

Федеральное агентство по образованию  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

УДК 521.1

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГАК  
Зав. кафедрой астрономии и  
космической геодезии  
проф. Бородовицына Т.В. \_\_\_\_\_  
” \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2007 г.

**ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**  
**МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ**  
**В ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ОРБИТ**  
**С КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

**Тагирова Юлия Фидратовна**

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. \_\_\_\_\_

Автор работы

Тагирова Ю.Ф. \_\_\_\_\_

Томск 2007

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ВЛИЯНИЕ КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРБИТ	5
1.1 Уравнения орбитального движения	6
1.2 Интегратор Гаусса–Эверхарта	7
1.3 Теоретические оценки влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование орбит	12
1.4 Практические оценки влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование орбит	14
2 МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ ОРБИТ С КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ	18
2.1 Включение масс быстрообращающихся тел в массу центрального тела	18
2.2 Переход к барицентру	18
2.3 Усреднение Гаусса	19
2.3.1 Модель гауссова кольца	20
2.3.2 Способы вычисления эллиптических функций	21
2.4 Мультипольная модель	21
3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	23
3.1 Оценка методической точности упрощенных моделей	23
3.2 Исследование эффективности интегрирования сглаженных орбит	34
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	36
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	37

## ВВЕДЕНИЕ

В динамической астрономии задача исследования долговременной орбитальной эволюции небесных тел является одной из наиболее интересных. В последнее время для ее решения все чаще стали прибегать к численному моделированию, где орбиты небесных тел формализуются в виде дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно.

Главной трудностью в решении задач долговременной эволюции с использованием численных методов является низкое быстродействие и потеря точности: последовательное определение состояний рассматриваемой динамической системы для ее адекватного представления требует малый шаг интегрирования, тогда как каждое следующее состояние определяется со все большими ошибками, которые, кроме того, могут усиливаться ляпуновской неустойчивостью.

Формально трудность численного моделирования состоит в следующем. Орбитальная модель замкнутой системы гравитирующих небесных тел представляет собой некоторую совокупность осциллирующих динамических подсистем, каждая из которых описывается своими дифференциальными уравнениями. В этой формализации можно обнаружить довольно много гармонических составляющих с широким спектром частот. Та гармоника, которая имеет самую высокую частоту, фактически и будет определять шаг и, следовательно, ошибки численного интегрирования [1, 2]. Чем выше частота гармоника, тем меньше шаг интегрирования. С другой стороны, если моделирование выполнять с большим шагом, это приведет к существенной потере методической точности.

Для разрешения этой трудности в динамической астрономии часто прибегают к методам преобразования дифференциальных уравнений движения с целью исключения из них высокочастотных составляющих, либо, по крайней мере, уменьшения их амплитуд. К таким методам, например, могут относиться известные методы вариации параметров (Лагранжа), либо координат (Энке) [3]. В результате их применения уменьшается влияние составляющих, связанных с собственной частотой небесного тела. Не удивительно, что эти методы находят широкое применение в задачах динамики близких спутников, где гармоники, связанные с собственной частотой обращения объекта около планеты, доминируют в

описании спутниковой орбиты. Такое изменение формы представления уравнений движения позволяет существенно повысить эффективность численного интегрирования.

В то же время, если в орбите имеются хотя бы малые короткопериодические возмущения, вызванные какими-либо слабыми, но высокочастотными возмущающими факторами, применение вышеназванных методов может оказаться не эффективным [1, 2]. Кроме того, появление в орбите безобидных, на первый взгляд, малых возмущений способно также свести на нет эффективность других применяемых оригинальных методов (например, геометрических интеграторов [4]), безусловно и эффективно работающих в случае невозмущенных орбит.

В дипломной работе на примере главного транснептунового объекта Плутон детально исследуется проблема короткопериодических возмущений, которые в нашем случае вызываются, главным образом, внутренними планетами, а также предлагаются некоторые методы устранения короткопериодических возмущений и оценивается эффективность использования методов в численном моделировании орбиты Плутона.

В первом разделе вводятся дифференциальные уравнения движения Плутона, даются теоретические и численные оценки влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование. Во втором разделе рассматриваются различные подходы для устранения короткопериодических членов из уравнений движения, тогда как третий раздел посвящен экспериментальному исследованию эффективности этих подходов применительно к численному моделированию орбиты Плутона. В заключении перечисляются основные результаты работы.

# 1 ВЛИЯНИЕ КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОРБИТ

В работе рассматривается проблема, которая довольно часто возникает на практике при численном моделировании динамики далеких объектов, находящихся под влиянием близких к центральному телу массивных. Близкие объекты вызывают в движении далеких короткопериодические возмущения, учет которых существенно понижает быстродействие численного процесса.

На практике эта проблема обычно разрешается двумя способами. Первый способ основан на том, что массы крупных объектов включаются в массу планеты [5, 6], во втором же способе влияние от близких объектов моделируется с помощью так называемых гауссовых колец [7, 8]. Оба способа приводят к упрощенным уравнениям движения: в первом это — возмущенные уравнения задачи двух тел с модифицированным гравитационным параметром, во втором — уравнения, получаемые путем усреднения Гаусса [9]. Последние представляют движение объекта точнее, нежели первые. Хотя в то же время усредненные уравнения гораздо сложнее.

Как известно, более высокая точность представления орбитального движения с помощью усредненных уравнений достигается, главным образом, за счет того, что они учитывают вековые возмущения (первого порядка) в орбитальных элементах. Однако заметим, что после усреднения Гаусса остаются еще неучтенными довольно большие вековые эффекты в быстрой переменной, которая определяет положение объекта на орбите, и этот недостаток становится значительным, когда орбиты объектов достаточно близки. Впрочем, в работе эта проблема не рассматривается. При необходимости ее детальное исследование можно найти в [1].

В данной работе на примере динамики главного транснептунового объекта (Плутон) мы рассматриваем различные методы сглаживания короткопериодических возмущений (от близких планет), а также оцениваем их методическую точность и эффективность по быстродействию, которая может быть достигнута при численном интегрировании.

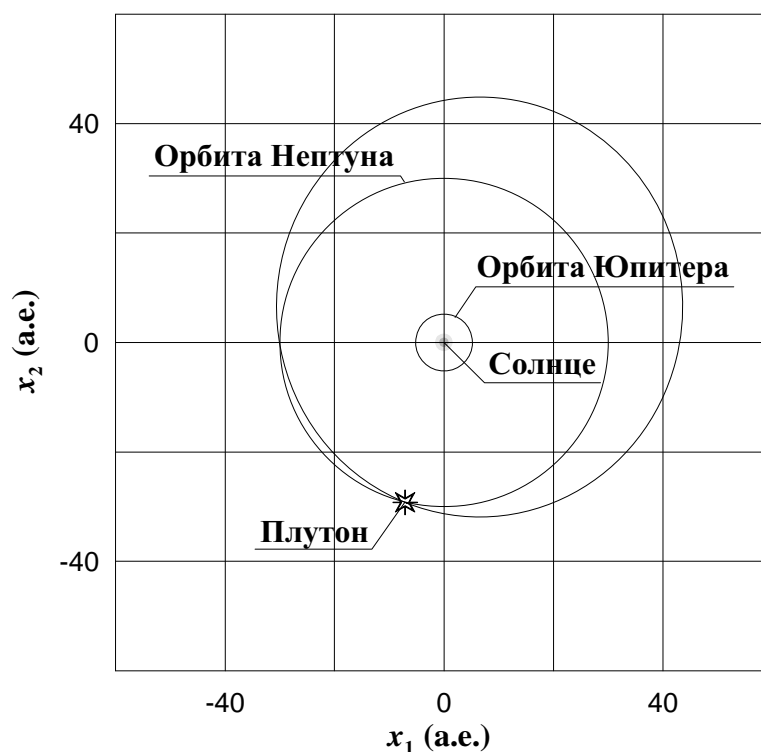


Рис. 1.1: Орбита Плутона

## 1.1 Уравнения орбитального движения

Плутон (134340 Pluto) одновременно относится к классу транснептуновых объектов, к подклассу Плутино (транснептуновые объекты, находящиеся в 2:3 орбитальном резонансе с Нептуном) и к новому классу планет-карликов. В отличие от классических планет Плутон имеет сильно наклоненную (к эклиптике) орбиту ( $i = 17^\circ$ ) с высоким эксцентриситетом ( $e = 0.249$ ), вследствие чего он оказывается иногда ближе к Солнцу, чем Нептун (рис. 1.1). Большая полуось орбиты Плутона  $a = 40$  а.е., а его период обращения составляет почти 250 лет [10]. Движение Плутона вызывается, главным образом, притяжением Солнца и планет-гигантов. Влияние внутренних планет Солнечной системы существенно меньше, однако помимо малых короткопериодических возмущений они вносят в орбиту Плутона малые вековые возмущения, которые при моделировании движения Плутона на длительных временных интервалах все же необходимо учитывать.

Будем рассматривать движение Плутона под действием сил притяжения Солнца и восьми больших планет Солнечной системы в эклипти-

ческой гелиоцентрической системе координат, связанной с эпохой J2000. Тогда уравнения движения объекта можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - \underbrace{\sum_{i=0}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}}_{\mathbf{P}_D} - \underbrace{\sum_{i=1}^9 \mu_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3}}_{\mathbf{P}_I}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_9$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) — гелиоцентрические векторы положения Плутона и Солнца, а также притягивающих планет соответственно;  $t$  — время; а  $\mu_i$  — гравитационные постоянные притягивающих тел. В уравнениях  $\mathbf{P}_D$  — гравитационные силы, непосредственно влияющие на Плутон, тогда как  $\mathbf{P}_I$  — инерциальные силы, вызванные неинерциальностью координатной системы.

## 1.2 Интегратор Гаусса–Эверхарта

Уравнения движения Плутона интегрировались численно методом Эверхарта [11, 12], который в настоящее время пользуется популярностью среди небесных механиков для численного моделирования орбит. Приведем основные формулы и изложим алгоритм метода Эверхарта.

Предположим, на шаге  $h$  мы решаем задачу:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}_0 = \mathbf{q}(t_0). \quad (1.2)$$

Здесь  $t$  — независимая переменная,  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  — интегрируемые переменные, а  $\mathbf{f}$  — заданная вектор-функция  $t$  и  $\mathbf{q}$ . Введем переменную  $\tau = (t - t_0)/h$  и представим правую часть уравнений (1.2) в виде полинома степени  $k$ :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{h} \frac{d\mathbf{q}}{d\tau} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1 \tau + \mathbf{A}_2 \tau^2 + \mathbf{A}_3 \tau^3 + \dots + \mathbf{A}_k \tau^k, \quad (1.3)$$

где коэффициенты  $\mathbf{A}_i$  пока не определены. Интегрируя (1.3) по  $\tau$ , получаем решение

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{f}_0 \tau + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 \tau^2 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_2 \tau^3 + \frac{1}{4} \mathbf{A}_3 \tau^4 + \dots + \frac{1}{k+1} \mathbf{A}_k \tau^{k+1} \right). \quad (1.4)$$





В соответствии с (1.10) каждый коэффициент  $c_{ij}$  представляет собой сумму всевозможных произведений  $i - j$  величин  $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$  со знаком  $(-1)^{i-j}$ . Например,

$$c_{62} = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 + \tau_1\tau_2\tau_3\tau_5 + \tau_1\tau_2\tau_4\tau_5 + \tau_1\tau_3\tau_4\tau_5 + \tau_2\tau_3\tau_4\tau_5.$$

Отсюда согласно теореме Виета значения  $\tau_1, \dots, \tau_{i-1}$  будут являться корнями полинома вида

$$P_{i-1} = c_{i1} + c_{i2}\tau + c_{i3}\tau^2 + \dots + c_{ii}\tau^{i-1}. \quad (1.11)$$

Величины  $\boldsymbol{\alpha}$  определяются по  $\mathbf{f}$ , которые, в свою очередь, вычисляются по решениям  $\mathbf{q}$ . Согласно (1.4) эти решения будем задавать как

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{f}_0\tau_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_1^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau_1^3 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau_1^{k+1} \right), \\ \dots & \\ \mathbf{q}_k &= \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{f}_0\tau_k + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_k^2 + \frac{1}{3}\mathbf{A}_2\tau_k^3 + \dots + \frac{1}{k+1}\mathbf{A}_k\tau_k^{k+1} \right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Формулы (1.12) представляют собой неявные уравнения относительно  $\mathbf{q}_i$ , поэтому они решаются итерационным способом.

Для получения начального приближения  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  на следующем шаге  $\bar{h}$  используется информация о коэффициентах  $\mathbf{A}$  на текущем шаге  $h$ . Безразмерная независимая переменная следующего шага будет  $\bar{\tau} = (t - t_h)/\bar{h}$ , где  $t_h = t_0 + h$ . Отсюда

$$\tau = r\bar{\tau} + 1, \quad (1.13)$$

где  $r = \bar{h}/h$ . Согласно (1.3)

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1\tau + \mathbf{A}_2\tau^2 + \mathbf{A}_3\tau^3 + \dots + \mathbf{A}_k\tau^k = \bar{\mathbf{f}}_0 + \bar{\mathbf{A}}_1\bar{\tau} + \bar{\mathbf{A}}_2\bar{\tau}^2 + \bar{\mathbf{A}}_3\bar{\tau}^3 + \dots + \bar{\mathbf{A}}_k\bar{\tau}^k. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.13) в (1.14) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\bar{\tau}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_0 &= e_{00}\mathbf{f}_0 + e_{10}\mathbf{A}_1 + e_{20}\mathbf{A}_2 + e_{30}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k0}\mathbf{A}_k, \\ \bar{\mathbf{A}}_1 &= r(e_{11}\mathbf{A}_1 + e_{21}\mathbf{A}_2 + e_{31}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k1}\mathbf{A}_k), \\ \bar{\mathbf{A}}_2 &= r^2(e_{22}\mathbf{A}_2 + e_{32}\mathbf{A}_3 + \dots + e_{k2}\mathbf{A}_k), \\ \dots & \dots \\ \bar{\mathbf{A}}_k &= r^k e_{kk}\mathbf{A}_k, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $e_{ij}$  — числа арифметического треугольника, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$e_{ii} = e_{i0} = 1, \quad e_{ij} = e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 0). \quad (1.16)$$

Пользуясь соотношениями (1.9) для  $\bar{\mathbf{A}}$ , будем иметь начальное приближение  $\bar{\alpha}$ .

Оценку  $\bar{\mathbf{A}}$  для  $\bar{h}$  можно существенно улучшить, если к ней добавлять поправку  $\Delta \mathbf{A}$ , получаемую как разность между значениями  $\mathbf{A}$  после итераций и оценкой  $\bar{\mathbf{A}}$  на текущем шаге  $h$ .

Каждая итерация выполняется следующим образом. Сначала определяется решение  $\mathbf{q}_1$ , из которого по первой формуле (1.6) улучшается значение  $\alpha_1$ . Далее определяется  $\mathbf{q}_2$ , по которому улучшается  $\alpha_2$ , и так до  $\mathbf{q}_k$ . Как правило, для получения достаточно хороших  $\alpha$  необходимо всего лишь 2 итерации, очень редко — 3.

Как только величины  $\alpha$  получены, решение на шаге  $h$  ( $\tau = 1$ ) будет

$$\mathbf{q}_h = \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{f}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{A}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{A}_2 + \dots + \frac{1}{k+1} \mathbf{A}_k \right). \quad (1.17)$$

В начале интегрирования, на первом шаге, в качестве  $\bar{\alpha}$  выбирают нулевые значения и запускается вышеописанный итерационный процесс. Если начальный шаг слишком большой, чтобы обеспечить заданную локальную точность, то его следует уменьшить. При оптимально выбранном шаге высокая точность  $\alpha$  достигается уже за 4 итерации.

Пользуясь (1.7), (1.8) и (1.12), нетрудно показать, что решение (1.17) представимо в виде

$$\mathbf{q}_h = \mathbf{q}_0 + h \sum_{i=0}^k b_i \mathbf{k}_i, \quad \text{где} \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{f}(t_0 + h\tau_i, \mathbf{q}_0 + h \sum_{j=0}^k a_{ij} \mathbf{k}_j) \quad (i = 0, \dots, k),$$

а коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_i$  — постоянные, зависящие только от  $\tau_i$ . Таким образом, интегратор Гаусса–Эверхарта фактически основан на видоизмененных формулах неявного метода Рунге–Кутты.

Произвольный выбор узлов  $t_i$  дает метод порядка  $k + 1$ . Однако, используя свойства неявных методов Рунге–Кутты, Эверхарт выбрал разбиение Гаусса–Радона, что позволило повысить точность метода до порядка  $2k + 1$ .

Контроль шага интегрирования в интеграторе осуществляется по величине последнего члена в (1.17). Пусть  $\|\mathbf{e}_{tol}\|$  — заданная точность. Потребуем, чтобы на следующем шаге выполнялось равенство

$$\frac{\bar{h}}{k+1} \|\bar{\mathbf{A}}_k\| = \|\mathbf{e}_{tol}\|.$$

Отсюда, используя последнее соотношение в (1.15), получаем оценку

$$\bar{h} = hr = h \left( \frac{k+1 \|\mathbf{e}_{tol}\|}{h \|\mathbf{A}_k\|} \right)^{\frac{1}{k+1}}. \quad (1.18)$$

Очевидно, при разбиениях Гаусса–Рунге и Гаусса–Лобатто недостаток такой оценки состоит в том, что шаг по ней выбирается как для решения порядка  $k$ , поэтому, вообще говоря, она не обеспечивает сохранение локальной точности.

Во избежание слишком больших (и малых) локальных ошибок на  $r$  следует наложить ограничение:

$$\frac{1}{\sigma} < r^{k+1} < \sigma. \quad (1.19)$$

Для того чтобы величина последнего члена в (1.17) была ограничена в пределах одного порядка, значение  $\sigma$  должно быть равно  $\sqrt{10}$ . Это следует из того факта, что  $\bar{h} \|\bar{\mathbf{A}}_k\| \sim r^{k+1}$ .

Выполнение обоих неравенств проверяется лишь в начале интегрирования при выборе стартового шага: если (1.19) не выполняется, то интегрирование повторяется с новым шагом  $\bar{h} = hr$  и так далее, пока не выполнится условие (1.19). Обычно для получения стартового шага требуется не более 4 итераций. В дальнейшем для ограничения  $r$  проверяется только правое неравенство: если неравенство не выполняется, то  $r$  принимает значение правого предела.

Начальное приближение стартового шага получается из оценки (1.18) для  $k = 1$ :

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{2h \|\mathbf{e}_{tol}\|}{\|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0\|}}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}(t_0 + h, \mathbf{q}_0 + h\mathbf{f}_0), \quad (1.20)$$

где  $h$  — малая величина. Если  $h$  настолько мала, что в компьютерной арифметике  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_0$ , она увеличивается в 10 раз и оценка повторяется снова.

### 1.3 Теоретические оценки влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование орбит

На примере ограниченной круговой задачи трех тел мы покажем, как короткопериодические возмущения влияют на быстродействие численного интегрирования [2].

В задаче орбита третьего тела возмущается внутренним массивным телом, быстро обращающимся около центрального. Уравнения задачи имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \underbrace{-\mu \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}}_{\mathbf{F}} - \underbrace{\mu_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3}}_{\mathbf{P}} - \overbrace{\mu_P \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}}^{\mathbf{P}_I}. \quad (1.21)$$

где  $\mathbf{F}$  — кеплеровский член,  $\mathbf{P}$  — возмущающие силы, а  $\mu_P$  и  $\mathbf{x}_P$  — соответственно гравитационный параметр и вектор положения второго тела, причем  $\mu_P \ll \mu$ . Заметим, что эти уравнения записаны в координатной системе, связанной с центральным телом.

При использовании численного метода порядка  $p$  для ошибки интегрирования кеплеровской почти круговой орбиты  $|\Delta\mathbf{x}_K|$  на шаге  $\Delta t$  справедлива оценка

$$|\Delta\mathbf{x}_K| \approx a(n\Delta t)^{p+1}/(p+1)! \quad (1.22)$$

Внутреннее массивное тело, вызывающее в орбите третьего короткопериодические возмущения, должно быть достаточно близко к центральному телу. Тогда в  $\mathbf{P}$  будет доминировать инерциальная сила  $\mathbf{P}_I$ . Ошибку интегрирования на шаге  $\Delta t_P$  этой составляющей можно оценить как

$$|\Delta\mathbf{x}_P| \approx \beta a_P (n_P \Delta t_P)^{p+1}/(p+1)! \quad (1.23)$$

где  $\beta = \mu_P/(\mu + \mu_P)$ ,  $a$  и  $a_P$  — большие полуоси соответственно третьего и второго тел, а  $n$  и  $n_P$  — их средние движения. Введем малый параметр  $\alpha = a_P/a$ , причем  $\alpha^{-3/2} = n_P/n$ . Тогда согласно (1.22) и (1.23) одинаковая точность интегрирования  $\mathbf{F}$  и  $\mathbf{P}$  достижима только в том случае, когда величины шагов  $\Delta t$  и  $\Delta t_P$  будут удовлетворять соотношению

$$\nu \equiv |\Delta t/\Delta t_P| = (\alpha\beta)^{1/(p+1)}\alpha^{-3/2}. \quad (1.24)$$

Отсюда, если  $\nu < 1$ , то влияние короткопериодических возмущений на численное интегрирование несущественно и шаг будет определяться только кеплеровским членом  $\mathbf{F}$ . В противном же случае мы сталкиваемся с проблемой короткопериодических возмущений, для разрешения которой необходимо прибегать к тем или иным методам сглаживания орбит.

Следует отметить, что от инерциального члена можно избавиться, если записать уравнения движения относительно барицентра массивных тел. Эти уравнения можно представить в виде:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_B}{dt^2} = \underbrace{-(\mu + \mu_P) \frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}_{\mathbf{F}} - \underbrace{\left( \underbrace{-\mu \frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{1B}}{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{1B}|^3} + \mu \frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}_{\mathbf{P}_1} \right) \underbrace{\left( \underbrace{-\mu_P \frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{2B}}{|\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_{2B}|^3} + \mu_P \frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}_{\mathbf{P}_2} \right)}_{\mathbf{P}}, \quad (1.25)$$

где  $\mathbf{x}_{1B}$ ,  $\mathbf{x}_{2B}$  и  $\mathbf{x}$  — барицентрические векторы положения первого, второго и третьего тел соответственно. Здесь  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  можно рассматривать как возмущающую силу за отклонение массивных тел от барицентра. Кроме того, из условия  $\mu_P \ll \mu$  следует, что  $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$  (см., например, [1]) и поэтому в нашем случае возмущающей силой  $\mathbf{P}_1$  можно пренебречь.

Получение оценки  $|\Delta \mathbf{x}_P|$  для  $\mathbf{P}_2$  в общем случае весьма проблематично. Однако в круговой плоской задаче при использовании численного метода нечетного порядка удается получить ее предельные значения [2]:

$$|\Delta \mathbf{x}_P|_{\min}^{\max} \approx \pm \frac{a(n\Delta t_P)^{p+1}}{(p+1)!} \frac{\beta}{(1 \mp \alpha)^{p+1}} \times \sum_{i=0}^{p-1} (1 \mp \alpha)^i (\alpha^{-3/2} - 1)^{p-1-i} \sum_{j=1}^{p-1-i} a_{ij} (\pm \alpha)^j, \quad (1.26)$$

где  $a_{ij}$  — целые числа, зависящие от  $p$ .

Пусть при некотором  $\alpha = \alpha_B$  ошибка  $|\Delta \mathbf{x}_P|$  (1.23) равна  $|\Delta \mathbf{x}_P|_{\min}^{\max}$  (1.26). Тогда для всех  $\alpha > \alpha_B$  переход к барицентрической системе становится необоснованным. Эмпирически была получена следующая приближенная формула для граничного значения  $\alpha_B$ :  $\alpha_B = e^{-0.2p}$ .

Для достаточно малых  $\alpha$

$$|\Delta \mathbf{x}_P| \approx |\Delta \mathbf{x}_P|_{\min}^{\max} \approx |\Delta \mathbf{x}_P|_{\min} \approx 2a(n\Delta t_P)^{p+1} \beta \alpha (\alpha^{-3/2})^{p-1} / (p+1)!,$$

отсюда коэффициент  $\nu_B$  для уравнения (1.25) будет

$$\nu_B = (2\beta\alpha)^{1/(p+1)}(\alpha^{-3/2})^{(p-1)/(p+1)}. \quad (1.27)$$

Поэтому, сравнивая (1.24) и (1.27), можно ожидать, что при переходе к барицентрической системе быстродействие численного интегрирования повысится в  $(2\alpha^3)^{-1/(p+1)}$  раз.

Впрочем, несмотря на то, что уравнения (1.25) будут интегрироваться быстрее, нежели (1.21), этот подход, как правило, на практике не позволяет полностью разрешить проблему короткопериодических возмущений, в особенности, при использовании численных методов высокого порядка.

С другой стороны, интересно отметить, что сам переход к барицентрической системе координат можно рассматривать как самостоятельный метод повышения эффективности численного интегрирования, однако прибегать к нему имеет смысл только при достаточно малых  $\alpha$ .

#### 1.4 Практические оценки влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование орбит

Покажем теперь, как зависит точность и быстродействие численного интегрирования орбиты Плутона от влияния того или иного возмущающего фактора. Для этого мы провели численный эксперимент, цель которого состояла в том, чтобы оценить влияние короткопериодических возмущений от восьми больших планет на орбиту Плутона. Для достижения поставленной цели на интервале времени 100 оборотов объекта мы численно интегрировали гелиоцентрические уравнения орбитального движения методом Гаусса–Эверхарта 10-го порядка с переменным шагом, а также исследовали эффективность интегрирования при различных моделях сил, в которых последовательно, начиная с Меркурия, отключали (игнорировали) влияние планет. Параметры  $\nu$ , характеризующие степень влияния короткопериодических возмущений на численное интегрирование, представлены для каждой планеты на рис. 1.2.

Результаты численного интегрирования (точность и быстродействие) приведены на рис. 1.3 и 1.4. Здесь точность метода  $|\Delta\mathbf{x}|$  оценивалась путем сравнения вычисляемых эфемерид Плутона, полученных при раз-

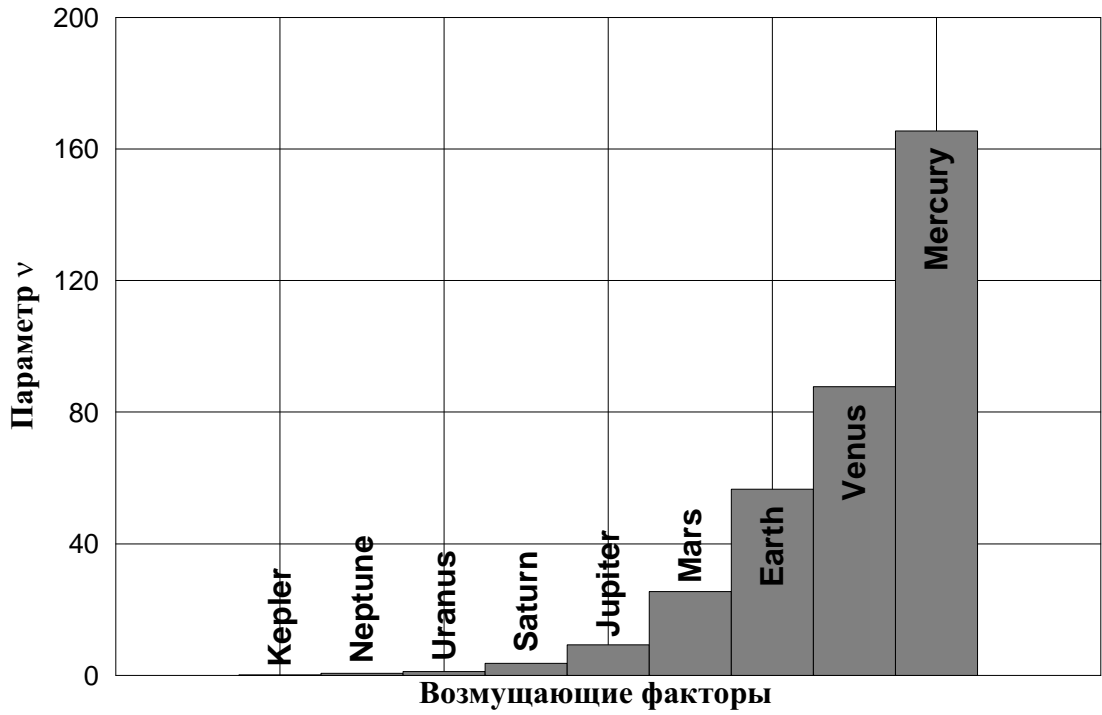


Рис. 1.2: Параметр  $\nu$  (1.24) для различных короткопериодических возмущающих факторов.

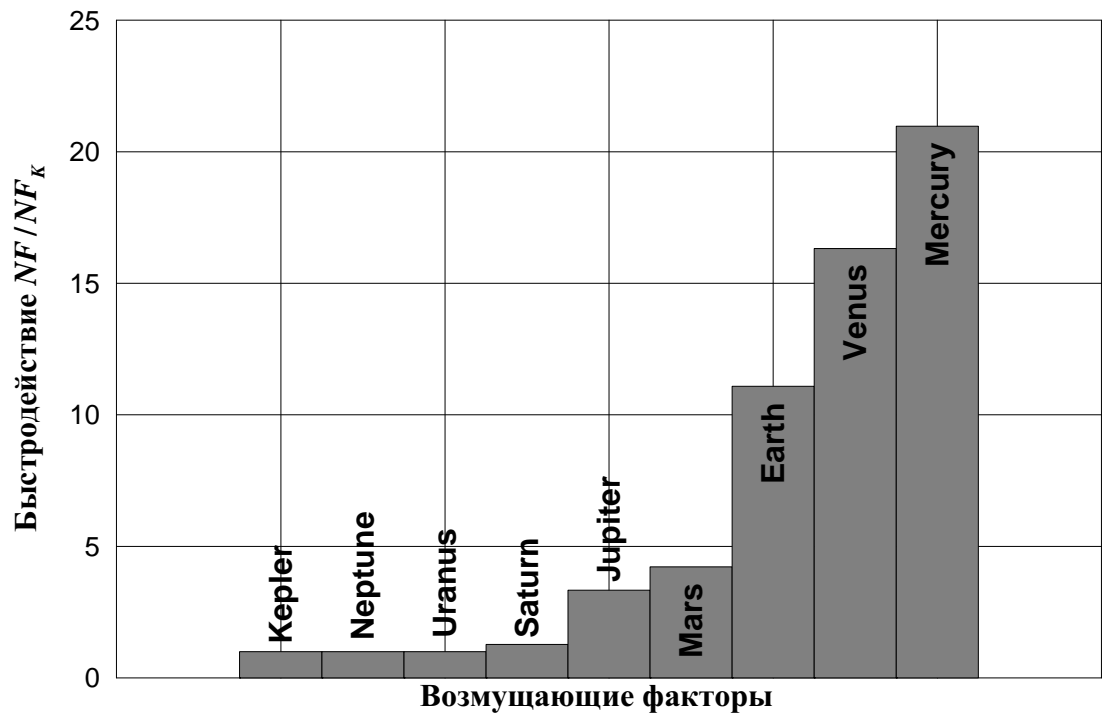


Рис. 1.3: Зависимость быстродействия численного интегрирования от влияния возмущающих факторов.

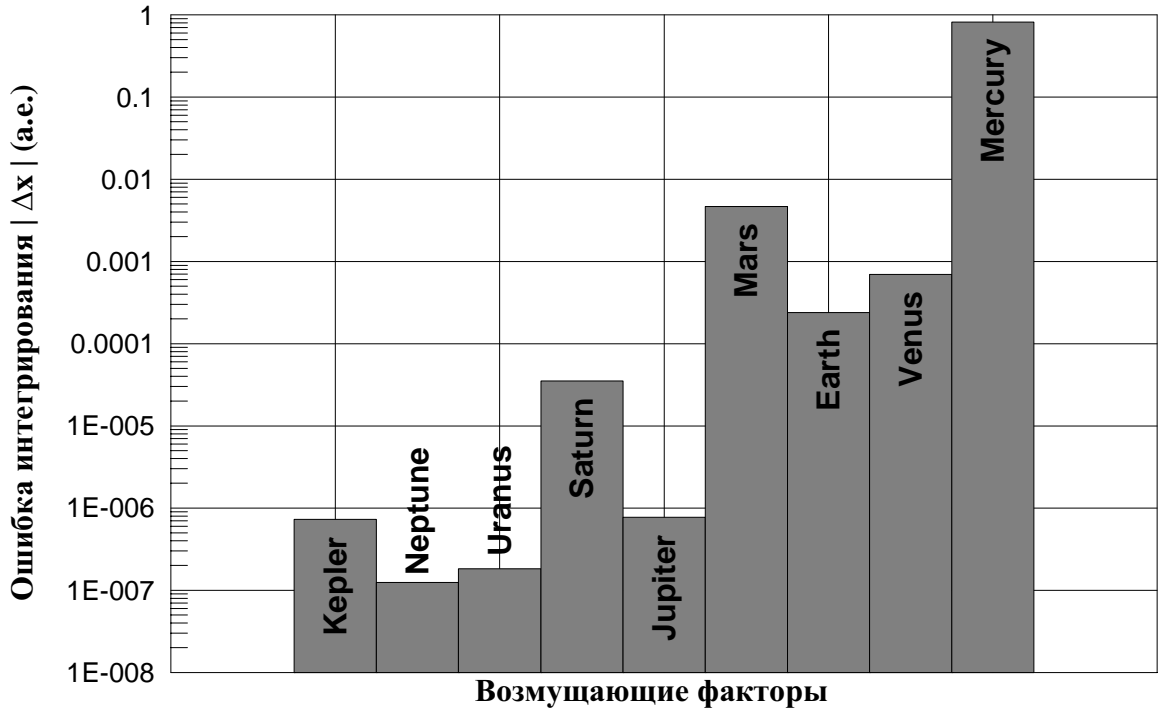


Рис. 1.4: Зависимость точности численного интегрирования от влияния возмущающих факторов.

личных локальных точностях ( $\|e_{tol}\| = 10^{-10}$  и  $\|e_{tol}\| = 10^{-11}$ ), а быстроедействие — по числу обращений к правым частям уравнений  $NF$ . На рис. 1.3 в качестве показателя быстрогодействия представлено отношение чисел  $NF/NF_K$ , где  $NF_K$  — число обращений к правым частям уравнений в случае интегрирования кеплеровской орбиты (Kepler).

Как видно из рис. 1.3, короткопериодические возмущения, вызываемые Меркурием, Венерой и Землей, являются основным фактором в понижении быстрогодействия. Так, учет влияния от этих планет замедляет численный процесс более чем в 10 раз (от Меркурия даже более чем в 20 раз). В то же время влияние от Юпитера и Марса существенно меньше. Их учет замедляет численный процесс примерно в 4 раза. При этом моделируемые притяжения от планет-гигантов почти не влияют на быстроедействие интегрирования.

Короткопериодические возмущения также влияют и на точность вычисления координат Плутона. Из графика на рис. 1.4 хорошо видна тенденция повышения точности при каждом последующем отключении планеты. Причем как и выше, гравитационное влияние от Меркурия явля-



ется основным фактором, влияющим на точность численного процесса. Так, при игнорировании его влияния в модели сил точность интегрирования повышается на три порядка.

Напомним, что согласно определению (1.24) параметр  $\nu$  указывает на то, во сколько раз понизится быстродействие в случае появления в моделируемой орбите короткопериодических возмущений от быстрообращающихся планет. Поэтому результаты рис. 1.2 и 1.3, вообще говоря, должны совпадать. Однако, вопреки ожиданию, они существенно отличаются. Это объясняется тем, что, во-первых, оценка (1.24) справедлива, если точности интегрирования возмущенной и невозмущенной орбит одинаковы, хотя в нашем случае это не так (рис. 1.4): например, точность интегрирования орбиты при учете влияния от внутренних планет значительно хуже (почти на 6 порядков), нежели точность интегрирования кеплеровской орбиты. Кроме того, во-вторых, исследуемая нами задача принципиально отличается от ограниченной задачи трех тел, в рамках которой была получена оценка (1.24). Поэтому параметр  $\nu$  целесообразно рассматривать как качественный показатель, сигнализирующий о возможном возникновении проблемы короткопериодических возмущений.

## 2 МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ ОРБИТ С КОРОТКОПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Итак, при численном интегрировании динамики далеких объектов, находящихся под влиянием близких к центральному телу массивных, мы сталкиваемся с проблемой понижения быстродействия численного процесса. Для того, чтобы разрешить эту трудность, прибегают к различным методам сглаживания орбит, обремененных короткопериодическими возмущениями.

### 2.1 Включение масс быстрообращающихся тел в массу центрального тела

Одним из способов, разрешающим проблему короткопериодических возмущений, является включение масс быстрообращающихся тел в массу центрального тела. В этом случае моделирование движения объекта выполняется на основе упрощенных уравнений, которые представляют собой возмущенные уравнения задачи двух тел с модифицированным гравитационным параметром центрального тела:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\sum_{i=0}^M \mu_i \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} - \sum_{i=M+1}^9 \mu_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3}, \quad (2.1)$$

где  $M < 9$  — число планет, массы которых включаются в массу Солнца.

Заметим однако, что к такому подходу можно прибегать только тогда, когда размерами орбит близких объектов можно пренебречь. В противном случае упрощение модели сил приведет к недопустимой потере точности.

### 2.2 Переход к барицентру

Другой способ, который можно рассматривать как самостоятельный метод повышения эффективности численного процесса, состоит в переходе к барицентрической координатной системе. В результате уравнения дви-

жения принимают вид

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = - \sum_{i=0}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}, \quad (2.2)$$

где положения  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}_i$  отнесены к барицентрической системе координат. Заметим, что здесь

$$\mathbf{x}_0 = - \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^9 \mu_i \mathbf{x}_i \neq \mathbf{0}.$$

В барицентрических уравнениях (2.2) отсутствуют инерциальные силы  $\mathbf{P}_I$ , вызываемые гравитационным влиянием планет на Солнце, с которым в относительной (неинерциальной) системе координат связывают ее начало. Это позволяет существенно повысить быстродействие численного интегрирования.

Конечно, в барицентрических уравнениях также присутствуют короткопериодические члены, но по величине они значительно меньше нежели в уравнениях относительного движения (1.1). Следует также иметь в виду, что переход к барицентру не приводит к потере точности, но при этом необходимо помнить, что интегрирование выполняется от других (барицентрических) начальных условий.

### 2.3 Усреднение Гаусса

Одним из альтернативных способов сглаживания орбиты с короткопериодическими возмущениями можно считать метод усреднения Гаусса, который изначально был предложен автором для вычисления вековых возмущений первого порядка [9, 13]. В результате преобразования Гаусса в модели сил влияние от быстро движущихся объектов заменяется влиянием от так называемого гравитирующего гауссова кольца (эллипса). Таким образом, из моделируемой орбиты удастся исключить короткопериодические возмущения от близкого объекта. Очевидно, что такой способ приводит к потере точности, однако вследствие учета вековых возмущений ошибки модели остаются малыми на достаточно длительных интервалах времени.

### 2.3.1 Модель гауссова кольца

Будем полагать, что орбита возмущающего тела есть окружность, лежащая в основной плоскости координатной системы. Тогда соответствующее кольцо Гаусса — это однородное круглое кольцо, силовая функция которого имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{x}) = \mu_P \frac{K(\kappa)}{\sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2}}, \quad (2.3)$$

$$K(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \kappa^2 = \frac{4a_P \rho}{x_3^2 + (\rho + a_P)^2},$$

где  $\mu_P$  — гравитационная постоянная планеты;  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $a_P$  — радиус кольца;  $K(\kappa)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

Дифференцируя  $U$  по  $\rho$  и  $x_3$ , будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\mu_P}{2\rho \sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2}} \left[ \frac{x_3^2 + a_P^2 - \rho^2}{x_3^2 + (\rho - a_P)^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right]$$

и

$$P_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{\mu_P x_3 E(\kappa)}{\sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2} x_3^2 + (\rho - a_P)^2}, \quad (2.4)$$

где  $E(\kappa)$  обозначает полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Отсюда составляющие силы по осям абсцисс и ординат будут

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (2.5)$$

В результате, используя модели гауссовых колец для первых  $M$  тел, получим уравнения движения

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\mu_0 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \sum_{i=1}^M \mathbf{P}_i - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} - \sum_{i=M+1}^9 \mu_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3}. \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Способы вычисления эллиптических функций

Существует два способа вычисления эллиптических функций: с помощью представления функции в виде ее разложения в ряд по четным степеням  $\kappa$

$$\begin{pmatrix} E \\ K \end{pmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} E_i \\ K_i \end{pmatrix} \kappa^{2i};$$

и с использованием итерационного метода, предложенного Кингом [14]. Схему метода Кинга можно представить в виде:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \sqrt{1 - \kappa^2}$$
$$a_{i+1} = \frac{1}{2}(a_i + b_i), \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i}, \quad c_{i+1} = a_{i+1}^2 - b_{i+1}^2.$$

Известно, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \frac{1}{K}.$$

Итерационный процесс выполняется до сходимости с некоторой заданной точностью  $\varepsilon$ . В результате получаем значение эллиптической функции  $K$ , а затем из соотношения

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 2^i c_i^2$$

находим функцию  $E$ .

Следует заметить, что использование метода Кинга при численном интегрировании предпочтительнее, поскольку он обеспечивает быструю сходимость процесса за малое число итераций даже при больших значениях  $\kappa$ , при которых ряды, в свою очередь, сходятся очень медленно. Недостаток использования рядов состоит еще и в том, что заранее необходимо вычислять коэффициенты  $E_i$  и  $K_i$ .

## 2.4 Мультипольная модель

Более простое представление возмущений от близкого объекта можно получить с помощью мультипольной модели, где его влияние рассматривается как притяжение от нескольких стационарных материальных

точек, лежащих на орбите и образующих в совокупности гравитационный мультиполь. Его влияние в нашем случае можно представить в виде:

$$\mathbf{P}_i = -\frac{\mu_i}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3}, \quad (2.7)$$

где  $N$  — число материальных точек, а  $\mathbf{x}_j$  — их положения, координаты которых определяются по следующим формулам:

$$x_{j1} = a_i \cos \frac{2\pi j}{N}, \quad x_{j2} = a_i \sin \frac{2\pi j}{N}, \quad x_{j3} = 0.$$

Тогда уравнения движения примут вид (2.6) с функциями  $\mathbf{P}_i$ , вычисляемыми по формуле (2.7).

Главное преимущество мультипольной модели состоит в том, что она не вносит короткопериодические возмущения в исследуемую орбиту, поскольку точки стационарны. Заметим, что данная модель, как и описанные выше, не является точной, поэтому эффективность ее использования будет тем выше, чем ближе будет гравитирующий объект к центральному.

Очевидно, что точность представления влияния объекта будет также тем выше, чем больше будет число  $N$ . Однако, с другой стороны, увеличение числа  $N$  ведет к понижению скорости вычисления силы  $P$ . Поэтому необходимо выбирать оптимальное число  $N$ , которое бы обеспечивало достаточно высокую точность моделирования силы при высокой скорости ее вычисления. Численные оценки показывают, что в нашем случае можно выбрать квадрупольную модель, когда  $N = 4$ .

## 3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 3.1 Оценка методической точности упрощенных моделей

Как уже говорилось, в данной дипломной работе мы поставили перед собой цель рассмотреть различные методы устранения короткопериодических возмущений, а также оценить их эффективность на примере планетной задачи. В качестве исследуемого объекта мы выбрали главный транснептуновый объект Плутон. Выше было показано, что главные короткопериодические возмущения в движении Плутона вызываются внутренними планетами. Поэтому именно к этим возмущениям мы применили рассматриваемые нами сглаживающие преобразования. Следовательно, во всех преобразованных уравнениях движения  $M = 4$ .

Для исследования орбиты Плутона мы построили следующие динамические модели.

- Полная модель (I), где учитывалось влияние от всех планет, рассматриваемых как движущиеся материальные точки.
- Модель (II), где влияние от внутренних планет моделируется с помощью гауссовых колец.
- Модель с мультипольным представлением влияния от внутренних планет (III).
- Модели с исходным (V) и модифицированным гравитационным параметром (IV), но без учета влияния от внутренних планет.
- Модель, основанная на уравнениях движения относительно гелиоцентра (VI).

Моделирование выполнялось в барицентрической системе координат и, кроме того, предполагалось, что возмущающие планеты двигаются относительно барицентра по круговым эклиптическим орбитам. В основу моделей II–IV были положены уравнения (2.1), (2.2) и (2.6), но без инерциальных членов

$$\mathbf{P}_I = - \sum_{i=M+1}^9 \mu_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3}.$$

Таким образом, для соответствующих моделей использовались следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = - \sum_{i=0}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}; \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mu_0 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \sum_{i=1}^M \mathbf{P}_i - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}, \quad (\text{II, III})$$

где  $\mathbf{P}_i$  вычисляются соответственно по формулам (2.4,2.5) и (2.7);

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = - \sum_{i=0}^M \mu_i \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}; \quad (\text{IV})$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\mu_0 \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}; \quad (\text{V})$$

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = - \sum_{i=0}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} - \sum_{i=1}^9 \mu_i \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3}. \quad (\text{VI})$$

Для исследования эффективности упрощенных моделей по сравнению с полной мы оценивали их точность в орбитальных элементах (рис. 3.1–3.6) и векторе положения ( $|\Delta\mathbf{x}|$ ), а также быстродействие, определяемое по количеству выполненных шагов интегрирования ( $NS$ ) и по процессорному времени ( $CPU$ ), затраченному на моделирование. Причем в работе также были рассмотрены варианты моделей без учета влияния от внешних планет, т.е. без членов

$$\mathbf{P}_E = - \sum_{i=M+1}^8 \mu_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3}.$$

Полученные оценки приведены в табл. 3.1 и 3.2.

Как уже говорилось выше, мы рассмотрели два способа вычисления эллиптических функций: в первом эллиптические функции вычислялись с помощью использования рядов, а во втором — с помощью итерационного метода Кинга. Однако мы представляем лишь результаты, полученные с использованием итерационного метода, поскольку по быстродействию эти два способа вычисления эллиптических функций одинаково эффективны.



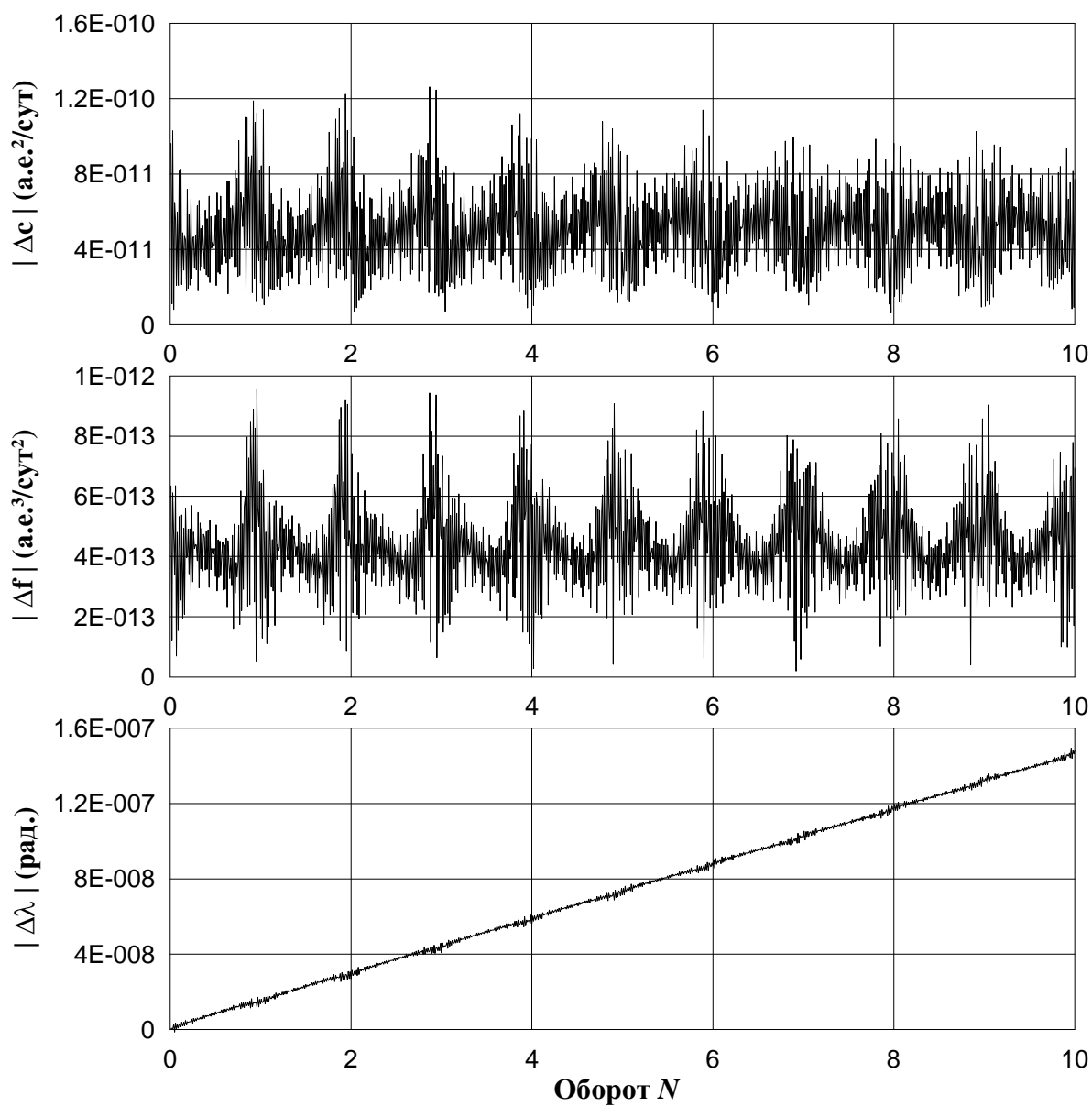


Рис. 3.1: Поведение ошибок в элементах для модели с гауссовыми кольцами (без учета влияния от внешних планет)

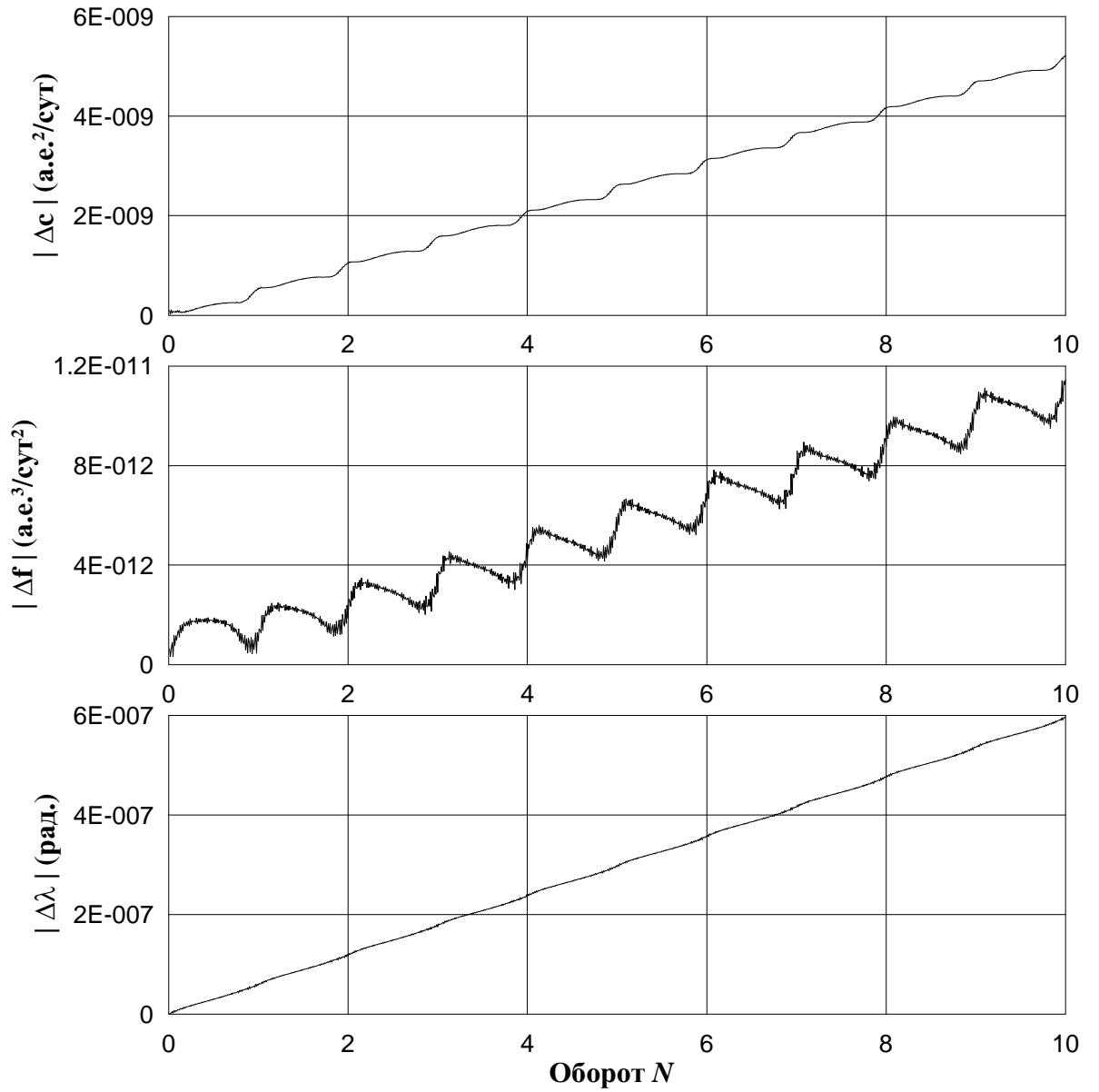


Рис. 3.2: Поведение ошибок в элементах для модели с модифицированным гравитационным параметром (без учета влияния от внешних планет)

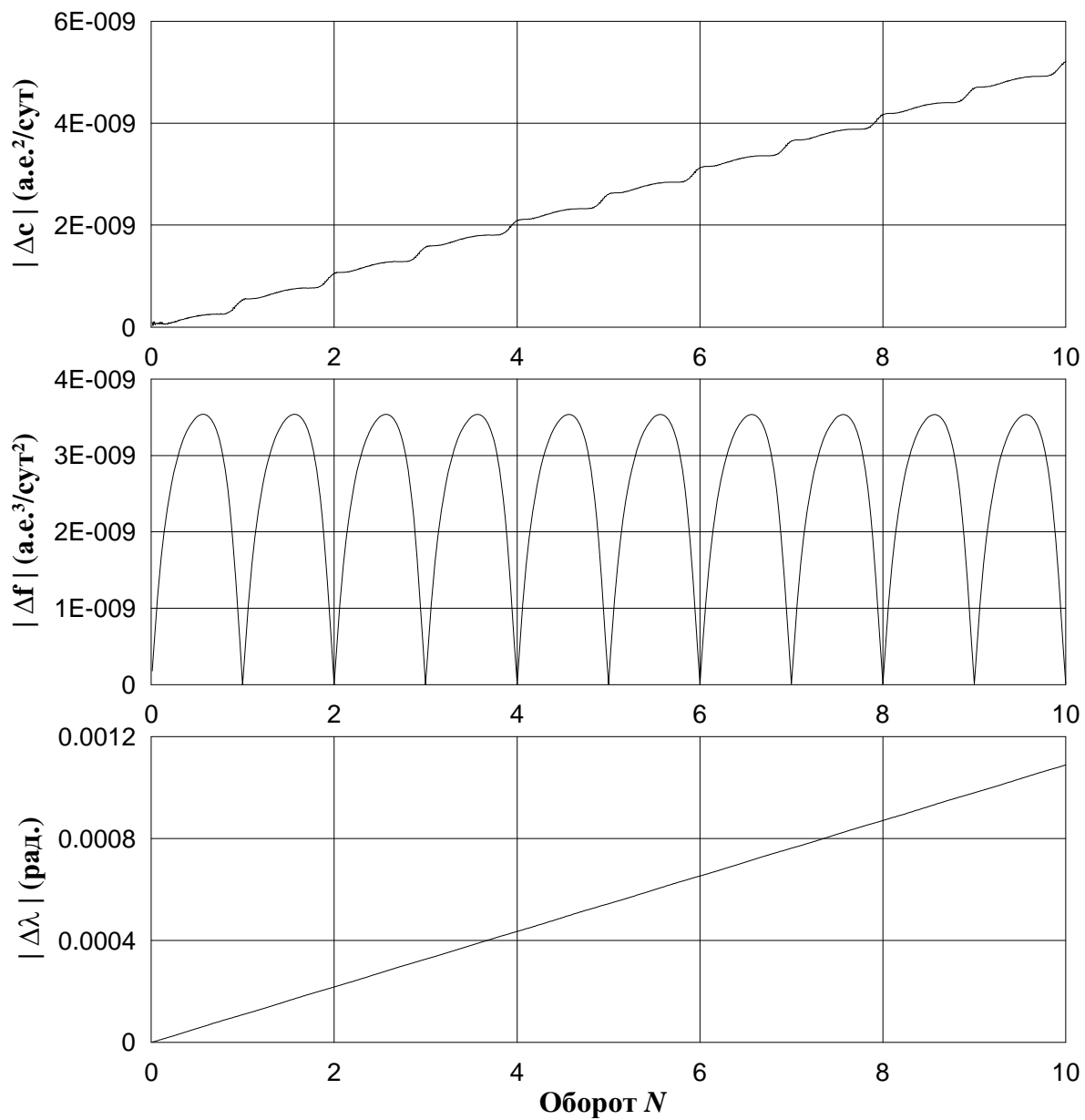


Рис. 3.3: Поведение ошибок кеплеровской орбиты

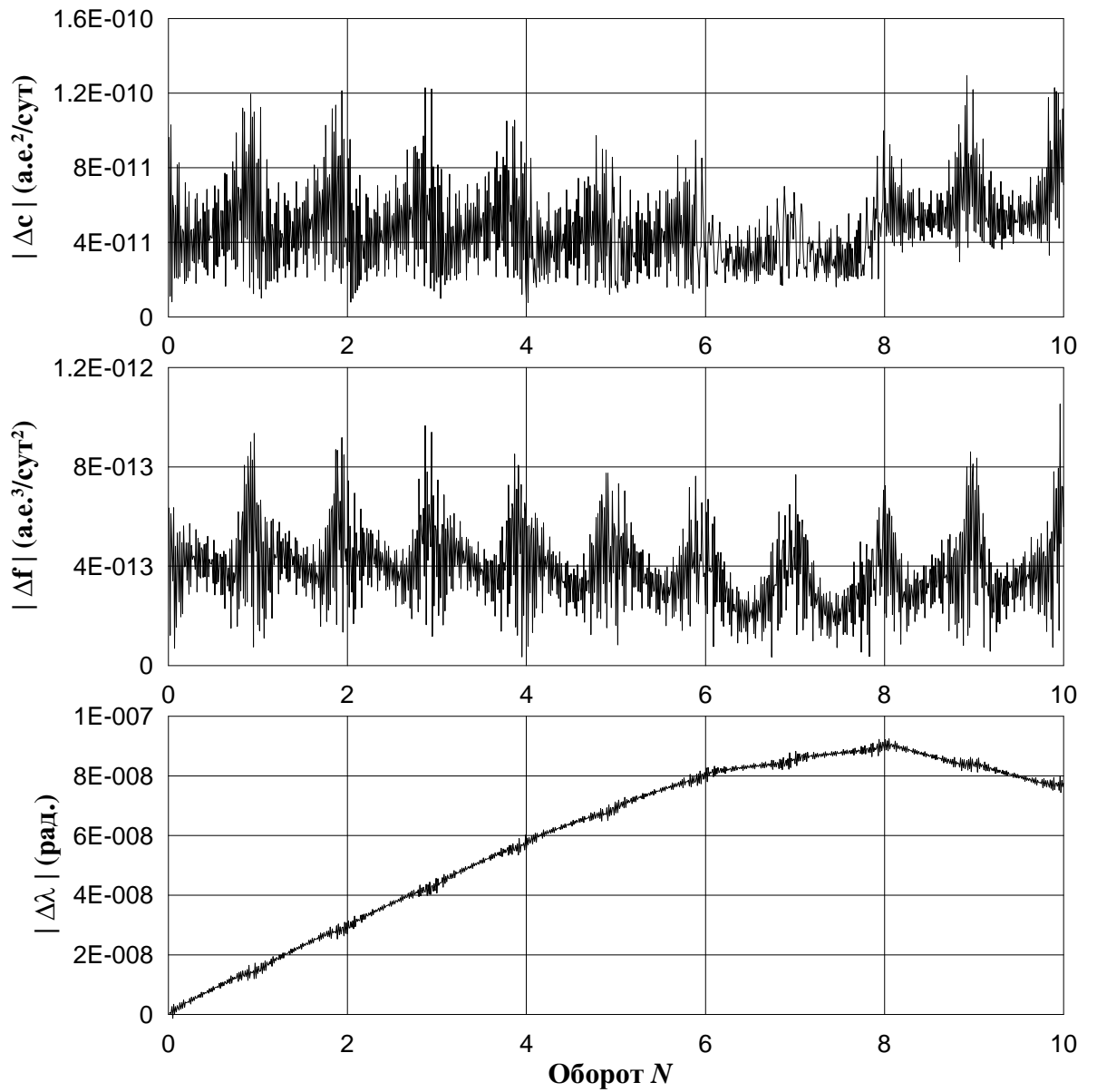


Рис. 3.4: Поведение ошибок в элементах для модели с гауссовыми кольцами (с учетом влияния от внешних планет)

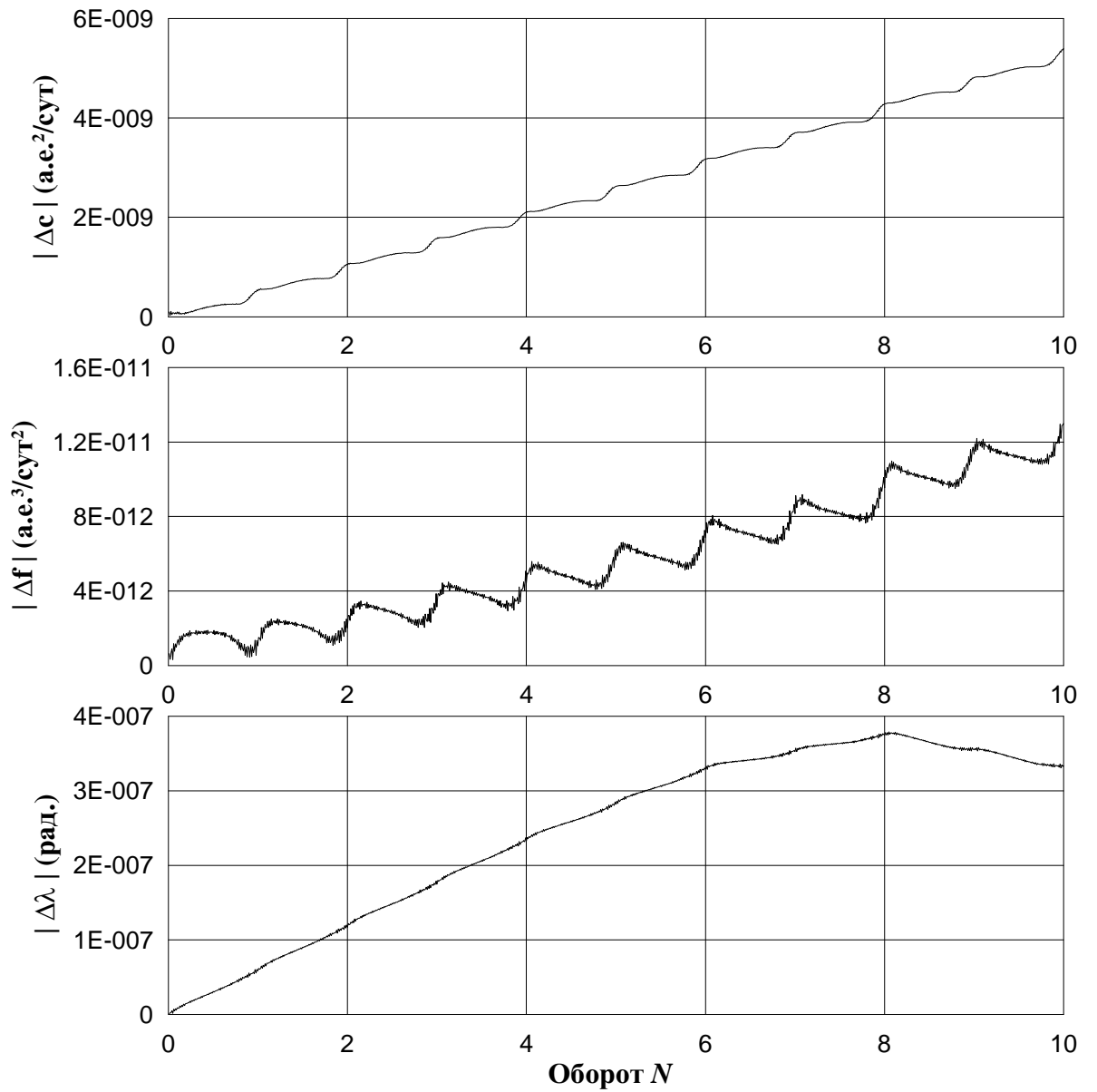


Рис. 3.5: Поведение ошибок в элементах для модели с модифицированным гравитационным параметром (с учетом влияния от внешних планет)

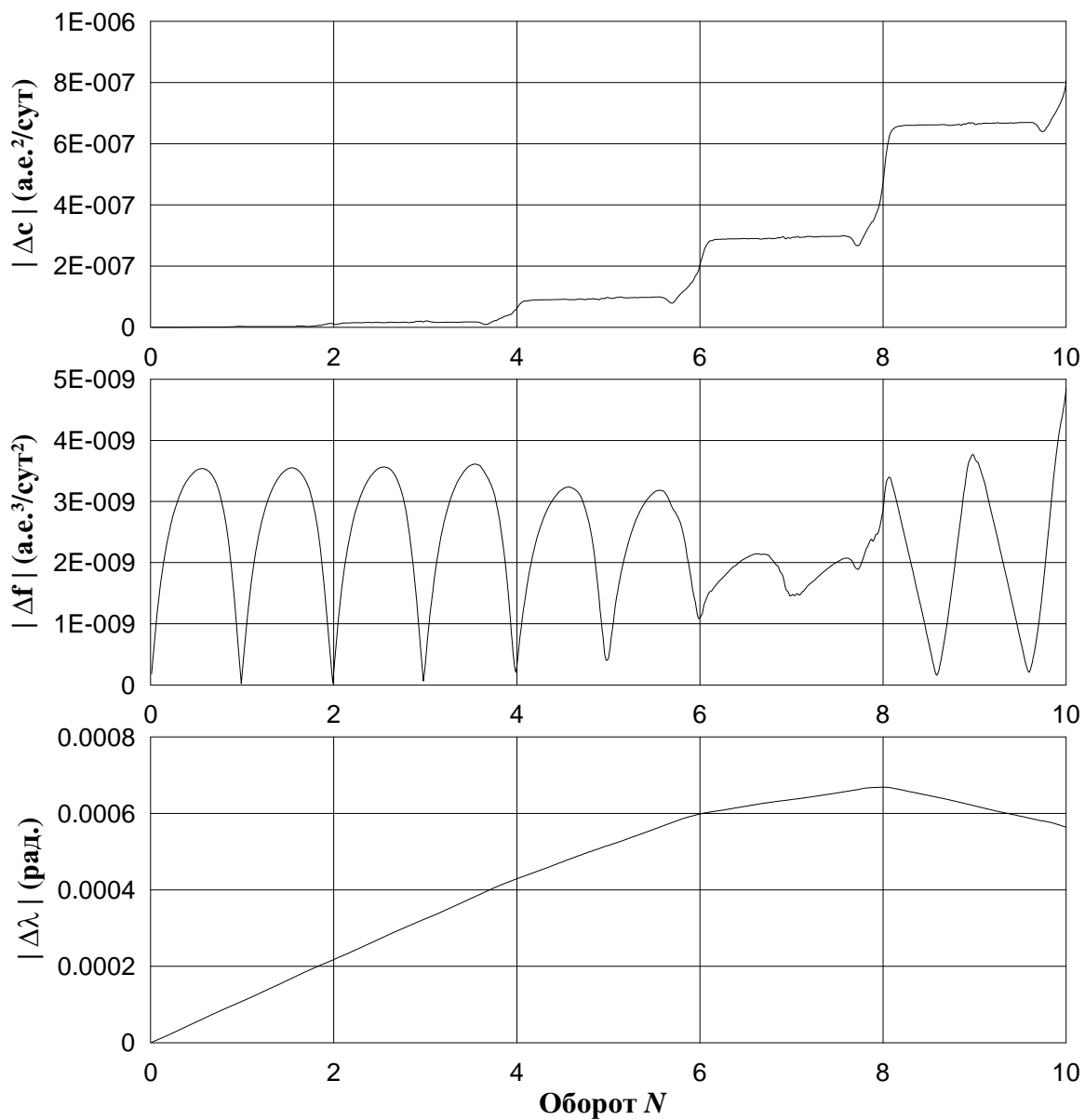


Рис. 3.6: Поведение ошибок в элементах без учета влияния от внутренних планет

На рис. 3.1–3.3 показаны отклонения вектора момента количества движения  $\mathbf{s}$ , вектора Лапласа  $\mathbf{f}$  и истинной долготы  $\lambda$  полной модели от их аналогов, полученных с помощью упрощенных моделей (влияние внешних планет не учитывалось). Как видно из рис. 3.1, для модели с гауссовыми кольцами вековые возмущения (ошибки) в элементах  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{f}$  довольно малы и ограничены. Отметим, что такое поведение орбитальных элементов говорит о том, что использование модели Гаусса может быть весьма полезно для численного интегрирования, поскольку она учитывает вековые изменения в этих элементах. Однако все же для высокоточного интегрирования усредненные уравнения еще остаются непригодными, поскольку они не учитывают довольно большие вековые эффекты в быстрой переменной, определяющей положение исследуемого тела на орбите. На рис. 3.1 эти вековые эффекты показаны на примере истинной долготы  $\lambda$ .

На рис. 3.2 мы наблюдаем совершенно иную картину: достаточно большие вековые изменения присутствуют уже в ошибках всех элементов. Таким образом, можно заключить, что модель с модифицированным гравитационным параметром хуже представляет орбитальное движение, нежели модель с гауссовыми кольцами.

Отклонения орбитальных элементов, представленные на рис. 3.3, очень большие и развиваются вековым образом. Фактически это говорит о том, что пренебрегать влиянием внутренних планет при точном моделировании орбиты Плутона на длительные интервалы времени совершенно недопустимо.

На рис. 3.4–3.6 представлены аналогичные результаты, но уже полученные для моделей, в которых учитывалось влияние от всех восьми планет. Из рисунков видно, что дополнительное влияние от больших планет вносит хоть и небольшие, но заметные нерегулярные изменения в поведении возмущений.

Разумеется, упрощение модели сил также приводит к потере точности в векторе положения. В табл. 3.1 и 3.2 приведены ошибки моделей II–VI, которые оценивались относительно эфемериды, полученной по модели I. Точность моделирования определялась в двух случаях: с учетом влияния всех планет (табл. 3.2) и только внутренних (табл. 3.1). Кроме того, также получены характеристики быстродействия численного интегриро-

Таблица 3.1: Эффективность численного интегрирования без учета влияния от внешних планет ( $\Delta t = 1000$  об.)

Модель	$ \Delta \mathbf{x} $ (а.е.)	$NS/10^3$	$CPU$ (с.)
I	—	591	70.1
II	$5.6 \cdot 10^{-4}$	248	16.7
III	$5.6 \cdot 10^{-4}$	248	15.5
IV	$2.5 \cdot 10^{-3}$	248	7.3
V	5.4	248	7.2
VI	0.8	6288	631.1

Таблица 3.2: Эффективность численного интегрирования с учетом влияния от всех планет ( $\Delta t = 1000$  об.)

Модель	$ \Delta \mathbf{x} $ (а.е.)	$NS/10^3$	$CPU$ (с.)
I	—	590	78.0
II	$5.06 \cdot 10^{-2}$	346	53.4
III	$5.06 \cdot 10^{-2}$	346	49.9
IV	$1.81 \cdot 10^{-1}$	346	33.9
V	9.8	346	33.9
VI	0.8	6288	737.2

вания. При этом моделирование выполнялось на интервале времени 1000 оборотов Плутона.

Как видно из табл. 3.1, переход к упрощенным моделям без использования эфемерид планет приводит к существенному повышению быстродействия численного интегрирования: по  $NS$  в 2.5 раза, тогда как по процессорному времени  $CPU$  для моделей II и III в 5 раз, а для IV и V в 10 раз. Отличие в выигрыше по  $NS$  и  $CPU$  объясняется, главным образом, тем, что применяемые методы сглаживания не только качественно улучшают орбиту с точки зрения численного интегрирования, но и упрощают описывающие ее дифференциальные уравнения, правые части которых при моделировании вычисляются быстрее.

При этом модели с использованием гауссовых колец и гравитационных квадрупольей дают довольно высокую точность представления орбиты. Точность моделирования с модифицированным гравитационным



параметром несколько хуже (почти в 2 раза). В то же время полное игнорирование влияния внутренних планет (модель V) приводит к недопустимо большим ошибкам в эфемериде Плутона, которые составляют более 5 а.е.

Результаты для модели VI фактически показывают, насколько может быть эффективен обычный переход от гелиоцентрической системы координат к барицентрической. Как видно из таблицы, использование барицентрических уравнений вместо гелиоцентрических повышает быстродействие интегрирования почти на порядок. Кроме того, следует заметить, что большая ошибка гелиоцентрической модели не является модельной, а обусловлена существенной потерей точности интегрирования гелиоцентрических уравнений. При необходимости точность можно повысить путем уменьшения шага интегрирования, что, впрочем, потребует гораздо больше затрат вычислительного времени.

При учете влияния от всех планет (табл. 3.2) результаты для упрощенных моделей становятся заметно хуже. По-видимому, это объясняется остаточными короткопериодическими возмущениями от Юпитера и Сатурна. Точность моделей II и III имеет порядок  $10^{-1}$  а.е. Ввиду больших ошибок моделей их допустимость уже не может быть безусловной, но должна рассматриваться в контексте конкретной задачи. Как и выше, игнорирование влияния внутренних планет также приводит к существенной потере точности.

Особо заметим, что показатели выигрыша в быстродействии по  $NS$  и  $CPU$  нивелируются. Согласно этим показателям быстродействие при использовании упрощенных моделей повышается только в 1.5–2 раза.

Вместе с тем результаты для модели VI при учете влияния внешних планет остаются такими же, как и в табл. 3.1. Это связано с тем, что в обоих случаях доминирующее влияние на интегрирование оказывают короткопериодические инерциальные силы от внутренних планет.

Таким образом, результаты табл. 3.2 показывают, что с точки зрения соотношения точность–быстродействие наиболее эффективным подходом для разрешения проблемы короткопериодических возмущений является использование уравнений с модифицированным гравитационным параметром (IV). Эффективность использования усредненных по Гауссу уравнений (II) можно было бы улучшить, если каким-либо способом уда-

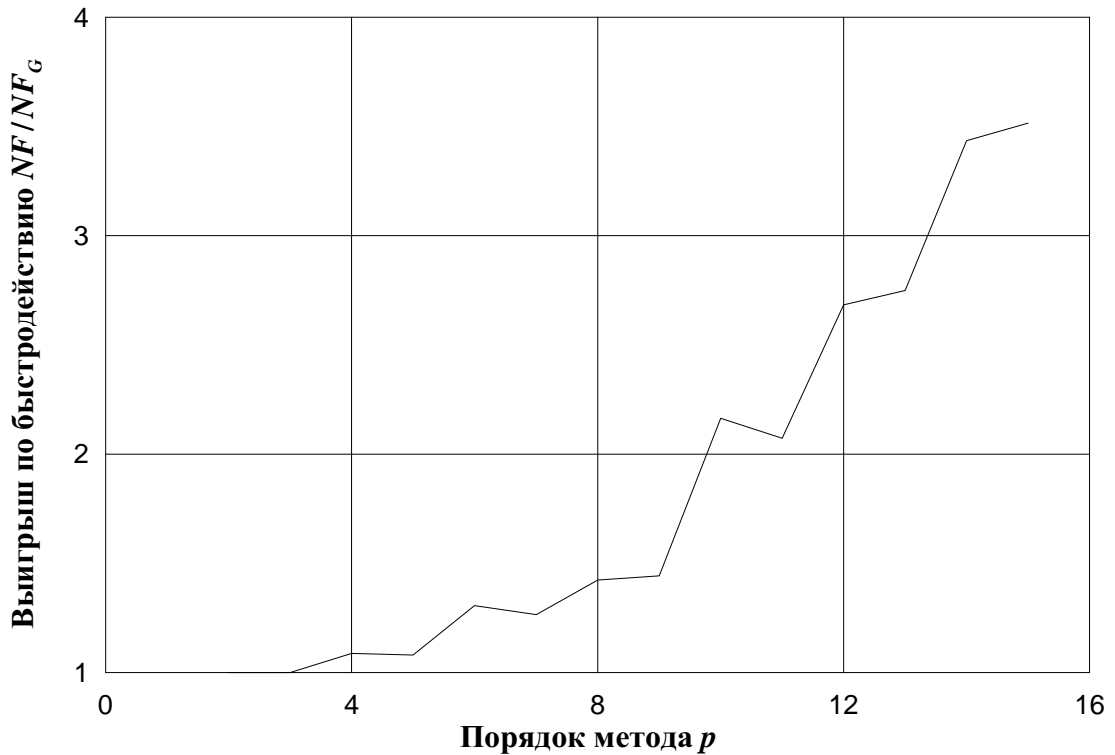


Рис. 3.7: Выигрыш по быстродействию при использовании модели II

лось погасить вековые эффекты в истинной долготе  $\lambda$  (рис. 3.1). Один из таких способов предложен в [1], где на примере динамики далеких спутников Юпитера показано, что с его помощью удастся повысить точность вычисляемой спутниковой орбиты почти на два порядка.

Наконец, результаты для гелиоцентрической модели (VI) более чем красноречиво свидетельствуют о том, что для решения задач, подобных нашей, всегда целесообразно прибегать к барицентрическим моделям.

## 3.2 Исследование эффективности интегрирования сглаженных орбит

Мы также провели еще один эксперимент, в котором исследовали зависимость быстродействия численного интегрирования от порядка интегратора в случае двух моделей: полной (I) и с гауссовыми кольцами (II). На рис. 3.7 представлено отношение чисел обращения к правым частям  $NF/NF_G$ , где  $NF$  для модели I, а  $NF_G$  для модели II. Задаваемая точность интегрирования на шаге выбиралась такая же, как и в предыдущих экспериментах.

Несмотря на то, что быстродействие численных моделей с увеличением порядка метода повышается в обоих случаях, как видно из рисунка, модель с гауссовыми кольцами (II) для численного интегрирования более эффективна (по быстродействию), нежели полная модель (I). Причем эффективность повышается с увеличением порядка интегратора  $p$ . Например, для  $p = 15$  использование гауссовой модели дает выигрыш по быстродействию почти в 3.5 раза. Таким образом, проблема потери быстродействия при интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями становится тем острее, чем выше порядок используемого численного метода.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в дипломной работе получены следующие результаты:

1. Построены численные модели движения Плутона, основанные на различных дифференциальных уравнениях движения, отличающихся друг от друга способами определения в них гравитационного влияния от внутренних планет.
2. Получены теоретические и практические оценки влияния короткопериодических возмущений на эффективность численного интегрирования. Численные оценки получены на примере Плутона. Экспериментально показано, что учет короткопериодических возмущений от внутренних планет существенно понижает быстродействие и точность численного моделирования орбиты Плутона.
3. Рассмотрены различные методы сглаживания короткопериодических возмущений, предполагающие включение масс быстрообращающихся тел в массу центрального тела, переход к барицентрической системе координат, применение усреднения Гаусса и мультипольное представление влияния быстрообращающихся тел. Выведены соответствующие дифференциальные уравнения.
4. Оценена методическая точность моделей, основанных на выведенных уравнениях движения. Показано, что с точки зрения соотношения точность–быстродействие наиболее эффективным подходом для разрешения проблемы короткопериодических возмущений является использование уравнений с модифицированным гравитационным параметром. Несмотря на то, что усредненные по Гауссу уравнения представляют движение точнее, на их интегрирование требуется значительно больше затрат процессорного времени. Кроме того, показано также, что использование гелиоцентрических уравнений движения Плутона совершенно нецелесообразно ввиду низкой эффективности их численного интегрирования.
5. Экспериментально установлено, что проблема потери быстродействия при интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями становится тем острее, чем выше порядок используемого численного метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авдюшев В.А. О численном интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями // Изв. вузов. Физика. 2006. Том 49. N 2. Приложение. С 31–43.
- [2] Авдюшев В.А. Методы теории специальных возмущений в небесной механике // Изв. вузов. Физика. 2007. Т. 49. Вып. 12. С. 73–80.
- [3] Encke J.F. Über eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen // Astr. Nach. 1852. V. 33. P. 377–398.
- [4] Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations // Springer Series in Computational Mathematics. Springer. 2002. Vol. 31.
- [5] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е. Теория движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979–2000 годы. Томск: Изд-во ТГУ, 1978. 120 с.
- [6] Rocher P., Chapront J. Observations and Ephemerides of the Faint Satellites of Jupiter // Astron. Astrophys. 1996. V. 311. P. 710–714.
- [7] Jacobson R.A. The Orbits of the Outer Jovian Satellite // Astron. J. 2000. V. 120. P. 2679–2686.
- [8] Emelyanov N.V. Ephemerides of the Outer Jovian Satellites // Astron. Astrophys. 2005. V. 435. P. 1173–1179.
- [9] Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. 208 с.
- [10] <http://www.iau.org/iau0601.424.0.html>
- [11] Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта. Новый фортран-код // Материалы всеросс. конф. ”Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики”, г. Томск, 3–5 октября 2006 г. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 413–414.

- [12] Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* V. 10. P. 35–55.
- [13] Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1971. 584 с.
- [14] Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1962. 208 с.