

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра астрономии и космической геодезии

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГАК
зав. кафедрой астрономии и
космической геодезии
проф. Бордовицына Т.В. _____
" ____ " _____ 2006 г.

Туева Ольга Николаевна
**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СВЕТОВОГО
ДАВЛЕНИЯ И ЭФФЕКТА ПОЙНТИНГА–РОБЕРТСОНА
НА ТЕЛА В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**
(Дипломная работа)

Научный руководитель
к. ф.-м. н.
Авдюшев В.А. _____
Автор работы
Туева О.Н. _____

Томск 2006

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	5
2 СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЭФФЕКТ ПОЙНТИНГА–РОБЕРТСОНА	6
3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ	7
3.1 Уравнения в прямоугольных координатах	7
3.2 Влияние радиационных сил	7
3.2.1 Световое давление и эффект Пойнтинга–Робертсона	7
3.3 Влияние формы и частоты вращения спутника	9
3.3.1 Круглая пластина	10
3.3.2 Цилиндрическая форма	11
3.3.3 Кубическая форма	11
3.3.4 Усреднение возмущающей силы	12
3.4 Влияние несферичности Земли	13
3.5 Притяжение от Луны и Солнца.	14
4 МЕТОД ЭВЕРХАРТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	15
5 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	17
5.1 Искусственные спутники Земли	17
5.1.1 Описание эксперимента	17
5.1.2 Результаты эксперимента	17
5.2 Космический мусор	20
5.2.1 Описание эксперимента	20
5.2.2 Результаты эксперимента	20
5.3 Влияние формы и частоты вращения частицы КМ на ее движение	22
5.3.1 Описание эксперимента	22
5.3.2 Результаты эксперимента	23

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

27

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

28

ВВЕДЕНИЕ

За последнее время, главным образом, благодаря использованию в астрометрии ПЗС-средств измерения точность наблюдений искусственных спутников Земли (ИСЗ) существенно повысилась. Поэтому для адекватного описания динамики ИСЗ (в соответствии с точностью наблюдательных данных) сейчас возникает необходимость прибегать к весьма усложненному моделированию спутниковых орбит, где должны учитываться различные тонкие возмущающие факторы, например, такие как влияние приливных деформаций в теле Земли, релятивистские эффекты, а также световое давление от Солнца и так называемый эффект Пойнтинга–Робертсона.

В данной работе мы численно исследуем влияние солнечного света на орбитальное движение ИСЗ, а также частиц космического мусора (КМ).

В первом разделе дается постановка задачи. Второй раздел посвящен описанию сути явления светового давления и эффекта Пойнтинга–Робертсона. В третьем приводятся дифференциальные уравнения движения в прямоугольных координатах, а также алгоритмы вычисления основных возмущений, учитываемых нами при построении численной модели движения ИСЗ. Особое внимание уделяется исследованию влияния радиационного давления на спутниковое движение при учете формы и вращения ИСЗ. В четвертом разделе излагается метод Эверхарта для численного интегрирования дифференциальных уравнений орбитального движения. Последний раздел включает в себя постановку эксперимента, а также изложение и анализ полученных нами численных результатов. В заключении перечисляются основные результаты выполненной работы.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как было отмечено выше, в данной работе мы численно исследуем влияние светового давления от Солнца и эффекта Пойнтинга–Робертсона на орбитальное движение ИСЗ, а также частиц КМ.

Для решения поставленной задачи предполагалось: 1) вывести формулы для моделирования влияния радиационных сил на околоземные объекты с учетом их форм и вращения; 2) для быстровращающихся объектов с помощью процедуры усреднения получить приближенные модели радиационных сил; 3) на основе выведенных нами дифференциальных уравнений орбитального движения с использованием численного метода Эверхарта 15-го порядка с переменным шагом построить численную динамическую модель околоземного объекта, учитывающую помимо влияния солнечного света основные возмущающие факторы; 4) провести численный эксперимент по исследованию влияния солнечного света на некоторые ИСЗ и мелкие частицы КМ; и 5) проанализировать полученные результаты.

2 СВЕТОВОЕ ДАВЛЕНИЕ И ЭФФЕКТ ПОЙНТИНГА–РОБЕРТСОНА

В 1903 г. Пойнтингом было установлено [1], что на небесные тела действуют не только силы гравитации, но и радиационные силы. Воздействие радиационных сил от Солнца на малые тела Солнечной системы приводит к заметным возмущениям в их движении, которые могут быть наблюдаемы с помощью современных средств измерения.

Сила, обусловленная солнечным излучением, может быть представлена как совокупность двух компонент: светового давления и так называемого эффекта Пойнтинга–Робертсона [2]. Природу последнего эффекта долгое время не понимали из-за излишней сложности описания и только в 1937 г., опираясь на метрику специальной теории относительности, Робертсону удалось получить выражение для суммарной радиационной силы.

В зависимости от соотношения размера и массы небесного тела, преобладающими будут либо силы гравитационного притяжения, либо светового давления, либо торможения, обусловленного эффектом Пойнтинга–Робертсона. Так, на массивные тела Солнечной системы основное влияние оказывает сила притяжения Солнца. Если же масса небесного тела очень мала, действие светового давления уже существенно, но при этом его влияние может оказаться недостаточным, чтобы вытолкнуть частицу за границы Солнечной системы. Тогда как эффект Пойнтинга–Робертсона действует уже значительно. Свет тормозит движение частицы, в результате чего она будет падать на Солнце. Наконец, для еще более мелких частиц световое отталкивание существенно преобладает как над тяготением к Солнцу, так и над эффектом Пойнтинга–Робертсона и солнечные лучи будут гнать частицы по гиперболическим орбитам за пределы Солнечной системы.

В данной работе мы исследуем специфику влияния светового давления и эффекта Пойнтинга–Робертсона на динамику околоземных объектов. Интерес представляет численный анализ воздействия этих факторов на движение ИСЗ и фрагментов космического мусора. Особенность задачи состоит в том, что в этом случае излучающее тело уже не является центральным.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Для численного моделирования орбитального движения частицы были взяты дифференциальные уравнения движения в прямоугольной системе координат.

3.1 Уравнения в прямоугольных координатах

Будем рассматривать движение частицы с пренебрежимо малой массой в поле тяготения Земли под действием возмущающих сил \mathbf{P} . Тогда дифференциальные уравнения движения в геоцентрической системе координат будут иметь вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{P}; \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0),$$

где $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ — геоцентрический вектор положения спутника, t — время (t_0 — начальный момент времени), μ — гравитационная постоянная Земли, \mathbf{P} — возмущающие силы.

3.2 Влияние радиационных сил

3.2.1 Световое давление и эффект Пойнтинга–Робертсона

Радиационные силы могут быть представлены как [1, 2]

$$\mathbf{P}_R = \underbrace{F_P \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}}_{\mathbf{P}_P} - \underbrace{F_P \left[\frac{\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}}{c|\mathbf{R}|} \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} + \frac{\dot{\mathbf{R}}}{c} \right]}_{\mathbf{P}_{PR}}, \quad (2)$$

где \mathbf{P}_P — сила светового давления, а \mathbf{P}_{PR} представляет эффект Пойнтинга–Робертсона. В \mathbf{P}_{PR} первый член в скобках отвечает за доплеровский сдвиг, возникающий вследствие движения объекта; второй член — результат поглощения и последующего переизлучения части принятого частицей излучения. Здесь \mathbf{R} — вектор положения исследуемого объекта

относительно Солнца, c — скорость света, F_P выражает величину силы радиационного давления и задается следующим образом [1, 2]:

$$F_P = \Theta k \Psi \left(\frac{a_E}{|\mathbf{R}|} \right)^2 \frac{A'}{m}, \quad (3)$$

где a_E — большая полуось орбиты Земли, Θ — постоянная, характеризующая отражающие свойства спутника, m и A' — его масса и площадь миделевого сечения соответственно, $k = 4.560 \cdot 10^{-6}$ Н/м² — солнечная постоянная, Ψ — функция тени.

Функция Ψ вычисляется следующим образом:

$$\Psi = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \geq R_E + R_S, \\ \Psi_P, & \text{если } R_E - R_S < \varphi < R_E + R_S, \\ 0, & \text{если } \varphi < R_E - R_S. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь φ — угловое расстояние между центрами Солнца и Земли на небесной сфере, а величины R_S и R_E соответствуют угловым радиусам, указанных небесных тел и вычисляются по формулам:

$$R_S = \arcsin \left(\frac{r_S}{|\mathbf{R}|} \right), \quad R_E = \arcsin \left(\frac{r_E}{|\mathbf{x}|} \right),$$

где r_S и r_E — средние экваториальные радиусы Солнца и Земли соответственно. Величину Ψ_P находим по формуле:

$$\Psi_P = 1 - S_{ES}/S,$$

где $S = \pi R_S^2$ — площадь всего солнечного диска, а S_{ES} — площадь пересечения солнечного диска с диском Земли:

$$S_{ES} = \frac{R_E^2}{2} (\varphi_E - \sin \varphi_E) + \frac{R_S^2}{2} (\varphi_S \pm \sin \varphi_S), \quad (5)$$

где

$$\varphi_E = 2 \arccos \left(\frac{\varphi^2 + R_E^2 - R_S^2}{2\varphi R_E} \right), \quad \varphi_S = 2 \arccos \left(\frac{\varphi^2 - R_E^2 + R_S^2}{2\varphi R_S} \right),$$

причем второе слагаемое в (5) берем со знаком "+", если $\varphi_S \geq \pi$, и со знаком "-", если $\varphi_S < \pi$.

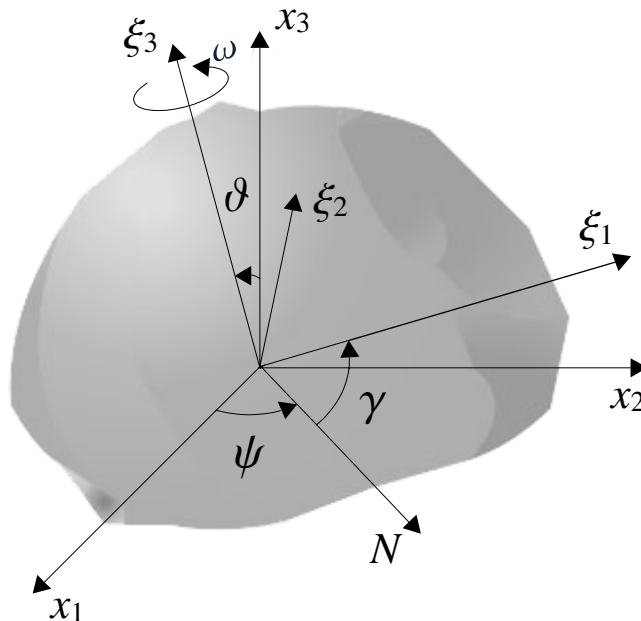


Рис. 1: Ориентация твердого тела

3.3 Влияние формы и частоты вращения спутника

Как было отмечено ранее, величина силы светового давления зависит от отношения площади миделевого сечения частицы A' к ее массе m . Поэтому для более детального исследования динамики частицы необходимо учитывать форму частицы с учетом ее ориентации относительно светового потока, поскольку от этих величин, в свою очередь, зависит площадь сечения A' .

Формы реальных частиц довольно сложны. При моделировании их представляют в виде совокупности примитивных тел. В данном разделе мы рассматриваем некоторые примитивные тела: круглую пластину, цилиндр и куб; а также выводим формулы их сечений в зависимости от определенных ориентаций тел в пространстве.

Ориентацию любого тела в пространстве можно задать с помощью трех эйлеровых углов: угла прецессии ψ , нутации ϑ и угла собственного вращения γ (рис. 1). Будем считать, что возмущающие силы, действующие на частицу, пренебрежимо малы. Тогда углы прецессии и нутации будут иметь постоянные значения, а угол собственного вращения γ будет равномерно меняться со временем, т.е. $\gamma = \omega t$, где $\omega = \text{const}$ — угловая скорость вращения частицы.

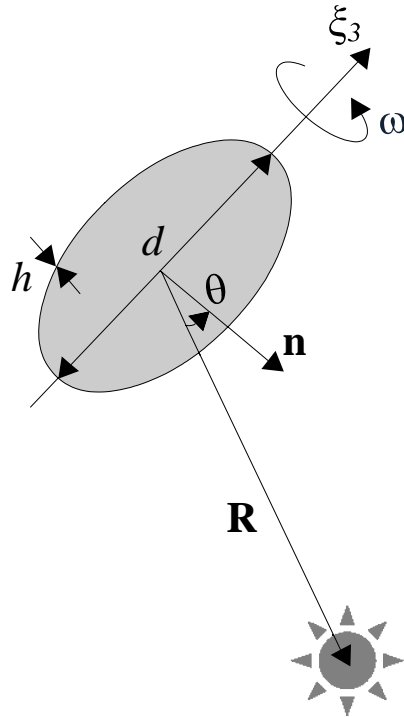


Рис. 2: Вращение круглой пластины

3.3.1 Круглая пластина

Пусть пластина имеет диаметр d , толщину h и плотность ρ , причем $h \ll d$, а ось вращения лежит в плоскости пластины (рис. 2). Тогда площадь пластины будет $S = \pi d^2/4$. Сечение фактически определяется путем проецирования пластины на плоскость, перпендикулярную направлению на Солнце \mathbf{R} . Таким образом,

$$A' = S |\cos \theta|, \quad \cos \theta = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})}{|\mathbf{R}|}, \quad (6)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ — нормаль пластины.

Тогда, принимая во внимание, что пластина имеет конечную толщину h , а, следовательно, и объем $V = Sh$, найдем искомое отношение площади сечения A' к массе m :

$$\frac{A'}{m} = \frac{|\cos \theta|}{\rho h}. \quad (7)$$

Интересно заметить, что полученное отношение A'/m для случая круглой пластины не зависит от диаметра d .

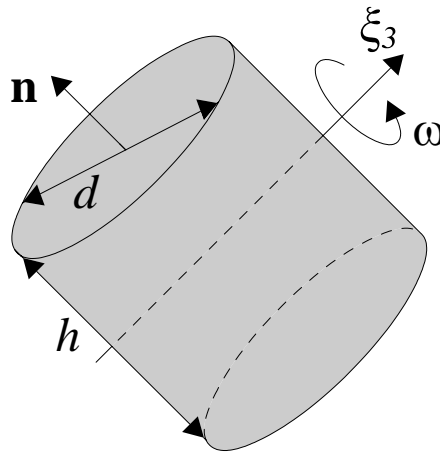


Рис. 3: Вращение частицы цилиндрической формы

3.3.2 Цилиндрическая форма

Пусть частица цилиндрической формы имеет диаметр основания d , высоту h и плотность ρ . Положим, что ось вращения проходит как указано на рис. 3. Если для круглой пластины сечение представляет собой эллипс, то для рассматриваемого случая цилиндрической частицы миделево сечение состоит из двух эллиптических половинок и одной прямоугольной составляющей. Тогда

$$A' = S_{\circ} |\cos \theta| + S_{\square} |\sin \theta|,$$

где S_{\circ} и S_{\square} — площади эллипса и прямоугольника, а $\cos \theta$ вычисляется по формуле (6). Подставляя соответствующие выражения для S_{\circ} , S_{\square} и V , приходим к следующему отношению A'/m :

$$\frac{A'}{m} = \frac{|\cos \theta|}{\rho h} + \frac{4|\sin \theta|}{\pi \rho d}. \quad (8)$$

Очевидно, что круглая пластинка является частным случаем цилиндра.

3.3.3 Кубическая форма

Пусть ось вращения куба проходит через центры любых двух противоположных его граней (рис. 4). Для нахождения площади миделево сечения A' кубической частицы, удобно представить ее как совокупность шести

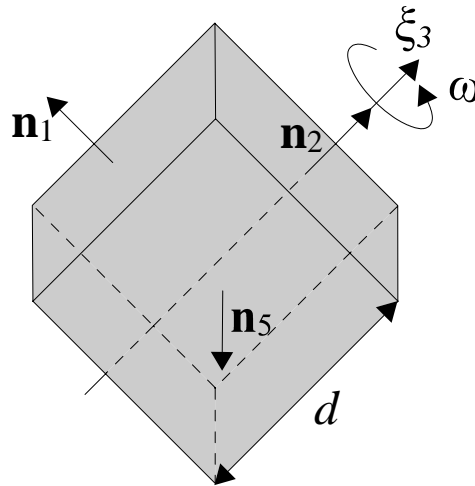


Рис. 4: Вращение частицы кубической формы

пластинок, нормали которых определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \mathbf{n}_1(0, 0, 1), & \mathbf{n}_4 &= \mathbf{n}_4(-\sin \gamma, \cos \gamma, 0), \\ \mathbf{n}_2 &= \mathbf{n}_2(0, 0, -1), & \mathbf{n}_5 &= \mathbf{n}_5(-\cos \gamma, -\sin \gamma, 0), \\ \mathbf{n}_3 &= \mathbf{n}_3(\cos \gamma, \sin \gamma, 0), & \mathbf{n}_6 &= \mathbf{n}_6(\sin \gamma, -\cos \gamma, 0). \end{aligned}$$

Тогда

$$A' = \sum_{i=1}^6 A'_i = S_{\square} \sum_{i=1}^6 \delta_i \cos \theta_i, \quad (9)$$

где δ_i — условие видимости i -ой пластины относительно солнца:

$$\delta_i = \begin{cases} 0, & \cos \theta_i < 0, \\ 1, & \cos \theta_i \geq 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание (9) и проведя ряд простейших преобразований, получим следующую формулу для отношения A'/m :

$$\frac{A'}{m} = \frac{\sum_{i=1}^6 \cos \theta_i}{\rho d}. \quad (10)$$

3.3.4 Усреднение возмущающей силы

Для частиц, вращающихся с большой частотой ω , можно применить операцию усреднения к площади A' , которая непосредственно зависит от быстрого угла γ . Как будет показано ниже, применение упрощенной модели светового давления в результате усреднения не существенно влияет на точность прогнозирования орбитального движения.

Следует также отметить, что влияние светового давления для быстровращающихся тел вызывает короткопериодические возмущения, которые интегрируются с очень малым шагом, что существенно понижает быстродействие пошагового процесса [3].

Операция усреднения для 2π -периодичной функции $Z(z)$ по быстрой переменной z имеет вид [4]:

$$\bar{Z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(z) dz. \quad (11)$$

Усредненные по γ отношения A'/m приведены в табл. 1, где

$$C = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{R_3}{|\mathbf{R}|} \right)^2}.$$

Таблица 1: Усредненные отношения A'/m для различных тел

	Пластина	Цилиндр	Куб
$\frac{A'}{m}$	$C \frac{1}{\rho h}$	$C \left(\frac{1}{\rho h} + \frac{4}{\pi \rho d} \right)$	$\left(2C + \frac{ R_3 }{ \mathbf{R} } \right) \frac{1}{\rho d}$

3.4 Влияние несферичности Земли

Важнейшее возмущающее влияние на движение искусственных спутников Земли оказывает несферичность планеты. Потенциал несферичности можно представить в виде [5]:

$$U = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|} \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{r_E}{|\mathbf{x}|} \right)^n P_n(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{r_E}{|\mathbf{x}|} \right)^n P_{n,m}(\sin \phi) [C_{n,m} \cos m\lambda + S_{n,m} \sin m\lambda], \quad (12)$$

где ϕ , λ — геоцентрические полярные координаты спутника; P_n , $P_{n,m}$ — полином и присоединенная функция Лежандра; J_n , $C_{n,m}$, $S_{n,m}$ — безразмерные коэффициенты, зависящие от формы Земли и распределения масс внутри нее.

Основной вклад в возмущающие силы вносит гармоника J_2 , которую мы и учитывали в модели. Поскольку

$$\sin \phi = \frac{x_3}{|\mathbf{x}|}, \quad P_2(\sin \phi) = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \phi - 1),$$

потенциальная функция второй зональной гармоники будет:

$$U = -\frac{1}{2} \frac{\mu J_2 r_E^2}{|\mathbf{x}|^3} \left(3 \frac{x_3^2}{|\mathbf{x}|^2} - 1 \right). \quad (13)$$

Частные производные от потенциала U дают возмущающие ускорения, вызываемые несферичностью центрального тела до второй зональной гармоники:

$$\mathbf{P}_G = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = C_1 [(C_2 - 1) \mathbf{x} - 2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3], \quad (14)$$

где

$$C_1 = \frac{3}{2} \frac{\mu J_2 r_E^2}{|\mathbf{x}|^5}, \quad C_2 = \frac{5x_3^2}{|\mathbf{x}|^2},$$

а \mathbf{e}_3 — единичный вектор, направленный вдоль оси аппликат.

3.5 Притяжение от Луны и Солнца.

При построении численной модели движения ИСЗ было также учтено гравитационное притяжение от Луны и Солнца. Возмущающая сила от массивных тел вычислялась по формуле

$$\mathbf{P}_{GP} = \mu_L \left(\frac{\mathbf{x}_L - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_L - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_L}{|\mathbf{x}_L|^3} \right) + \mu_S \left(\frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_S}{|\mathbf{x}_S|^3} \right), \quad (15)$$

где μ_L и μ_S — гравитационные параметры Луны и Солнца соответственно; \mathbf{x}_L и \mathbf{x}_S — геоцентрические векторы положения Луны и Солнца, которые вычислялись по данным фонда DE200/LE200 [6].

4 МЕТОД ЭВЕРХАРТА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для интегрирования дифференциальных уравнений мы использовали широко применяемый на практике метод Эверхарта 15-го порядка [7, 8].

Пусть имеем задачу Коши:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0. \quad (16)$$

Согласно методу Эверхарта 15-го порядка решение на шаге h будет

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + h \left(\mathbf{Q}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7 \right), \quad (17)$$

где $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_7$ определяются как

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + c_{71}\boldsymbol{\alpha}_7, \\ \mathbf{A}_2 &= c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + c_{72}\boldsymbol{\alpha}_7, \\ &\dots \\ \mathbf{A}_7 &= c_{77}\boldsymbol{\alpha}_7. \end{aligned} \quad (18)$$

Коэффициенты c_{ij} являются числами Стирлинга, которые вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, && \text{(диагональ)} \\ c_{i1} &= -\tau_{i-1}c_{i-1,1}, && (i > 1) \quad \text{(первая строка)} \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1}c_{i-1,j}. && (i > j > 1) \end{aligned} \quad (19)$$

В свою очередь, $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_7$ получаем из соотношений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)/\tau_1, \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= ((\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0)/\tau_2 - \boldsymbol{\alpha}_1)/(\tau_2 - \tau_1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3 &= (((\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_0)/\tau_3 - \boldsymbol{\alpha}_1)/(\tau_3 - \tau_1) - \boldsymbol{\alpha}_2)/(\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (20)$$

где $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_7$ вычисляются для $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_7$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 + H \left(\mathbf{Q}_0\tau_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_1^2 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7\tau_1^8 \right), \\ &\dots \\ \mathbf{q}_7 &= \mathbf{q}_0 + H \left(\mathbf{Q}_0\tau_7 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_7^2 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7\tau_7^8 \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Не трудно видеть, что алгоритм интегрирования неявный. Поэтому решение на шаге ищется итерационным способом. В начале интегрирования α_i равны нулю. Определяем \mathbf{q}_1 , по которому вычисляем α_1 и улучшаем значение \mathbf{A}_1 . Далее определяем \mathbf{q}_2 с учетом \mathbf{A}_1 и находим улучшенные значения $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ и так далее до сходимости процесса.

Для произвольного разбиения τ_1, \dots, τ_7 метод, вообще говоря, имеет 8 порядок. Однако его можно повысить до 15, если в качестве величин τ_i использовать корни многочлена

$$d_1 + d_2\tau + d_3\tau^2 + \dots + \tau^7 = 0, \quad (22)$$

где коэффициенты d_1, \dots, d_7 представляют собой решение системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3} + \frac{d_3}{4} + \frac{1}{5} &= 0, \\ \dots & \\ \frac{d_1}{7} + \frac{d_2}{8} + \frac{d_3}{9} + \frac{1}{10} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

В методе Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена. Каждый следующий шаг \bar{h} выбирается по формуле

$$\bar{h} = h\tau = h \left(\frac{k+1}{h} \frac{\|\mathbf{e}_{tol}\|}{\|\mathbf{A}_k\|} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \quad (24)$$

где $\|\mathbf{e}_{tol}\|$ — заданная точность.

5 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования влияния радиационных сил, действующих на тела в околоземном пространстве, был проведен ряд экспериментов, в которых: 1) оценивалось влияние радиационных сил на ИСЗ; 2) исследовалась перспектива очищения геостационарной орбиты от объектов КМ за счет светового давления и эффекта Пойнтинга–Робертсона; 3) анализировались зависимости величины возмущения, обусловленного силой светового давления, от формы и частоты вращения частицы КМ.

С этой целью в данной работе была построена численная модель движения ИСЗ на основе дифференциальных уравнений движения в прямоугольной системе координат (1). Интегрирование уравнений производилось методом Эверхарта 15 порядка с переменным шагом в арифметике с двойной точностью.

5.1 Искусственные спутники Земли

5.1.1 Описание эксперимента

В работе исследовалось движение ИСЗ, обращающихся по различным орбитам — от почти круговой до высоко эллиптической и от средневысокой до геостационарной. В эксперименте предполагалось, что все ИСЗ представляют собой металлические шарообразные спутники, плотность которых приближенно равна плотности алюминия — 2700 кг/м^3 . Коэффициент Θ в формуле (3) был положен равным единице, что соответствует случаю зеркального отражения падающего на исследуемый объект излучения. Оценка величины возмущений $|\Delta \mathbf{x}|$ осуществлялась путем нахождения максимального отклонения возмущенной орбиты спутника от орбиты, по которой двигался бы объект, если бы на него не действовало интересующее нас возмущение.

5.1.2 Результаты эксперимента

Для исследования поставленной задачи были выбраны следующие искусственные спутники Земли: спутник связи "Molniya", геодинамический спутник "Lageos", навигационный спутник "Etalon" и геостационар "Ekran".

Орбитальные и аэродинамические параметры объектов приведены в табл. 2. Динамические параметры взяты из [9], а аэродинамические — из [10].

Таблица 2: Параметры движения ИСЗ

ИСЗ	T (ч)	e	i ($^\circ$)	m (кг)	A' м ²
Ekran	24	0.01	10.0	1970	1.5394
Etalon	12	0.01	63	1415	1.3151
Molniya	12	0.725	62.8	1600	1.5394
Lageos	3.8	0.04	109.8	411	0.2827

Интегрирование уравнений движения ИСЗ проводилось на годичном интервале времени. Результаты оценки возмущающих факторов приведены в табл. 3.

Для геосинхронного спутника "Ekran" влияние светового давления оказывается на два порядка выше, чем влияние эффекта Пойнтинга–Робертсона. Но на длительных интервалах времени, порядка нескольких десятков лет, возмущения от этих двух факторов становятся сравнимыми по величине. Эта тенденция хорошо прослеживается на рис. 5. Здесь представлены результаты интегрирования уравнений движения геостационарного спутника "Ekran" на тридцатилетнем интервале времени.

Величина возмущения, обусловленного световым давлением, возрастает со временем линейно, тогда как возмущение от эффекта Пойнтинга–Робертсона увеличивается квадратично. Такое поведение величины возмущения, обусловленного эффектом Пойнтинга–Робертсона, можно объяснить явлением диссипации, т.е. потерей энергии. В результате этого происходит уменьшение большой полуоси орбиты спутника по линейному закону (рис. 6), в то время как при влиянии только светового дав-

Таблица 3: Влияние основных возмущений на движение ИСЗ (1 год)

ИСЗ	Возмущения $ \Delta x $ (км)				
	Несфер.	Луна	Солнце	Свет. давл.	П–Р
Ekran	3132.413	2142.215	1713.809	2.540	$7.545 \cdot 10^{-2}$
Etalon	4737.221	233.815	388.163	1.102	$9.276 \cdot 10^{-2}$
Molniya	53088.828	2514.467	262.283	41.480	$9.436 \cdot 10^{-2}$
Lageos	18692.019	105.988	32.178	$1.274 \cdot 10^{-1}$	$9.911 \cdot 10^{-2}$

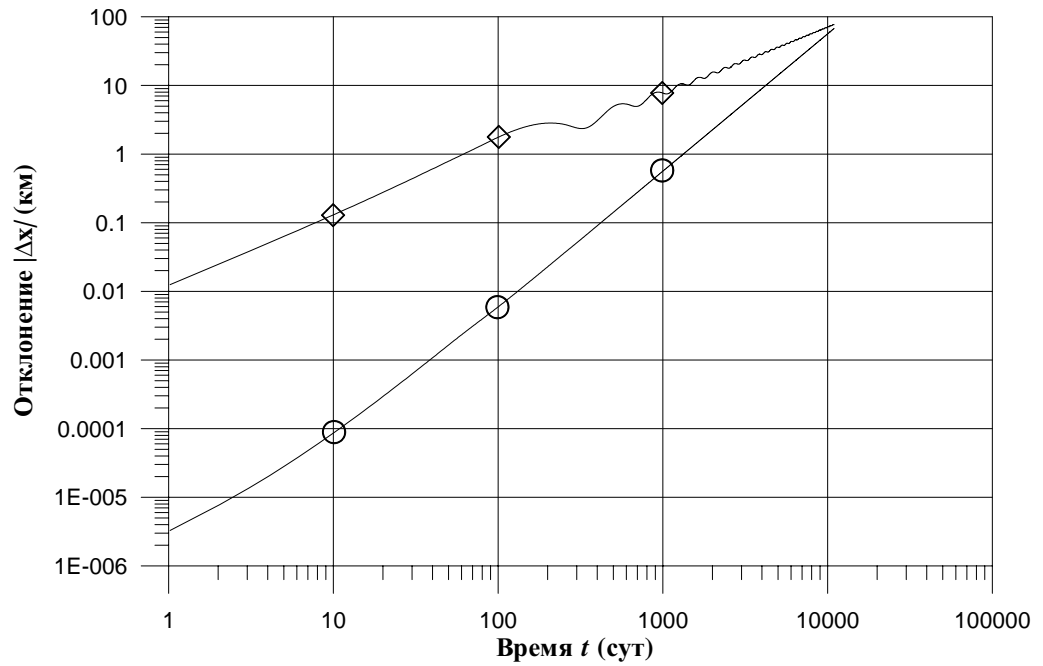


Рис. 5: Возмущение в векторе положения от влияния радиационных сил на геостационар "Ekran" (30 лет, ◇ — световое давление, ○ — эффект Пойнтинга-Робертсона)

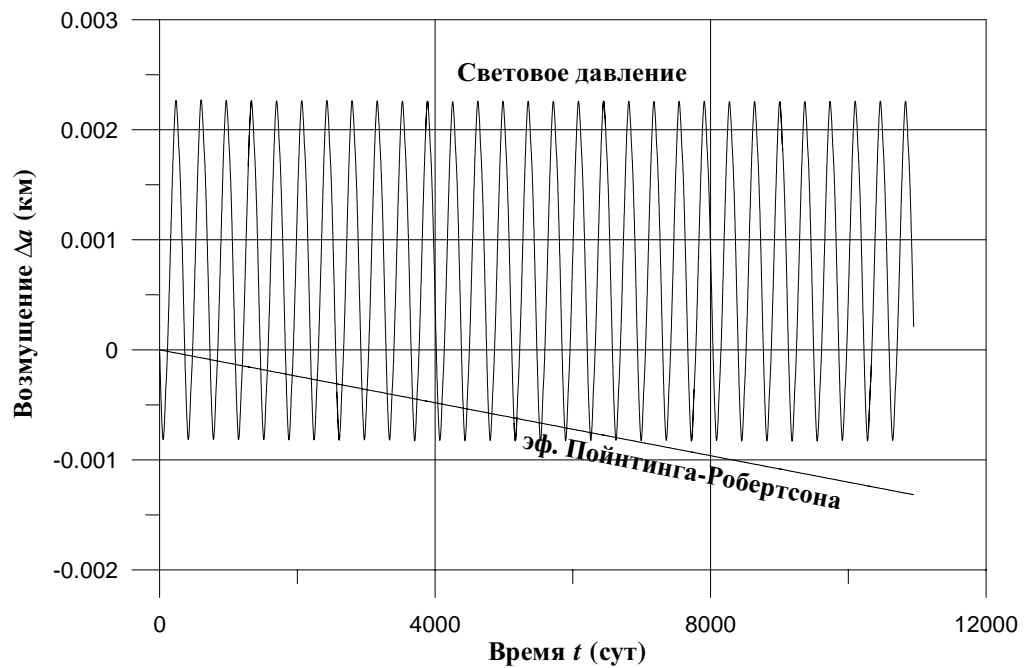


Рис. 6: Возмущение большой полуоси от влияния радиационных сил на геостационар "Ekran" (30 лет)

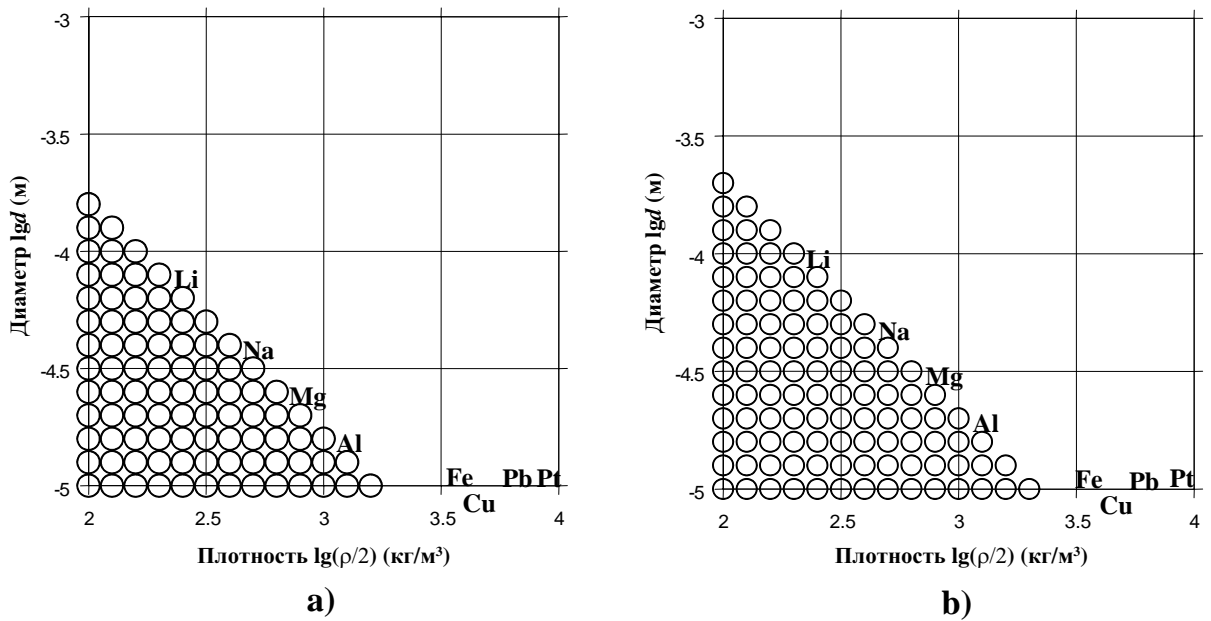


Рис. 7: Условие выпадения частицы КМ: а) геостационарная зона, б) орбита порядка 12000 км: \circ — выпавшие частицы (50 лет)

ления характерным является периодическое (ограниченное) изменение большой полуоси.

5.2 Космический мусор

5.2.1 Описание эксперимента

Исследование поведения мелкой фракции космического мусора, населяющего околоземное пространство, проводилось при учете только сил радиационного давления. Причем размеры рассматриваемых сферических частиц были взяты в диапазоне от 1 см до 0.01 мм в диаметре, а плотность частиц — от 530 кг/м^3 (что соответствует плотности самого легкого металла — лития) до 21400 кг/м^3 (плотности платины). Интегрирование выполнялось на интервале времени 50 лет. При этом регистрировалось выпадение фрагментов на Землю.

5.2.2 Результаты эксперимента

На рис. 7 показана зависимость выпадения частицы КМ от ее аэродинамических параметров. Следует заметить, что "треугольная" зависимость (в логарифмической шкале) на рис. 7 обусловлена тем, что сила радиа-

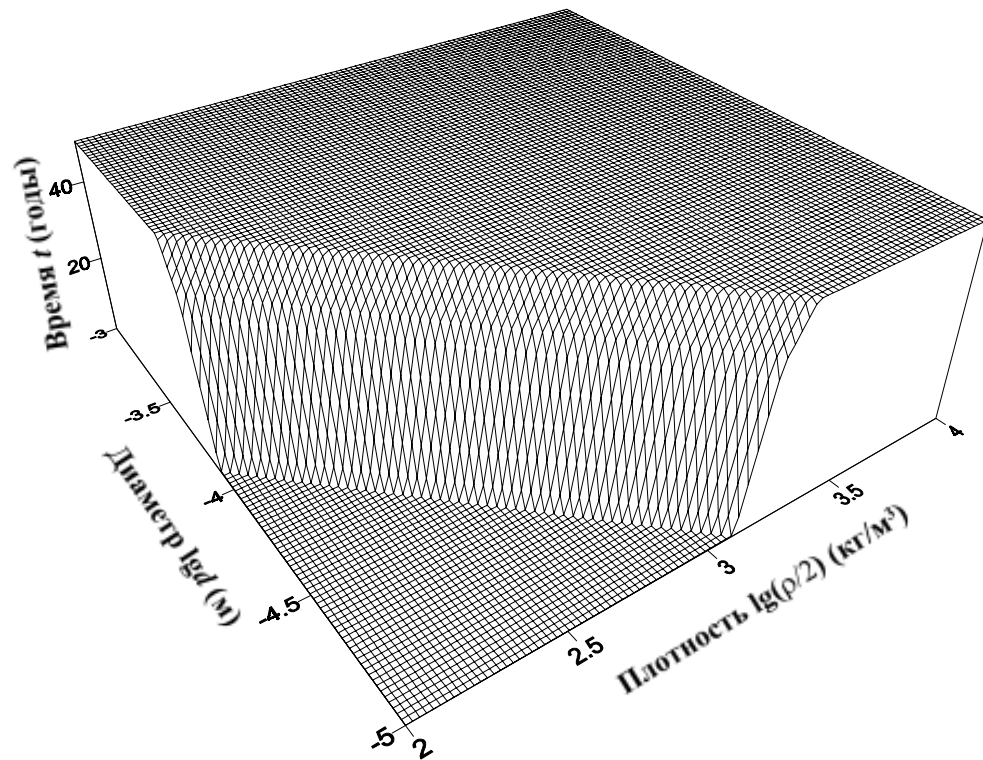


Рис. 8: Зависимость времени жизни частицы КМ на геостационарной орбите от ее аэродинамических параметров

ционного излучения, действующая на сферические частицы, фактически обратно пропорционально произведению ρd .

За интервал времени 50 лет легкие и мелкие частицы падают на Землю, тогда как тяжелые и крупные все еще остаются на орбите. Следует заметить, что на средневысокой орбите выпадение частиц происходит несколько интенсивнее, чем на геостационарной. Интервалы времени, необходимые для входа различных частиц в плотные слои атмосферы, представлены на рис. 8.

Также было установлено, что для пылевой фракции легких частиц главным фактором, определяющим долговременность существования фракции в околоземном пространстве, является световое давление. При этом сила солнечного давления является эффективным средством очищения околоземного пространства от КМ только для частиц, имеющих такие значения плотности ρ и размера d , для которых величина ρd меньше порядка 0.02 кг/м^2 .

Для фракции частиц больших размеров и плотности к уменьшению орбитальных высот приводит влияние эффекта Пойнтинга–Робертсона,

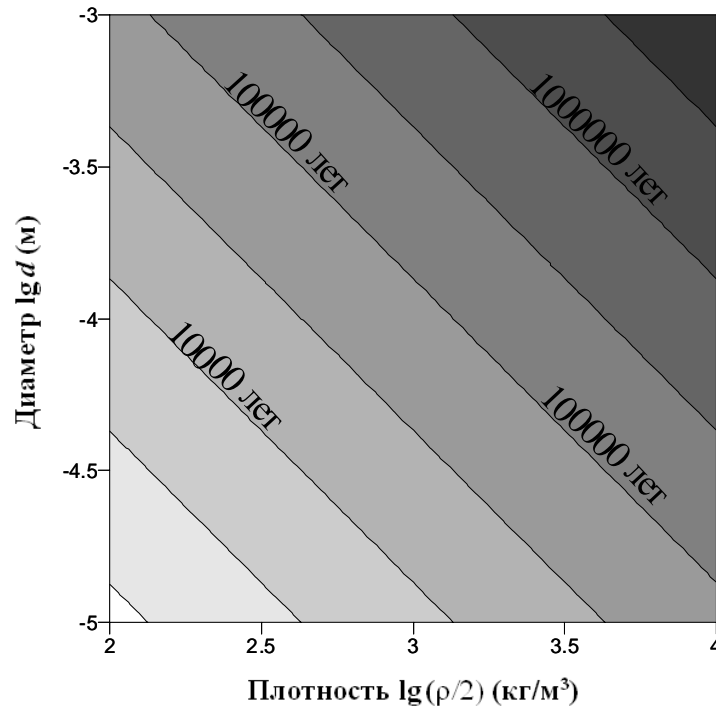


Рис. 9: Время существования частицы КМ на геостационарной орбите (эффект Пойнтинга–Робертсона)

но это влияние столь мало, что выпадение частиц оказывается возможным лишь в течение длительного интервала времени порядка 1000 лет и более (рис. 9), и поэтому в прикладных задачах этот фактор можно не принимать во внимание.

5.3 Влияние формы и частоты вращения частицы КМ на ее движение

5.3.1 Описание эксперимента

В данной работе нами также было исследовано влияние формы и частоты вращения частицы КМ на ее орбитальное движение.

Исследование проводилось в рамках следующей задачи. Рассматривалось движение частицы в прямоугольной геоцентрической системе координат на геостационарной орбите под действием только возмущающей силы от светового давления. Частица имела плотность, приближенно равную плотности алюминия ($\rho \approx 2700 \text{ кг/м}^3$).

Были рассмотрены следующие три формы частицы: 1) круглая пластина с диаметром $d = 1 \text{ мм}$ и толщиной $h = 0.1 \text{ мм}$; 2) цилиндр с

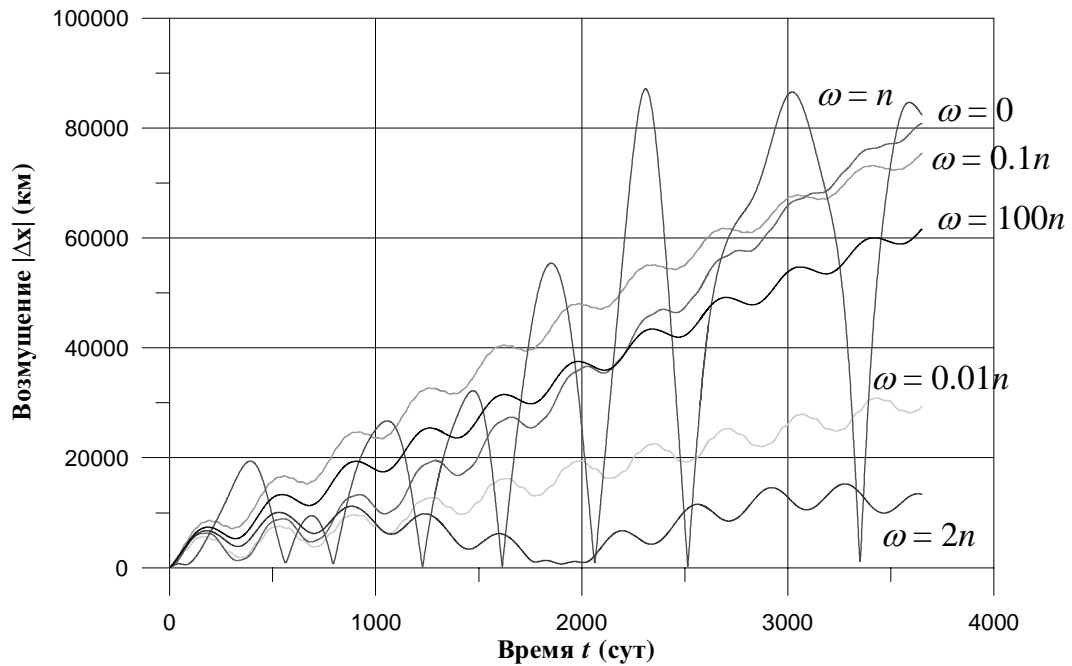


Рис. 10: Возмущение круглой пластины силой светового давления на геостационарной орбите (10 лет)

диаметром основания и толщиной $d = 1$ мм и $h = 2$ мм соответственно; а также 3) куб со сторонами $d = 2$ мм. Интегрирование уравнений движения выполнялось на интервале 10 лет. Оси вращения тел показаны на рис. 2–4.

5.3.2 Результаты эксперимента

Нами были рассмотрены различные частоты $\omega = kn$, где n — среднее движение частицы; а постоянная k принимает следующие значения: $1/100, 1/10, 0, 1, 2, 100$. Результаты для круглой пластины, цилиндра и куба приведены на рис. 10, 11 и 12 соответственно.

По характеристикам на рис. 10–12, соответствующим низким частотам $k < 100$, трудно судить о какой-либо связи между частотой вращения частицы ω и поведением возмущения $|\Delta \mathbf{x}|$. Тем не менее, нами было замечено, что при больших ω , когда $k \gg 1$, поведение $|\Delta \mathbf{x}|$ будет близко к некоторой предельной характеристике.

Для случаев вращения частиц с большой угловой скоростью ω целесообразно прибегнуть к процедуре усреднения (раздел 3, табл. 1). На рис. 13–15 приведены две кривые, которые получены по усредненной мо-

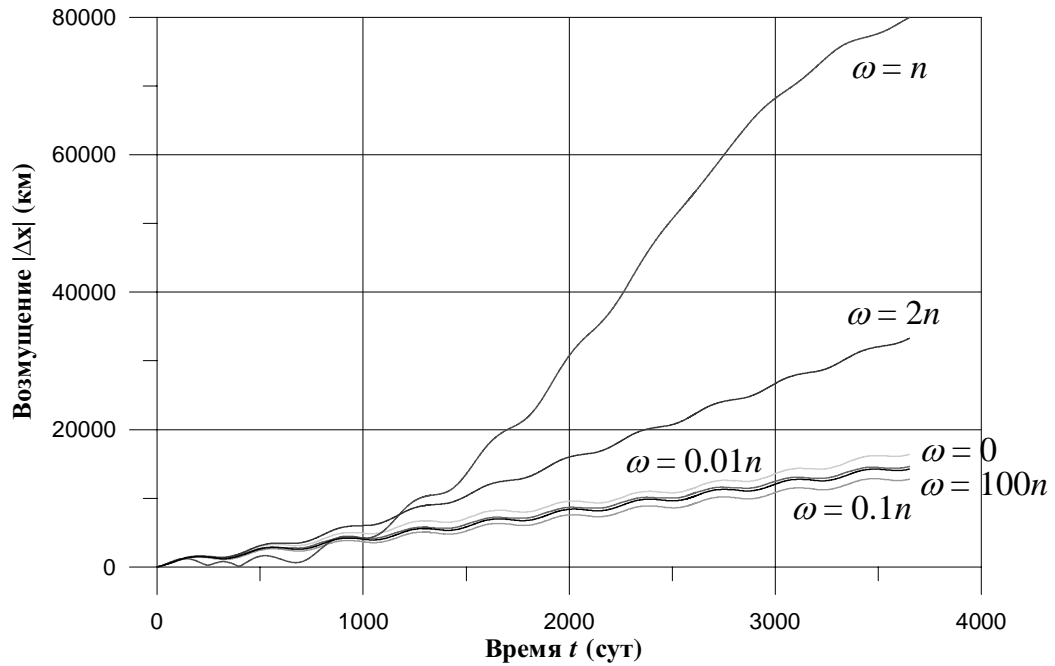


Рис. 11: Возмущение частицы цилиндрической формы силой светового давления на геостационарной орбите (10 лет)

дели и по модели, учитывающей вращение тела с $\omega = 100n$. Достаточно хорошее совпадение этих кривых говорит о том, что в моделях радиационных сил при больших частотах можно отказаться от учета вращения частицы и вместо реальной площади сечения A' использовать ее усредненный аналог.

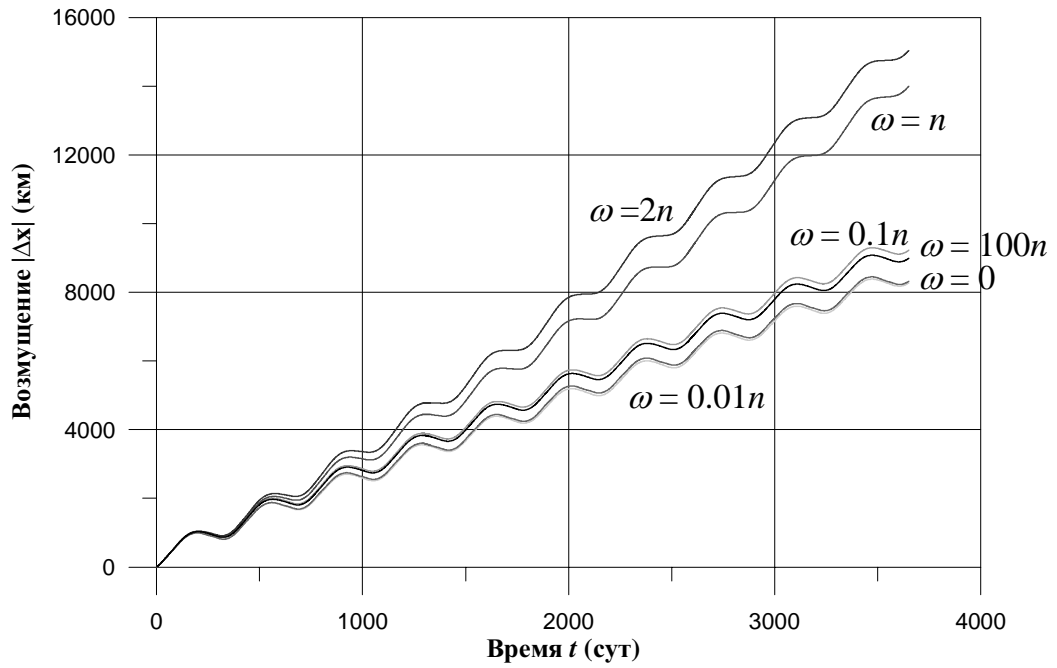


Рис. 12: Возмущение частицы кубической формы силой светового давления на геостационарной орбите (10 лет)

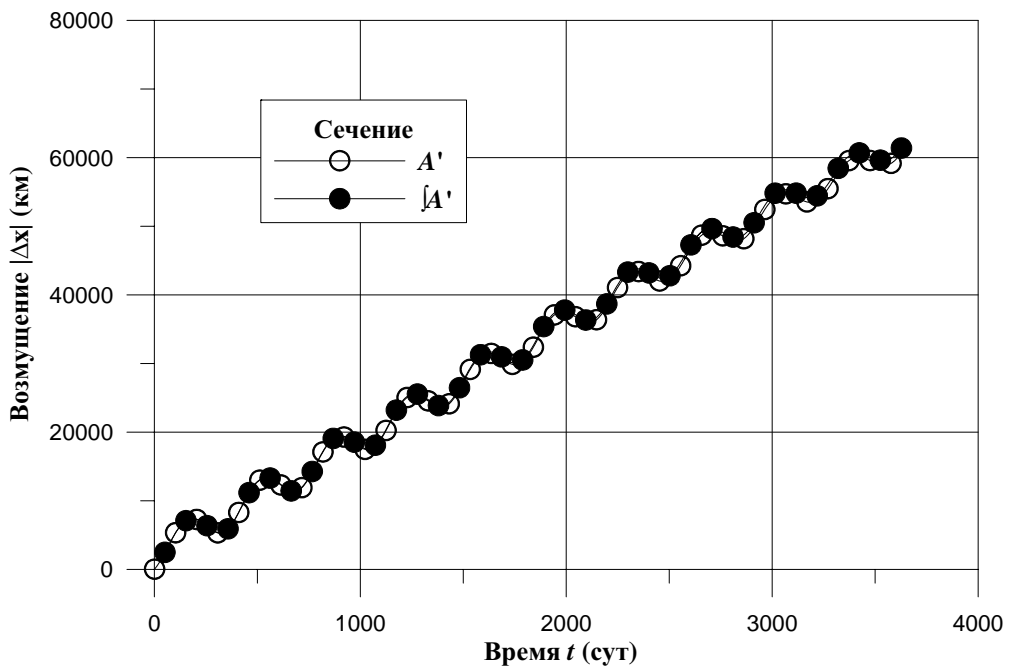


Рис. 13: Результаты усреднения сечения круглой пластины (геостационарная зона, 10 лет)

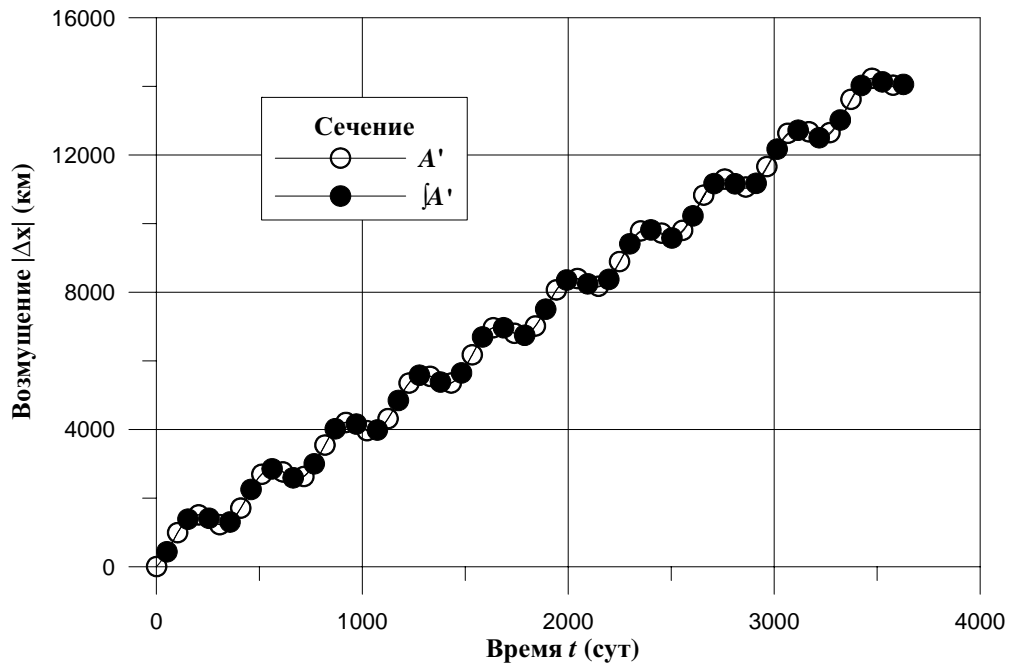


Рис. 14: Результаты усреднения сечения цилиндрической частицы (геостационарная зона, 10 лет)

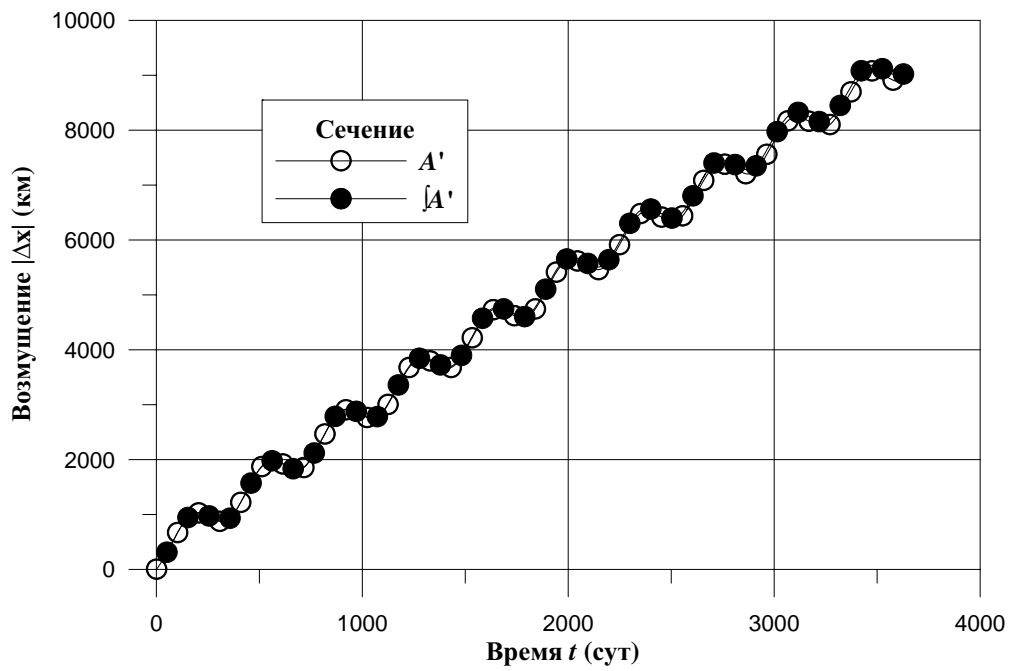


Рис. 15: Результаты усреднения сечения кубической частицы (геостационарная зона, 10 лет)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе получены следующие результаты.

1. Выведены формулы для моделирования влияния радиационных сил на околоземные объекты с учетом их форм и вращения.
2. Для быстровращающихся объектов с помощью процедуры усреднения получены приближенные модели радиационных сил.
3. На основе уравнений в прямоугольных координатах была построена численная модель орбитального движения ИСЗ с учетом возмущений от несферичности центрального тела (до второй зональной гармоники), притяжения Луны и Солнца, светового давления и эффекта Пойнтинга–Робертсона.
4. Проведен численный эксперимент по исследованию влияния солнечного света на некоторые ИСЗ и мелкую фракцию космического мусора, населяющего околоземное пространство.
5. Выполнен анализ полученных результатов. В частности, было установлено, что сила солнечного давления является эффективным средством очищения околоземного пространства только для тех частиц КМ, которые имеют величину ρd меньше порядка 0.02 кг/м^2 . Кроме того, экспериментально показано, что для быстровращающихся тел вместо реальной модели радиационных сил можно использовать приближенную модель, основанную на усреднении миделевого сечения по быстрому углу вращения.

Представленные результаты были апробированы на международных конференциях "Околоземная астрономия — 2005" (Казань, 2005) и "Физика космоса" (Екатеринбург, 2006); и опубликованы в [11, 12, 13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ragos O., Zafiroopoulos F. A numerical study of the influence of the Poynting-Robertson effect on the equilibrium points of the photogravitational restricted three-body problem // *Astron. Astrophys.* 1995. V. 300. P. 568–578.
- [2] Burns J., Lamy P., Soter S. Radiation Forces on Small Particles in the Solar System // *Icarus*. 1979. V. 40. P. 1–48.
- [3] Авдюшев В.А. О численном интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями // *Изв. вузов. Физика.* (Приложение) (в печати)
- [4] Гребеников Е.А. Методы усреднения в прикладных задачах М.: Наука. 1986. 256 с.
- [5] Аксенов Е. Теория движения искусственных спутников Земли М.: Наука. 1977. 360 с.
- [6] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к "Астрономическому ежегоднику" // *Труды ИПА РАН.* СПб.: ИПА РАН. 2004. Вып. 10. 488 с.
- [7] Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* 1974. V. 10. P. 35–55.
- [8] Everhart E. An Efficient Integrator That Uses Gauss-Radau Spacings // *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11–15, 1984.* Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. V. 115. 1985. P. 185–202.
- [9] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В., Федяев Ю.А., Шарковскй Н.А. Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ // *Физика.* Томск: Изд-во ТГУ. 1992. Т. 35. Вып. 8. С. 62–70.
- [10] <http://www.fplib.ru/partners/mwade/spaceflt.htm>

- [11] Туева О.Н., Авдюшев В.А. О влиянии светового давления и эффекта Поинтинга–Робертсона на динамику космического мусора // Тез. докл. междунар. конф. ”Околоземная астрономия — 2005”, 19–24 сентября 2005 г., Казань: Изд-во КГУ. 2005. С. 31–32.
- [12] Туева О.Н., Авдюшев В.А. О влиянии светового давления и эффекта Поинтинга–Робертсона на динамику космического мусора // Мат. междунар. конф. ”Околоземная астрономия — 2005”. М.: Изд-во ИНАСАН. 2006. (В печати)
- [13] Туева О.Н., Авдюшев В.А. Численное исследование влияния радиационных сил на динамику фрагментов космического мусора // Тез. докл. 35-ой междунар. студ. конф. ”Физика космоса”, 30 января–3 февраля 2006 г., Екатеринбург: Изд-во УрГУ. 2006. С. 235.