

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра астрономии и космической геодезии

Тагирова Юлия Фидратовна
ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ
СИММЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ АСТЕРОИДНОЙ ДИНАМИКИ
(курсовая работа)

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. _____

Автор работы

Тагирова Ю.Ф. _____

Томск 2006

Содержание

Введение	3
1 Постановка задачи	4
2 Симметрические многошаговые методы. Метод Куинлэна–Тримейна 8-го порядка.	6
3 Метод Дормана–Принса 8-го порядка	8
4 Численные результаты	9
4.1 Постановка эксперимента	9
4.2 Выбранные астероиды	9
4.3 Уравнения движения	10
4.4 Характеристики эффективности численного интегрирования	11
4.5 Анализ результатов	15
Заключение	17
Список литературы	18

Введение

Хорошо известно, что неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Таким образом, при численном интегрировании орбитального движения на больших интервалах времени влияние ляпуновской неустойчивости на точность получаемых решений становится весьма значительным. В связи с этим возникает необходимость в разработке методик, которые ослабляли бы это влияние и улучшали таким образом поведение неустраняемых ошибок интегрирования.

Куинлэном и Тримейном было показано [1], что использование в задачах небесной механики симметрических методов интегрирования позволяет в какой-то мере разрешить указанную выше трудность.

В данной работе мы исследуем возможности симметрических методов применительно к решению задач орбитальной динамики; и ставим перед собой цель оценить их эффективность в численном исследовании астероидной динамики на длительных интервалах времени.

Для достижения поставленной цели предполагалось: построить численные модели движения, основанные на симметрическом многошаговом методе Куинлэна–Тримейна 8-го порядка и методе Дормана–Принса 8-го порядка; и провести сравнительный анализ эффективности методов при численном интегрировании астероидных орбит.

В первом разделе курсовой работы дается постановка задачи. Второй и третий разделы посвящены описанию методов интегрирования. В последнем разделе проводится постановка эксперимента и анализируются результаты численного исследования эффективности методов Куинлэна–Тримейна и Дормана–Принса. В заключении перечисляются основные результаты выполненной работы.

1 Постановка задачи

При интегрировании орбитального движения очень важно, чтобы сохранялось интегральное соотношение для энергии, т.е. чтобы

$$\Delta H \equiv \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - h = 0. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{x} и $\dot{\mathbf{x}}$ — векторы положения и скорости соответственно, μ — гравитационная постоянная, h — постоянная энергии.

Из формул задачи двух тел нетрудно показать [2], что, если энергии двух близких кеплеровских решений отличаются на величину ΔH в некоторый начальный момент времени t_0 , то это приводит к расхождению решений $\Delta \mathbf{x}$ и $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ в соответствии с линейной оценкой

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} = \frac{3 \Delta H}{2 H} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \Delta t, \quad (2)$$

где $\Delta t = t - t_0$. Фактически соотношение (2) говорит о том, что кеплеровское движение неустойчиво по Ляпунову. При интегрировании ошибка ΔH ведет себя почти линейно со временем (рис. 1). Поэтому согласно (2) ошибки $|\Delta \mathbf{x}|$ и $|\Delta \dot{\mathbf{x}}|$ будут вести себя квадратичным образом (рис. 2).

Такое же поведение наблюдается при интегрировании слабозмущенных орбит. Таким образом, если бы в процессе интегрирования нам тем или иным способом удалось ограничить величину ΔH , то это позволило бы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на точность численного решения.

Почти 15 лет назад Куинлэн и Тримейн открыли замечательное свойство так называемых симметрических методов, которое состоит в том, что эти методы ограничивают ошибку в энергии. Это в свою очередь приводит к линейному изменению ошибок $|\Delta \mathbf{x}|$ и $|\Delta \dot{\mathbf{x}}|$ (рис. 3).

В данной работе мы предприняли попытку исследовать возможности симметрических методов в задачах моделирования астероидного движения на длительных интервалах времени. Для этого мы рассмотрели два явных метода 8-го порядка: одношаговый метод Дормана–Принса (типа Рунге–Кутты) и многошаговый симметрический метод Куинлэна и Тримейна; и провели сравнительный анализ их эффективности на примере конкретных астероидов.

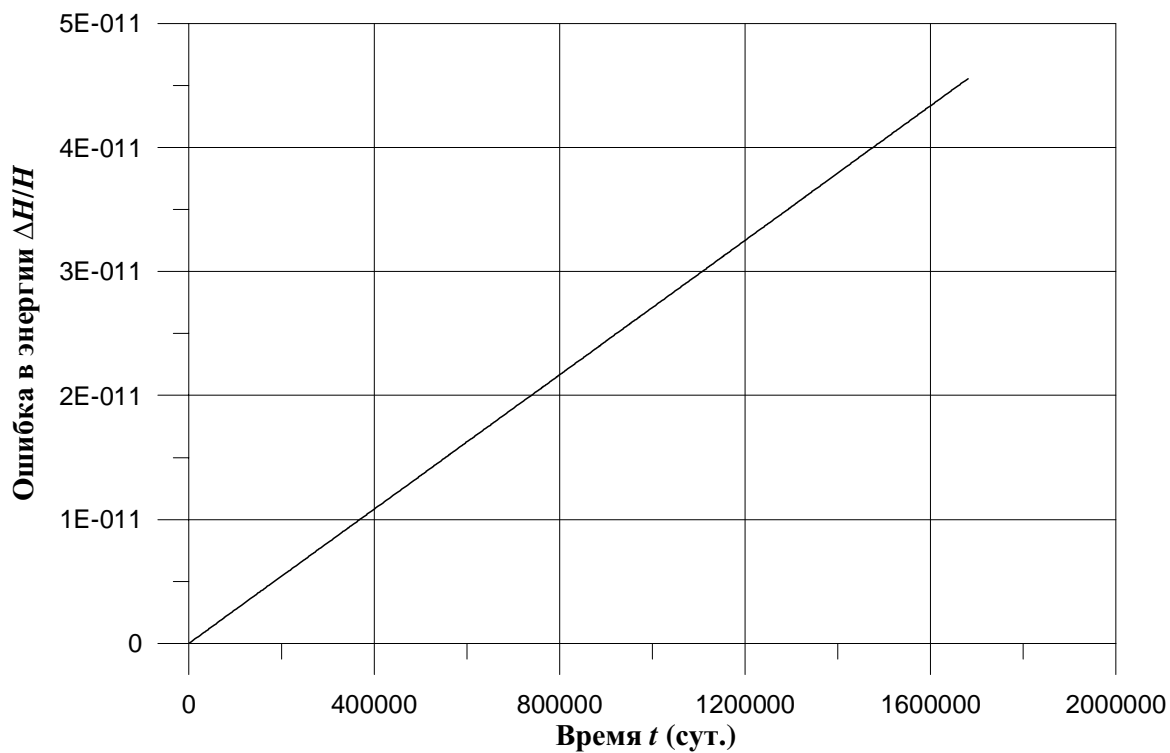


Рис. 1: Поведение ошибки в энергии. Метод Дормана–Принса 8-го порядка. (Церера, 1000 оборотов)

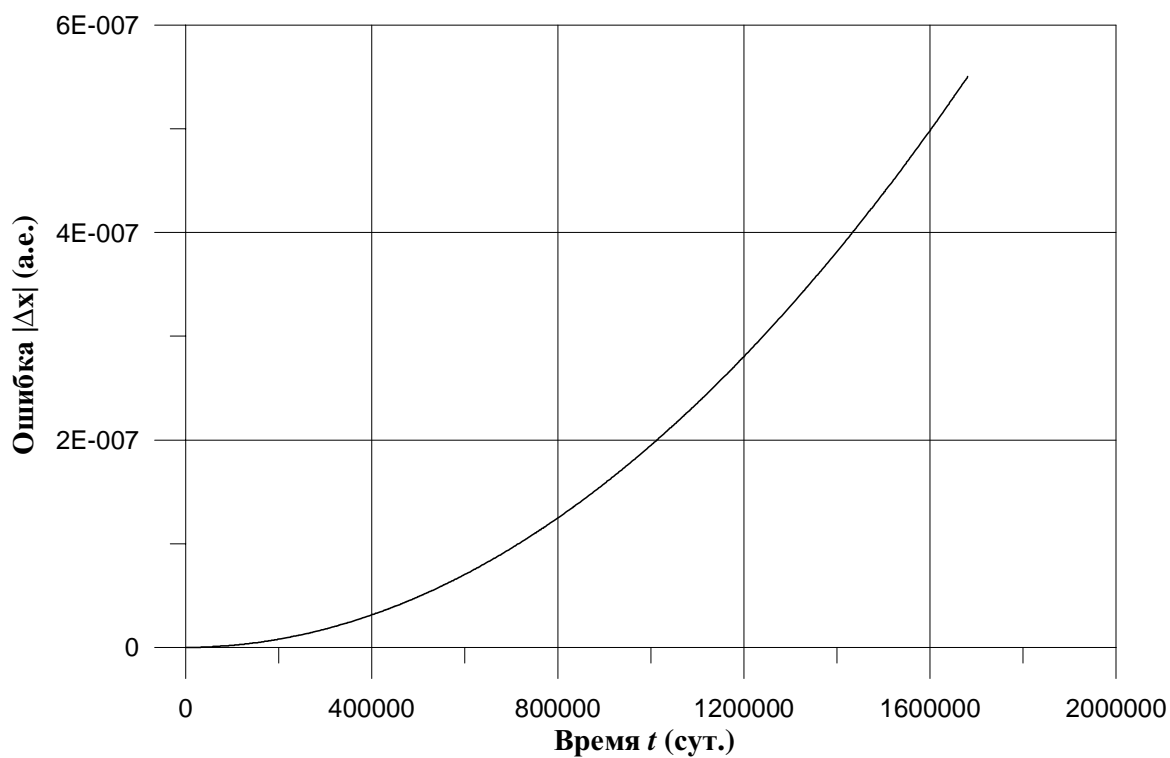


Рис. 2: Поведение ошибки в векторе положения. Метод Дормана–Принса 8-го порядка. (Церера, 1000 оборотов)

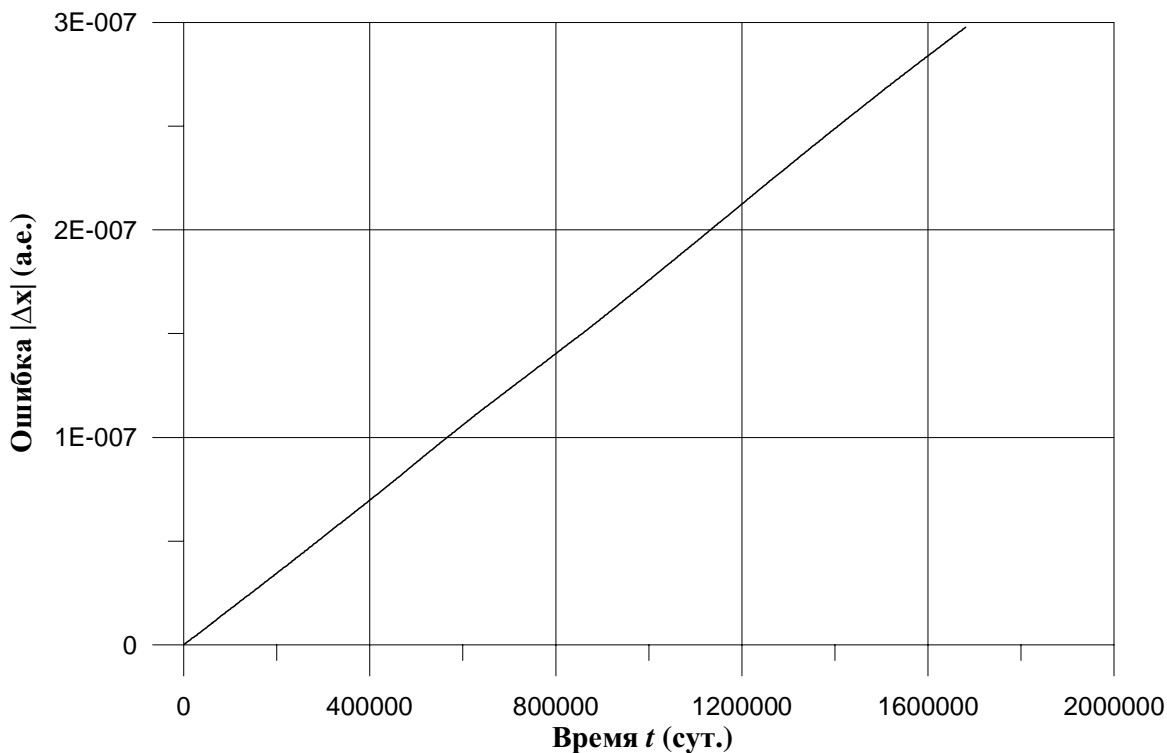


Рис. 3: Поведение ошибки в векторе положения. Метод Куинлэна–Тримейна 8-го порядка. (Церера, 1000 оборотов)

2 Симметрические многошаговые методы.

Метод Куинлэна–Тримейна 8-го порядка.

Как уже говорилось выше, важной особенностью симметрических методов является то, что в результате интегрирования с их использованием мы получаем ошибку в интегрируемых переменных, которая растет со временем линейно. Такая возможность симметрических методов при достижении определенной точности позволяет в несколько раз уменьшить время интегрирования.

Рассмотрим дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (3)$$

где \mathbf{x} — вектор интегрируемых переменных, t — независимая переменная, \mathbf{f} — известная вектор-функция.

Для этого уравнения схема k -шагового метода на n шаге будет иметь следующий вид [3]:

$$\alpha_k \mathbf{x}_{n+k} + \dots + \alpha_0 \mathbf{x}_n = h^2 (\beta_k \mathbf{f}_{n+k} + \dots + \beta_0 \mathbf{f}_n). \quad (4)$$

При этом будем считать, что выполняются условия:

$$\alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| > 0,$$

а также без потери общности будем полагать $\alpha_k = 1$. Если $\beta_k = 0$, метод (4) явный, иначе — неявный.

В соответствии с общей теорией многошаговых методов, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_i &= 0, \\ \sum_i i\alpha_i &= 0, \\ \dots & \\ \sum_i i^p \alpha_i - p(p-1) \sum_i i^{p-2} \beta_i &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

то метод будет иметь порядок p .

Для симметрических методов коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha_i = \alpha_{k-i}, \quad \beta_i = \beta_{k-i}, \quad (i = 0, \dots, k).$$

В данной работе мы исследуем возможности симметрических методов на примере явного метода 8-го порядка, предложенного Куинлэном и Тримейном (QT8) [1]. Коэффициенты метода представлены в таблице 1.

Особенность многошаговых методов состоит в том, что в начале интегрирования они требуют несколько k начальных решений. В данной работе для их получения мы использовали хорошо известный классический метод Рунге–Кутты 4-го порядка.

Таблица 1: Коэффициенты метода QT8

i	α_i	12096 β_i	i	α_i	12096 β_i
1	-2	17671	3	-1	61449
2	2	-23622	4	0	-50516

3 Метод Дормана–Принса 8-го порядка

Метод Дормана–Принса 8-го порядка (DP8) является вложенным 13-этапным явным методом Рунге–Кутты. Опишем схему данного численного метода, применительно к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

Согласно методу DP8 приближенное решение на каждом шаге вычисляется по схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_0 + hc_2, \mathbf{x}_0 + ha_{21}\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(t_0 + hc_3, \mathbf{x}_0 + h(a_{31}\mathbf{k}_1 + a_{32}\mathbf{k}_2)), \\ &\dots \\ \mathbf{k}_{13} &= \mathbf{f}(t_0 + hc_{13}, \mathbf{x}_0 + h(a_{13,1}\mathbf{k}_1 + \dots + a_{13,12}\mathbf{k}_{12})), \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + h(b_1\mathbf{k}_1 + \dots + b_{13}\mathbf{k}_{13}), \end{aligned} \quad (7)$$

где коэффициенты a , b и c приведены в [3].

Как известно, вложенные методы Рунге–Кутты предназначены для численного интегрирования с переменным шагом. Однако в данной курсовой работе мы не использовали алгоритм выбора шага с той целью, чтобы в численном эксперименте поставить методы в равные условия.

4 Численные результаты

4.1 Постановка эксперимента

Чтобы оценить возможности симметрического многошагового метода QT8 в сравнении с одношаговым методом DP8 был проведен численный эксперимент. Цель данного эксперимента состояла в реализации данных методов интегрирования на ЭВМ и получении основных показателей их эффективности применительно к задачам долгосрочной орбитальной эволюции астероидов (1000 оборотов). Под эффективностью мы понимаем качественную характеристику, определяемую точностью и быстродействием данного метода.

4.2 Выбранные астероиды

Для исследования эффективности симметрических интеграторов были построены численные модели движения ряда конкретных объектов. В качестве таковых были выбраны астероиды: Икар, Церера [4], а также резонансные (с Юпитером) объекты: Алинда (3:1) [4] и два гипотетических астероида (2:1, 3:1) (табл. 2, рис. 4).

Астероид Церера — типичный представитель главного пояса астероидов. Он движется по почти круговой орбите между орбитами Марса и Юпитера и не имеет сближений ни с одной из больших планет. Однако несмотря на это, его динамика усложняется короткопериодическими возмущениями, в особенности от Меркурия.

Икар — астероид с сильно вытянутой орбитой, у которого структура возмущений усложнена влиянием от планет земной группы.

Алинда — резонансный с Юпитером астероид. Особенность в движении Алинды состоит в том, что из-за значительной вытянутости его орбиты астероид в перигелии близко подходит к орбите Земли, а в афелии — к орбите Юпитера. Несмотря на это, структура возмущений астероида довольно гладкая и, кроме того, "украшена" долгопериодическими возмущениями, обусловленными резонансом средних движений астероида с Юпитером.

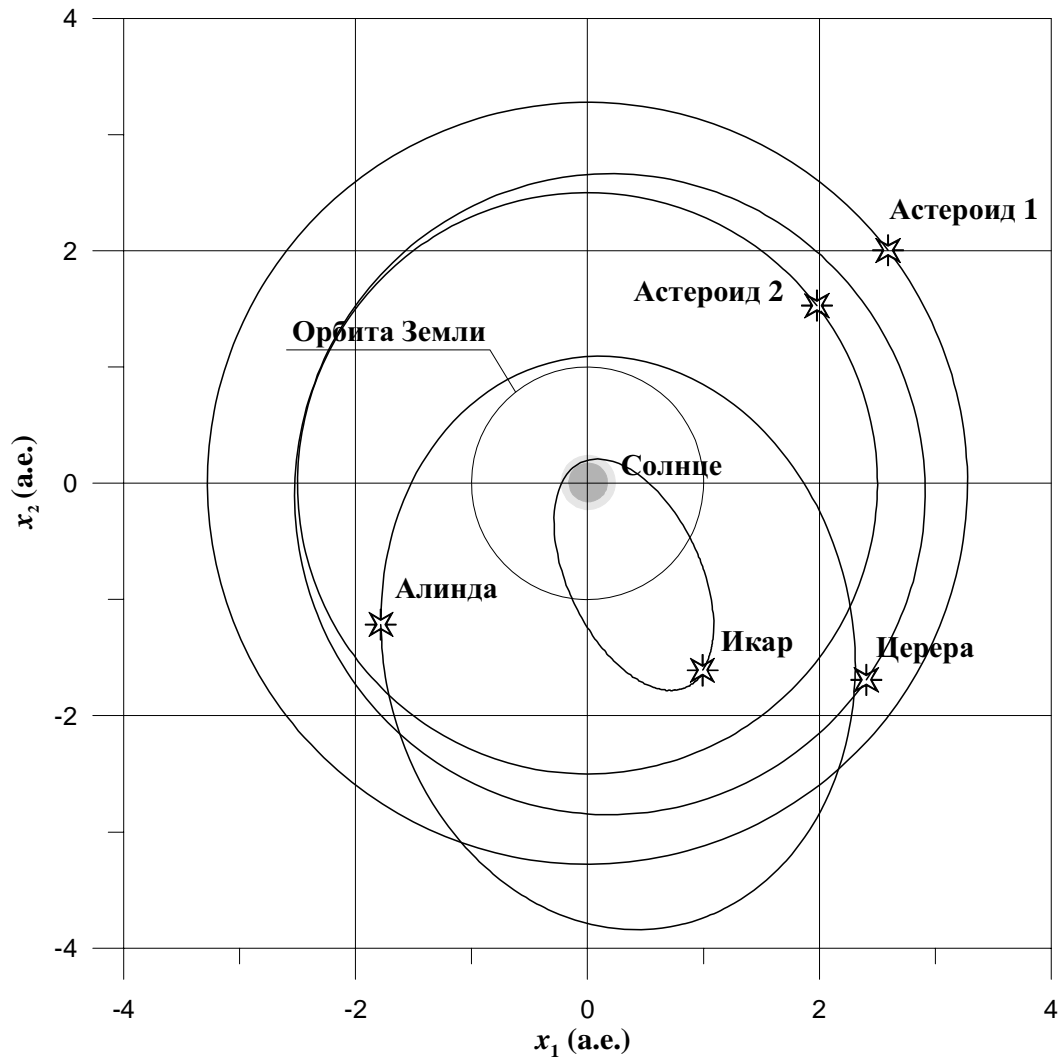


Рис. 4: Орбиты астероидов

4.3 Уравнения движения

Моделирование астероидного движения выполнялось на основе дифференциальных уравнений орбитального движения, записанных в прямоугольных координатах:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{P}, \quad (8)$$

где \mathbf{x} — гелиоцентрический вектор положения, t — физическое время, $\mu = k^2M$ — гравитационный параметр Солнца, k — гауссова постоянная, \mathbf{P} — равнодействующая всех возмущающих сил.

Как известно, существенное влияние на движение астероидов оказывают силы притяжения от больших планет. Поэтому для исследования

Таблица 2: Параметры движения астероидов

Планета	a (а.е.)	e	i , ($^\circ$)
Церера	2.77	0.08	10.6
Икар	1.08	0.83	22.9
Алинда	2.49	0.56	9.3
Астероид 1 (2:1)	3.28	0	0
Астероид 2 (3:1)	2.50	0	0

эволюции орбит таких объектов модель возмущений, как правило, ограничивается этими силами. Возмущающие ускорения от больших планет в движении исследуемого объекта можно вычислять по формуле

$$\mathbf{P} = \sum_{P=1}^9 \mu_P \left(\frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3} \right), \quad (9)$$

где \mathbf{x}_P — гелиоцентрический вектор положения P -го возмущающего тела, $\mu_P = k^2 M_P$ — его гравитационный параметр, а M_P — масса. Размеры орбит планет и их массы приведены в табл. 3.

Координаты планет \mathbf{x}_P , необходимые для вычисления значений возмущающих ускорений, мы определяли по приближенным формулам, полученным на основе фонда DE200/LE200 [5]¹.

4.4 Характеристики эффективности численного интегрирования

Точность методов оценивалась по известной формуле экстраполяции Ричардсона: мы проводили серию экспериментов, где в каждом последующем эксперименте численное интегрирование выполнялось с уменьшенным вдвое шагом. Согласно формуле Ричардсона ошибка в векторе положения определяется следующим образом:

$$|\Delta \mathbf{x}_i| = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}|}{1 - (1/2)^8},$$

¹В рамках поставленной здесь задачи использование упрощенного фонда для численного моделирования вполне допустимо.

Таблица 3: Размеры орбит больших планет и их массы

P	Планета	a_P (а.е.)	M/M_P
1	Меркурий	0.387	6023600
2	Венера	0.723	408523.5
3	Земля	1	328900.55
4	Марс	1.524	3098710
5	Юпитер	5.203	1047.35
6	Сатурн	9.539	3498
7	Уран	19.182	22960
8	Нептун	30.058	19314
9	Плутон	39.8	130000000

где i — номер эксперимента. Однако ввиду близости знаменателя к единице, мы использовали приближенную формулу $|\Delta \mathbf{x}_i| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}|$.

Численное интегрирование уравнений движения выполнялось с различным постоянным шагом

$$h_i = \frac{T}{2^{i+2}},$$

где $i = 1, \dots, 13$ — для QT8 и $i = 1, \dots, 11$ — для DP8.

В качестве меры быстродействия удобнее было принять количество перевычислений функций правых частей дифференциальных уравнений, величина которого не зависит ни от скоростных характеристик процессора вычислительной машины, ни от качества оптимизации программного обеспечения. При этом следует заметить, что метод DP8 требует 13 вычислений функции правых частей на шаге, тогда как многошаговый метод — всего одно вычисление.

Таким образом, для каждого объекта были получены характеристики точность–быстродействие, которые представлены на рис. 5–9.

Исходя из вышеизложенных определений, будем считать, что рассматриваемый метод эффективен по точности в сравнении с другим методом, если при одинаковом быстродействии он позволяет получить более высокую точность численного решения; и соответственно эффективен по быстродействию, если при заданной точности метод обладает более высоким быстродействием.

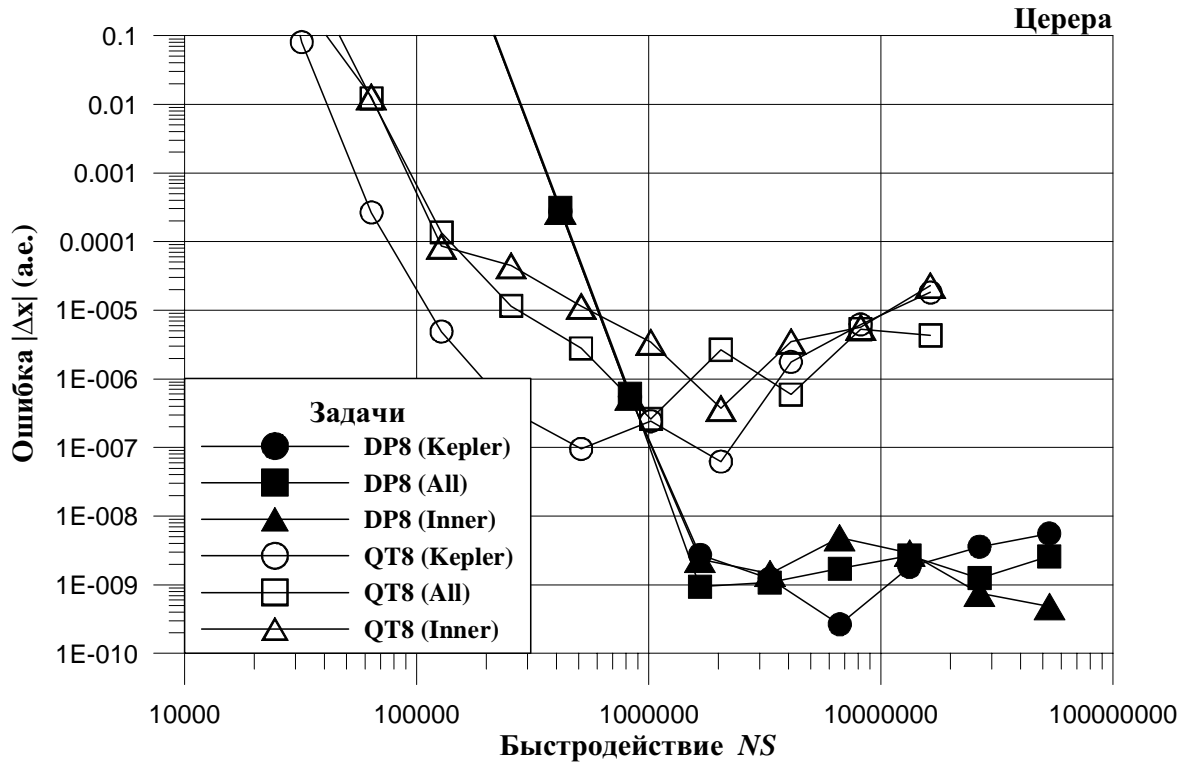


Рис. 5: Характеристики точность–быстродействие для Цереры.

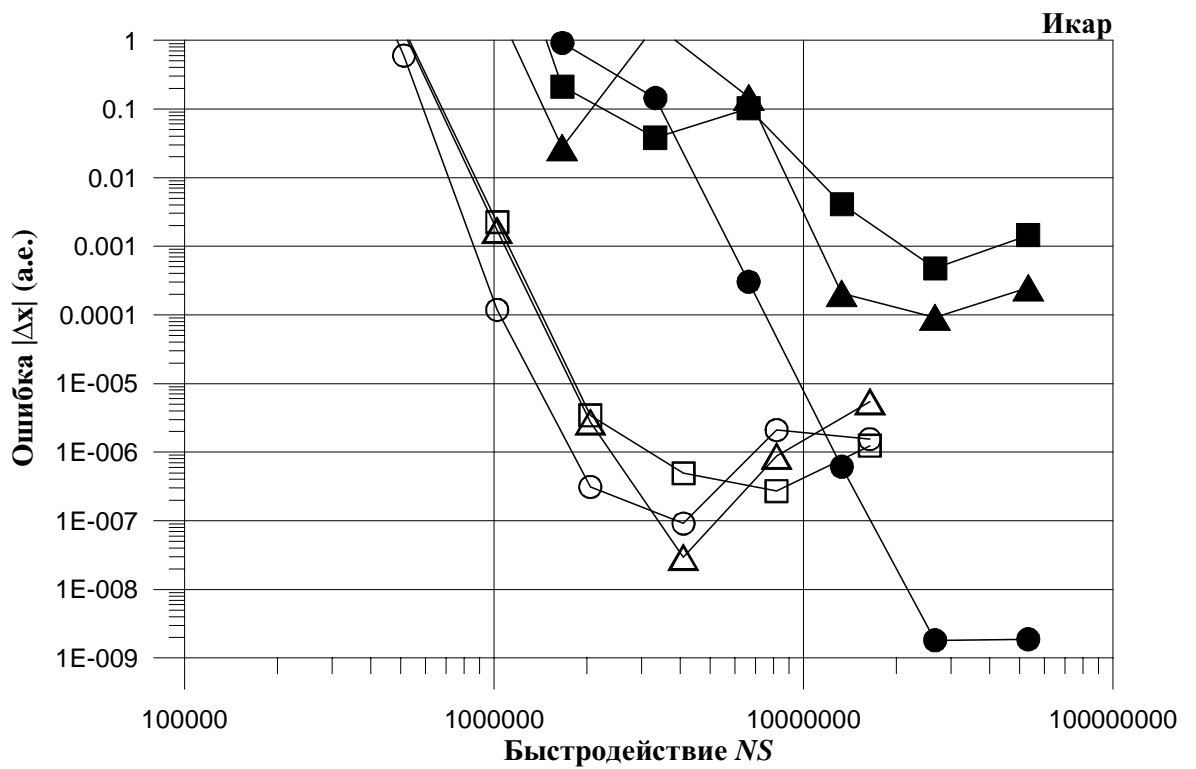


Рис. 6: Характеристики точность–быстродействие для Икара.

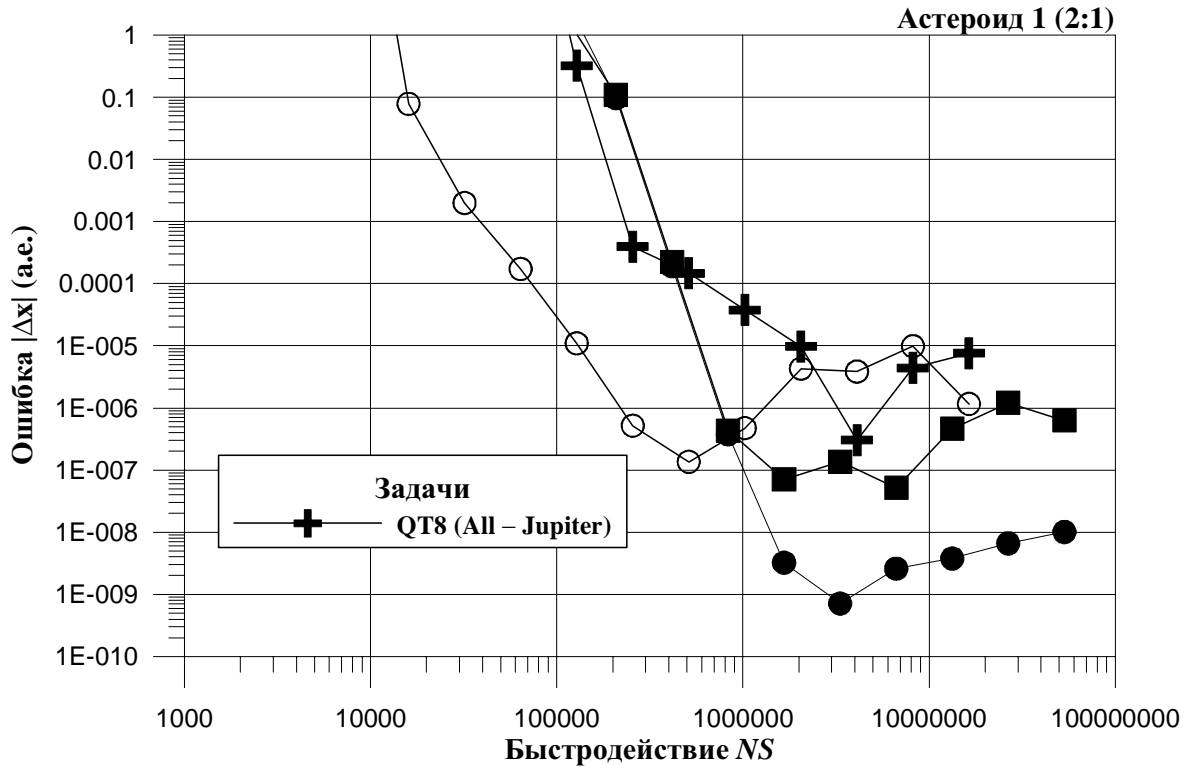


Рис. 7: Характеристики точность–быстродействие для Астероида 1.

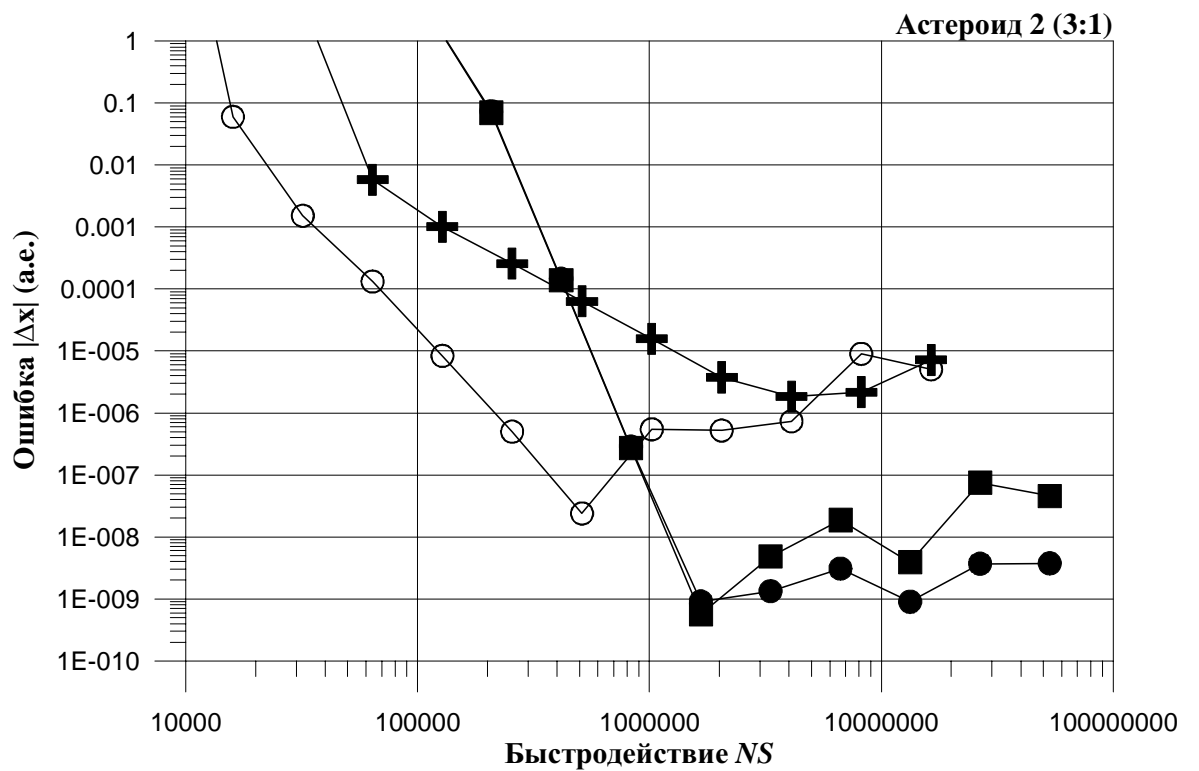


Рис. 8: Характеристики точность–быстродействие для Астероида 2.

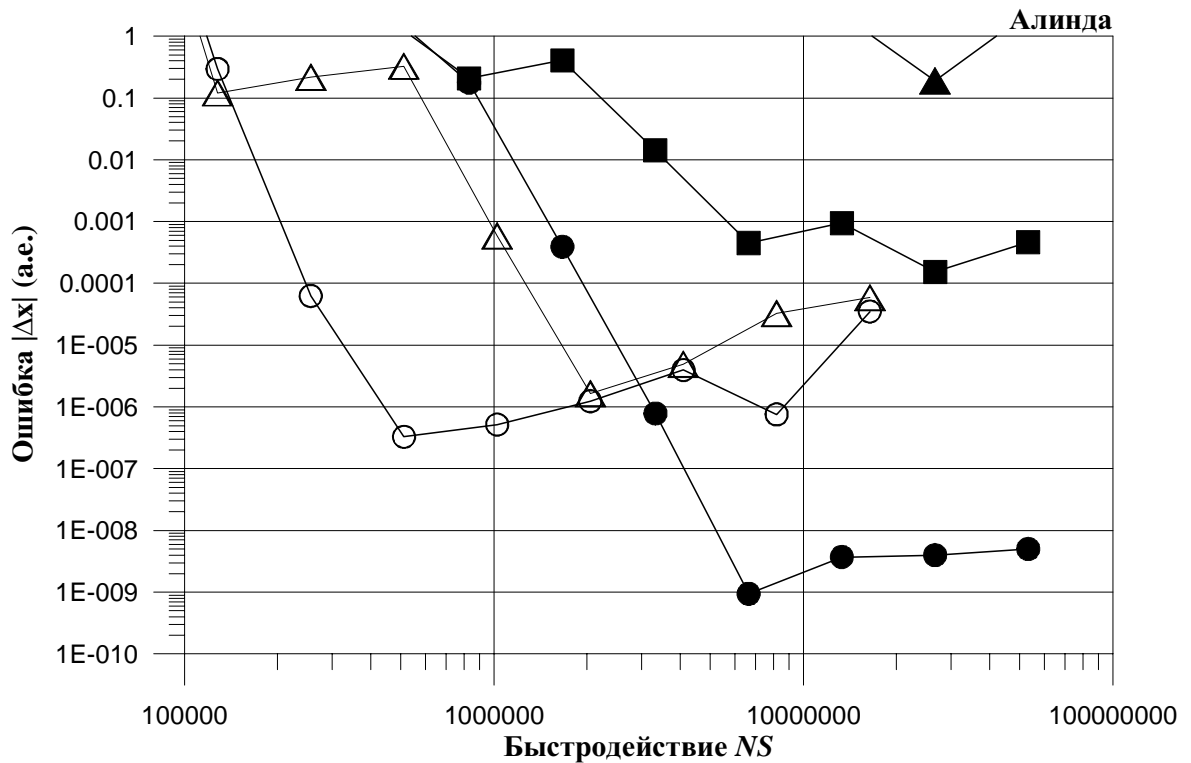


Рис. 9: Характеристики точность–быстродействие для Алинды.

4.5 Анализ результатов

Как уже говорилось выше, интегрирование орбитального движения выбранных астероидов проводилось на интервале времени 1000 оборотов. Путем варьирования постоянного шага для каждого объекта были получены характеристики точность–быстродействие.

Предварительно для всех астероидов мы исследовали эффективность методов применительно к задаче двух тел (Kepler). Судя по графикам, во всех рассмотренных случаях симметрический метод QT8 дает довольно высокую эффективность, так как позволяет интегрировать орбиты объектов в 5–10 раз быстрее, нежели интегратор DP8. Из характеристик также видно, что из-за быстрого накопления ошибок интегрирования наивысшая точность для метода QT8 гораздо ниже, чем для метода DP8. Но при этом данный уровень точности достигается значительно быстрее, чем в случае классических интеграторов.

В возмущенных же случаях (All) симметрические методы проявляют свою эффективность по-разному. Это связано с особенностями движения, присущими тому или иному рассматриваемому объекту.

Известно, что движение Цереры — характерный пример движения при постоянно действующих короткопериодических возмущениях со стороны внутренних планет (Inner), в связи с этим эффективность интегрирования ее орбиты симметрическим методом довольно низкая [6] (рис. 5).

При интегрировании же орбиты Икара мы наблюдаем совершенно иную картину (рис. 6): эффективность симметрического метода довольно высокая. Это связано, по-видимому, с тем, что он не имеет тесных сближений ни с одной из планет и в отличие от Цереры его движение не подвержено влиянию короткопериодических возмущений.

Что касается резонансных астероидов (рис. 7–9), то их характеристики точность–быстродействие показывают, что применение симметрической схемы интегрирования в этом случае оказывается неэффективным. Причина такой низкой эффективности, скорее всего, в наличии резонансных возмущений от Юпитера, при которых метод QT8 становится неустойчивым. Когда мы отключали влияние Юпитера (All-Jupiter) эффективность интегрирования существенно повышалась.

Заключение

Таким образом, в данной работе получены следующие результаты:

1. Построены численные модели движения, основанные на симметрическом многошаговом методе Куинлэна–Тримейна и методе Дормана–Принса.
2. Проведен сравнительный анализ данных интеграторов на примере конкретных астероидов. Экспериментально показано, что при отсутствии короткопериодических возмущений симметрические интеграторы позволяют повысить быстродействие численного интегрирования в несколько раз.
3. В частности, показано, что для резонансных объектов применение симметрических интеграторов неэффективно. Можно предположить, что это, скорее всего, связано с неустойчивостью симметрических многошаговых методов.
4. Установлено, что применение симметрических интеграторов целесообразно, если необходимо повысить быстродействие численного моделирования при относительно невысокой точности, поскольку влияние ошибок округления при использовании симметрических методов гораздо сильнее, нежели при использовании классических методов.

Список литературы

- [1] Quinlan D., Tremaine S. Symmetric Multistep Methods for the Numerical Integration of Planetary Orbits // *Astron. J.* 1990. V. 100. P. 1964–1700.
- [2] Avdyushev V. Numerical Stabilization of Orbital Motion // *Cel. Mech.* 2003. V. 87 (4). P 383–409.
- [3] Хайер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990.
- [4] <ftp://ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.dat>.
- [5] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к "Астрономическому ежегоднику" // *Труды ИПА РАН.* СПб.: ИПА РАН. 2004. Вып.10. 488 с.
- [6] Авдюшев В.А. О численном интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями // *Изв. вузов. Физика.* (Приложение) (в печати)