АВДЮШЕВ В.А., БОРДОВИЦЫНА Т.В., ЧЕРНИЦОВ А.М.

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ЧИСЛЕННОЙ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ (Доклад)

Введение

1

В последнее время для исследования орбитального движения все чаще прибегают к численному моделированию. Что же представляет собой численная модель?

2

Численное моделирование зиждется на трех китах. Это: 1) дифференциальные уравнения задачи; 2) численный метод, интегрирующий эти уравнения; и, наконец, 3) плацдарм, на котором развертывается процесс численного интегрирование, я имею в виду, персональный компьютер.

Эффективность численного моделирования характеризуется точностью и быстродействием. Очевидно, что развитие и усовершенствование каждого из названных китов позволяет повышать эффективность моделирования. Мы же сосредоточим внимание на дифференциальных уравнениях, а точнее, рассмотрим методы их преобразования, которые существенно повышают эффективность численного интегрирования.

3

Прежде всего, рассмотрим классические уравнения орбитального движения. С какими же трудностями мы сталкиваемся, когда интегрируем эти уравнения?

4

Во-первых, правые части уравнений представляют собой большие и быстроизменяющиеся функции даже для круговых орбит.

5

Во-вторых, уравнения сингулярны в начале координат. Для сильно вытянутых орбит в перицентре, при сближении с центральным телом, величины правых частей уравнений значительно и быстро возрастают. Поэтому интегрирование орбиты вблизи перицентра выполняется с малым шагом и большими ошибками.

6

В-третьих, уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Причем влияние неустойчивости таково, что ошибки ведут себя квадратичным образом. Если орбита описывается устойчивыми уравнениями, то ошибки интегрирования ведут себя линейно.

7

Предлагаемые методы теории специальных возмущений полностью решают каждую из перечисленных проблем. Мы рассмотрим следующие подходы. Это — линеаризация и регуляризация уравнений; методы вариации постоянных и координат (Энке); сглаживающие преобразования; а также стабилизация уравнений (Баумгарта и Накози).

Линеаризация и регуляризация

8

Линеаризация и регуляризация приводят уравнения к линейному и, самое важное, к регулярному виду, т.е. без сингулярностей.

Допустим, мы имеем векторные и скалярные интегральные соотношения. Вводим временное и координатное преобразования. Переходя к новым переменным и подставляя интегральные соотношения, мы получаем новые уравнения движения. Величины N и M пока неопределены. Так вот, центральным моментом здесь является то, что мы подбираем такие N и M, которые бы приводили уравнения к линейному и регулярному виду.

В возмущенном случае уравнения будут иметь слабонелинейный вид. Причем интегральные параметры уже не будут постоянными и для них нужно ввести уравнения. Кроме того, систему следует дополнить уравнением времени.

9

Очевидно, что таким способом можно получить целое семейство систем уравнений. Хотя на практике прижились только две из них. Это — системы уравнений Шперлинга-Боде и Кустаанхемо-Штифеля.

Сглаживающие преобразования

10

Сглаживающие преобразования уменьшают (смягчают), так скажем, эксцентричное поведение величины правых частей уравнений, что позволяет заметно повысить точность численного интегрирования, в особенности, сильновытянутых орбит.

Любое сглаживающее преобразование — это фактически временное преобразование, посредством которого мы переходим к новой независимой переменной (фиктивному времени), а уравнения приобретают вид.

На практике в качестве независимой переменной обычно выбирают эксцентрическую, эллиптическую и истинную аномалии, а также дугу орбиты.

Метод Энке

11

Идея Энке состоит в том, чтобы вместо координат интегрировать их малые возмущения относительно кеплеровской орбиты. Таким образом, мы переходим к малым величинам, которые естественно содержат малые ошибки округления и это позволяет уменьшить их влияние на численное решение. Кроме того, если возмущения достаточно гладкие, то их можно интегрировать с большим шагом.

Уравнения Энке получаются очень просто. Мы должны всего лишь из возмущенных уравнений вычесть невозмущенные уравнения. В итоге получаем уравнения в возмущениях, где $\mathbf{x}_{\mathrm{K}}$ — известное кеплеровское решение.

Однако возникает проблема вычитания близких величин и ее нужно как-то решать. Способов довольно много, но мы не будем останавливаться на них. В результате уравнения Энке можно записать в виде (см. слайд).

12

Если не решать проблему вычитания близких величин, то уравнения Энке можно представить следующим образом (см. слайд). Даже непроницательный механик увидит в этой записи уравнения относительного движения. Действительно, возмущения можно рассматривать как координаты в некоторой неинерциальной системе координат, которая поступательно движется по заданной кеплеровской орбите. В этом случае второй кеплеровский член будет выступать в роли инерциальной силы.

Такой взгляд на метод Энке обосновывает известное правило: координатные системы должны выбираться вблизи исследуемого объекта. То есть мы должны проводить исследование по возможности в более интимных условиях. Если мы исследуем спутниковое движение, то координатная система должна быть помещена в центр планеты, а не в центр Солнца или Галактики. Если мы исследуем сближение астероида с планетой, то резонно перейти от гелиоцентрической системы координат к планетоцентрической системе.

Стабилизация Баумгарта

13

Стабилизация применяется для того, чтобы ослабить влияние ляпуновской неустойчивости на численный процесс.

Из формул задачи двух тел, нетрудно показать, что для отклонения двух близких кеплеровских орбит справедлива оценка (см. слайд), где ΔH — разность их энергий. Мы видим, что со временем отклонение будет увеличиваться, т.е. орбиты будут разбегаться друг от друга. Это, кстати, и говорит о том, что кеплеровские орбиты не устойчивы. Кроме того, чем больше ΔH, тем быстрее разбегание. С другой стороны, если ΔH равно нулю, то разбегания не будет вообще. Получается, что ΔH — это сердце неустойчивости.

Данная оценка также справедлива, если в качестве первого решения взять точное, а в качестве второго — численное (ошибочное) решение. В этом случае оценка подсказывает нам, как нужно бороться с неустойчивостью. Мы просто не должны допускать появления ΔH, которое обычно имеет место из-за ошибок интегрирования. Для этого достаточно удерживать численное решение на энергетической поверхности точного решения в фазовом пространстве.

С этой целью Баумгарт вводит в дифференциальные уравнения искусственные возмущающие силы, призванные как раз удерживать решение на интегральной поверхности. Здесь на слайде показаны его уравнения в общем виде (см. слайд), для произвольных интегралов, а в нашем случае они принимают вид (см. слайд).

Неприятная особенность этих уравнений является то, что они содержат неопределенный параметр γ, который до численного эксперимента не известен. Хотя мною экспериментально установлено, что в слабовозмущенном движении этот параметр должен быть равен среднему движению. В ином случае его приходится выбирать опытным путем по достижению наилучших результатов.

Временная стабилизация

14

Стабилизировать уравнения можно другим способом. Я называю эту стабилизацию временной.

Влияние неустойчивости таково, что главная составляющая ошибки направлена вдоль траектории. То есть мы получаем как бы истинное решение, но в другом времени, не в том времени, которое нам нужно. Вот такая теория относительности! Так вот идея временной стабилизации заключается в том, чтобы отслеживать это время. Чтобы знать в каком времени мы получаем решение. Для этого нам нужно просто дополнить систему еще одним уравнением. При этом сами уравнения движения не подвергаются какимлибо изменениям и, кроме того, они не имеют каких-либо неопределенностей как в стабилизации Баумгарта.

Метод Накози

15

Стабилизацию можно проводить иным способом. Можно просто после выполнения стандартной процедуры интегрирования на шаге тем или иным способом возвращать численное решение на интегральную поверхность. Такой способ впервые предложил Накози еще в 1971 г. для моделирования задачи N-тел. Хотя лет десять спустя метод был открыт заново в классической механике и, насколько мне известно, до сих пор никто из механиков на Накози не ссылается. Следует добавить, что развитие идеи Накози в небесной механике можно найти в работах Мерисона и в последних работах Фукушимы.

Метод вариации постоянных

16

Это известный метод, который изначально применялся в теории общих возмущений. Хотя он широко используется и при численном моделировании. Коротко напомню идею метода.

Кеплеровскую орбиту формально можно представить в следующем виде, где **c** — некоторые постоянные величины. Ими могут быть элементы орбиты, какие-либо интегральные параметры, как, впрочем, и начальные координаты и скорости. В методе вариации постоянных возмущенная орбита также представляется в кеплеровском виде с той лишь разницей, что компоненты вектора **c** здесь рассматриваются как переменные, описываемые своими дифференциальными уравнениями. Цель метода как раз и состоит в том, чтобы получить эти дифференциальные уравнения.

В слабовозмущенном движении **c** — медленноменяющиеся переменные, поэтому их дифференциальные уравнения будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения.

Вы, конечно же, знаете уравнения в кеплеровских элементах. С вычислительной точки зрения они неудобны тем, что их правые части довольно сложны, много тригонометрических функций и, кроме того, они имеют особенность для нулевых наклонений и эксцентриситетов.

Хотя есть уравнения, не имеющие этих недостатков, но они, почему-то, мало кому известны. Я говорю об уравнениях Роя. Здесь в качестве интегрируемых переменных взяты вектор момента количества движения, вектор Лапласа и истинная долгота.

Численные результаты

17

Чтобы продемонстрировать эффективность методов, я эксклюзивно для данной конференции провел ряд численных экспериментов. Методы были исследованы в двух задачах: в спутниковой задаче, на примере Фобоса, спутника Марса; и в астероидной задаче, на примере Фаэтона. Первая задача — слабовозмущенная, вторая — сильновозмущенная. В обоих случаях исследовалась долгосрочная динамика, до десятка тысяч оборотов.

18

Для орбит объектов были построены численные модели, основанные на следующих уравнениях (см. слайд). Все эти уравнения интегрировались методом Эверхарта 15-го порядка и методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

19

Что же мы исследовали? Мы варьировали шаг интегрирования и методом прямого и обратного интегрирования получали глобальную ошибку и число выполненных шагов. Таким образом, мы получили соответствие между точностью и объемом вычислений.

Эти зависимости и приводятся в качестве численных результатов. Рассмотрим, что же представляет собой характеристика точность-быстродействие.

20

Характеристика точность-быстродействие — это показательная характеристика эффективности численного моделирования. Все характеристики представляют собой подобную кривую (см. слайд), которую условно можно поделить на две части. Первая определяется методическими ошибками (ошибками усечения), вторая — ошибками округления. Если бы ошибок округления не было, то характеристика продолжала бы убывать с увеличением объема вычислений и с уменьшением шага. На самом деле, достигая некоторого уровня, характеристика затем снова начинает медленно возрастать, и это возрастание сопровождается случайными всплесками: кстати, это поведение как раз обусловлено влиянием ошибок округления.

Как анализировать эффективность по данным характеристикам? Очень просто: чем левее и ниже характеристика, тем эффективнее численное моделирование.

21–24

(Имп.)

Таким образом, из анализа характеристик следует вывод: KS is the best!

Рекомендации по использованию

25

Теперь несколько слов о прикладном значении предлагаемых методов: когда же имеет смысл их использовать?

1. Прежде всего, когда **P** — сложная функция. Как, например, в задачах динамики ИСЗ, или при моделировании близких спутников планет, когда приходится учитывать тонкие эффекты.
2. Если мы интегрируем орбиту на длительном интервале времени порядка 100 об. и больше.
3. Если необходимо интегрировать большие совокупности объектов. Например, для численного представления областей возможных движений в виде ансамбля частиц.
4. Методы могут быть полезны для высокоточного представления орбитального движения. Я имею в виду, когда необходима точность, которую могут обеспечить методы Энке.
5. В задачах, объединяющих особенности 1., 2., 3. и 4. Характерной задачей здесь является моделирование космического мусора на длительных интервалах времени.

Построение начальных областей возможных движений

26

При моделировании орбитального движения небесных тел и их идентификации важно знать не только сами динамические параметры, получаемые из наблюдений, но также их возможные значения, обусловленные неопределенностью из-за ошибок наблюдений. Вероятностные области обычно определяются известным методом наименьших квадратов по МНК-оценкам и по матрице ковариации. В последнее время методы построения таких вероятностных областей интенсивно разрабатывались Милани и Черницовым.

27

Какие же основные трудности возникают при построении вероятностных областей?

Первая трудность — отсутствие достаточной информации о движении, что имеет место при наблюдении объекта на короткой дуге. В этом случае из-за большой обусловленности и больших вероятностных областей линейные оценки метода наименьших квадратов будут недостоверными и эллипсоидальные области, построенные по ковариационной матрице, будут сильно отличаться от вероятностного разброса МНК-оценок. Поэтому построение вероятностных областей по ковариационным матрицам может быть в этом случае некорректным.

Вторая трудность — наличие больших систематических ошибок. Такие ошибки могут быть как в наблюдательных данных, так и в численной модели. Последние обусловлены неполным учетом моделируемых возмущений, а также ошибками интегрирования. Данная трудность проявляется в том, что МНК-оценки вместе с вероятностной областью сильно смещаются относительно истинных решений. Что опять таки же приводит к неверному построению вероятностной области по ковариационной матрице.

28

Что было сделано нами в разрешение указанных трудностей?

1. Разработан алгоритм для определения степени нелинейности МНК-оценок. Алгоритм основан на анализе отклонений значений целевой функции на вероятностном эллипсоиде. Напомню, в линейном случае отклонения равны нулю.
2. Показано, что достоверность ковариационной матрицы существенно зависит от состава оцениваемых параметров, в пространстве которых она была определена. Экспериментально мы обнаружили, что в определенном смысле наилучшим является фазовое пространство прямоугольных координат и их скоростей.
3. Из экспериментов мы также обнаружили, что вероятностные эллипсоиды чаще всего имеют только пару (диаметрально противоположных) аномальных вершин. Путем деформации эллипсоида вдоль этих вершин можно существенно приблизить его к уровенной поверхности по целевой функции. В процессе данной процедуры удается получить новую ковариационную матрицу, которая естественно будет обладать лучшей достоверностью. По ней в дальнейшем и строится новая вероятностная область.
4. Оценена допустимая систематическая ошибка, при которой смещение вероятностной области несущественно и эта область еще может включать в себя истинное решение. Эта ошибка не должна превышать 20% от случайной ошибки.

Численные методы

30

Что касается численных методов, то в данном направлении за последнее время, на мой взгляд, не было сделано что-либо существенного. Мне бы хотелось только выделить два типа численных методов, которые сейчас довольно интенсивно развиваются в приложении к небесно-механическим задачам, главным образом, для моделирования долговременной орбитальной эволюции.

Первый тип — это широко применяемые на практике симплектические методы интегрирования. Любой численный метод можно рассматривать как отображение начальных переменных на текущие в заданный момент времени. Так вот симплектические интеграторы строятся на основе канонических отображений и применяются, как правило, к каноническим системам. Их специфика состоит в том, что они сохраняют каноническую структуру формализованного движения, что позволяет сохранять Гамильтониан системы, в качестве которого обычно выступает интеграл энергии. Эти методы хорошо всем известны и по теории этих методов написано масса статей.

Второй тип — это симметрические интеграторы. Они редко применяются на практике, и это, со слов Фукушимы, объясняется тем, что они были в свое время плохо разрекламированы. Хотя все их основные достоинства раскрываются именно в решении задач небесной механики. Как это показано в теории и подтверждается на практике, особенность этих методов состоит в том, что они позволяют сохранять не только интеграл энергии, но и другие интегралы как, например, интеграл Лапласа, или момент количества движения.