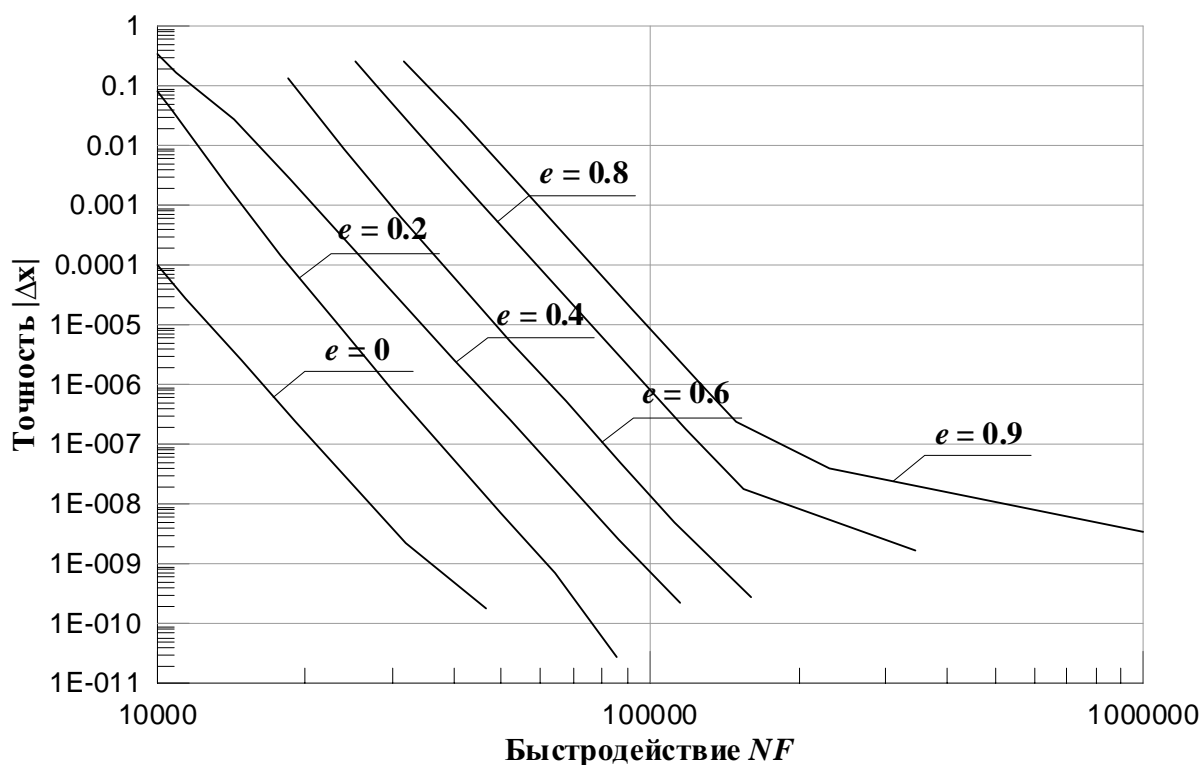


Рис. 2: Эффективность метода Адамса–Мульттона ($p = 9$) для орбит с различными эксцентриситетами

оказывается грубой и поэтому не может быть использована для управления шагом интегрирования.

Парадоксально, но из рисунка также видно, что ошибки округления накапливаются гораздо медленнее у методов низких порядков, при том что объем вычислений у них гораздо больше, нежели у методов высоких порядков². Можно предполагать, что в данном случае понижение вычислительной точности с увеличением порядка метода связано прежде всего с большими ошибками округления, возникающими при вычислении разделенных разностей высоких порядков.

Далее, на рис. 2 показана эффективность метода Адамса–Мульттона 9-го порядка при численном интегрировании орбит с различными эксцентриситетами. Как видно, эффективность многошагового метода достаточно быстро падает с ростом эксцентриситета. Так, объем вычислений

²Уровень вычислительной точности определяется «коленом» характеристик. Для соответствующего значения NF выбираемые шаги интегрирования оказываются настолько малыми, что методические ошибки становятся меньше неустранимых ошибок округления, и дальнейшее повышение локальной точности путем уменьшения $\|e\|_{tol}$ приводит только к усилению вычислительных ошибок и понижению точности результатов интегрирования.

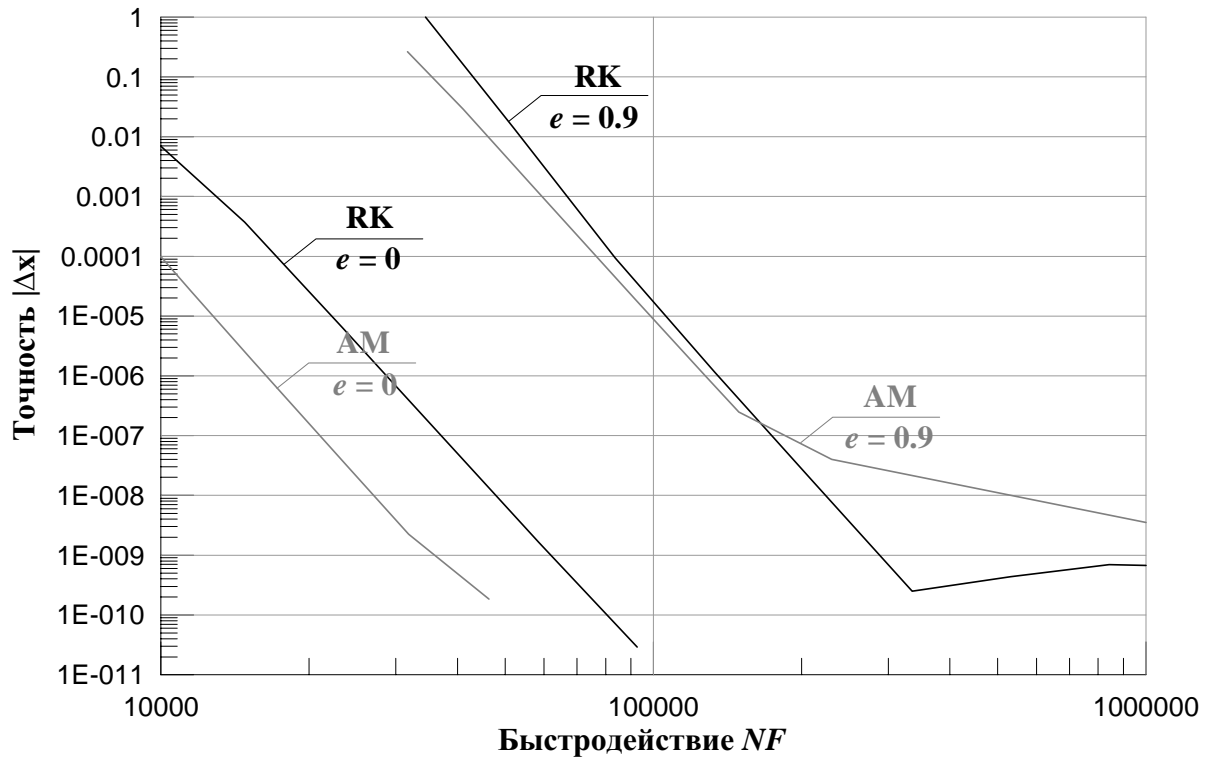


Рис. 3: Эффективность методов Адамса–Мультона и Рунге–Кутты девя-
тых порядков для орбит с эксцентриситетами $e = 0$ и $e = 0.9$

для орбиты с эксцентриситетом $e = 0.9$ почти на порядок ниже, нежели для круговой орбиты, а точность ухудшается почти на 9 порядков.

Чтобы оценить эффективность методов Адамса–Мультона в сравне-
нии с методами Рунге–Кутты, мы провели те же вычисления, исполь-
зуя интегратор Гаусса–Эверхарта 9-го порядка (неявный метод Рунге–
Кутты) [3] для случаев $e = 0$ и $e = 0.9$. Результаты приведены на рис. 3.
Как видно, с точки зрения быстродействия метод Адамса обладает бо-
лее высокой скоростью интегрирования (при одинаковой точности), чем
метод Рунге–Кутты, в особенности для круговых орбит (почти в два ра-
за). Между тем, следует заметить, что ошибки округления для метода
Рунге–Кутты накапливаются значительно медленнее и это прежде все-
го обуславливает более высокую точность численного интегрирования,
нежели для метода Адамса–Мультона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе были получены следующие результаты:

1. На основе формул метода Адамса–Мультона составлен интегратор на языке Фортран 90. В качестве предиктора в интеграторе используется метод Адамса–Башфорта, а стартовые решения находятся путем численного интегрирования уравнений методом Рунге–Кутты четвертого порядка.
2. Разработан программный комплекс для исследования эффективности методов Адамса–Мультона произвольного порядка на примере дифференциальных уравнений безразмерной плоской задачи двух тел;
3. Численно исследована эффективность многошаговых методов 3–11 порядков при интегрировании круговой орбиты, а также метода 9-го порядка при интегрировании эллиптических орбит с различными эксцентриситетами (до $e = 0.9$). Также проведено сравнение эффективности методов Адамса–Мультона и Рунге–Кутты.
4. В частности, экспериментально показано, что при интегрировании орбит с малыми эксцентриситетами многошаговые неявные методы Адамса–Мультона предпочтительнее, поскольку эффективнее по быстрдействию почти в два раза. В то же время при интегрировании высокоэллиптических орбит методы Адамса–Мультона и Рунге–Кутты одинаково хороши. Впрочем, ошибки округления для метода Рунге–Кутты накапливаются медленнее, поэтому он позволяет получить численное решение с более высокой точностью.

Таким образом, подводя итог, можно рекомендовать методы Адамса–Мультона для интегрирования почти круговых орбит, либо для численного исследования более сложного орбитального движения, если высокая точность не требуется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Springer, 1993. 539 p.
- [2] Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
- [3] Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит / В. А. Авдюшев. - Томск: Изд-во НТЛ, 2010. - 282 с.