ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ БЛИЗКИХ СПУТНИКОВ

□

В последнее время возобновился интерес к исследованию орбит близких спутников, и это главным образом обусловлено тем, что сейчас появилось довольно много новых спутниковых наблюдений.

□

Когда мы только приступили к построению динамических моделей спутников с использованием наблюдений, мы сразу натолкнулись на ряд серьезных и неожиданных для нас проблем, которым тогда не могли найти вразумительного объяснения. Сначала для некоторых спутников нам никак не удавалось получить орбитальные параметры: мы действовали в рамках метода наименьших квадратов и для поиска решения использовали известный метод Гаусса–Ньютона. Так вот, итерационный процесс метода иногда просто не сходился. Затем, что нас вообще повергло в шок, мы обнаружили, что в некоторых случаях обратная задача может иметь множество решений.

Впоследствии мы, конечно же, поняли в чем тут дело. Сейчас я бы хотел рассказать об этих проблемах, и на простых примерах попытаюсь раскрыть их причины.

□

Допустим, мы имеем некоторые положения спутника, которые определяются моделью его орбиты. Здесь …, E — быстрая переменная, определяющая положение спутника на орбите, причем модель периодична по E.

Введем среднеквадратическую величину разностей вычисляемых и заданных положений спутника, и рассмотрим ее как функцию скорости быстрой переменной. Поскольку модель периодична по быстрой переменной, то отклонения положений будут также периодичны по ее скорости. Поэтому среднеквадратическая величина должна иметь множество минимумов по n. Следовательно, если мы будем определять параметр n путем минимизирования среднеквадратической величины, то получим множество оценок.

На практике используют подобные модели и подобные целевые функции для определения орбитальных параметров, причем среди них, так или иначе, есть такие, которые связаны со скоростью обращения спутника. Поэтому проблема неоднозначного определения спутниковых орбит здесь также имеет место.

□

Рассмотрим теперь двухпараметрическое семейство круговых орбит. Первый параметр — большая полуось; второй — аномалия в эпоху. Оценим отклонение положений на двух орбитах в зависимости от вариаций в большой полуоси и начальной аномалии. Пусть одна из орбит представляет модельные положения спутника, вторая — наблюдаемые. Тогда на любой момент времени будем иметь следующую оценку.

🖱 Выберем, как и прежде, в качестве целевой функции среднеквадратическую величину позиционных отклонений. Наблюдения реальных спутников покрывают достаточно большие интервалы времени, поэтому нас будет интересовать случай, когда числа λ очень большие. Тогда поведение целевой функции будет характеризоваться, прежде всего, тригонометрической составляющей. Ее наличие, по сути, и объясняет проблему неоднозначного определения орбит.

□

Введем новую переменную, линейно связанную с отклонением в большой полуоси, и перепишем функцию F в несколько ином виде, более удобном для исследования. Представим некоторые примеры функции F. (…🖱 …)

Таким образом, если мы будем определять параметры α и β из условия минимума целевой функции, то вполне вероятно, что при использовании известных приближенных методов минимизации мы получим далеко не самые лучшие параметрические оценки. Все, конечно же, зависит от точности начальных приближений.

□

Исследование обратных задач спутниковой динамики усложняется еще и тем, что они сильно овражные. Это не трудно показать в круговом случае. В окрестности нулевых параметрических отклонений функцию F приближенно можно представить в виде квадратичной формы. Она показывает, что в окрестности нуля изолинии F будут близки к эллипсам. Отношение полуосей этих эллипсов вычисляется как отношение собственных чисел матрицы, составленной из коэффициентов квадратичной формы. Отсюда видно, что при больших числах λ отношение полуосей будет близко к коэффициенту κ_{11}, который, кстати, увеличивается пропорционально квадратам чисел λ. Таким образом, линии уровней функции F представляют собой очень вытянутые эллипсы, что говорит о сильной овражной топографии функции F.

□

Обратная задача спутниковой динамики состоит в нахождении орбитальных параметров спутника по его наблюдениям в рамках выбранной модели.

🖱 В действительности она сводится к минимизации некоторой целевой функции, характеризующей степень близости наблюдаемых и моделируемых положений спутника. Если спутник наблюдается в сферических координатах, то обычно используется следующая целевая функция.

□

Для минимизации целевой функции обычно прибегают к так называемому методу Гаусса–Ньютона, который от известного метода Ньютона отличается тем, что в нем игнорируются вторые производные.

🖱 Мы исследовали возможности метода на примере спутника Адрастея, где его движение относительно Юпитера определялось по формулам задачи двух тел. На основе модели мы получили положения спутника в моменты реальных наблюдений. Затем варьировали орбитальные параметры и по заданным положениям спутника проводили их уточнение, используя метод Гаусса–Ньютона. Результаты показаны на рисунке в плоскости a–e.

Вопреки привычному ожиданию мы получили россыпь различных решений. Они как раз соответствуют минимумам целевой функции, о чем, собственно, говорилось ранее. При этом следует заметить, что сходимость имела место далеко не всегда: только менее 0.1% решений сходились к соответствующему минимуму. Разумеется, большая часть из них сходились к минимумам, которые оказались внутри области варьируемых параметров.

☐

Впрочем, сходимость практически всегда может быть достигнута, если в схему Гаусса–Ньютона ввести малый коэффициент h, хотя с другой стороны это понижает скорость итерационного процесса. На рисунке показана сходимость решений для двух довольно грубых начальных приближений. При использовании оригинальной схемы Гаусса–Ньютона сходимость не достигается. Только при очень малых h мы будем иметь сходимость процесса, но для этого требуется огромное число итераций.

Очевидно, при уменьшении коэффициента, число итераций увеличивается.

☐

С целью повышения скорости сходимости можно совместно с методом Гаусса–Ньютона использовать другие итерационные методы. В нашем случае достаточно прибегнуть к известному методу градиентного спуска и к так называемому проекционному методу. Суть проекционного метода состоит в том, что решение, полученное методом Гаусса–Ньютона, впоследствии исправляется за его отклонение от энергетической поверхности, т.е. таким образом, чтобы сохранялось энергетическое соотношение спутника.

☐

Сначала применяется метод градиентного спуска, и решение стремительно сваливается в овраг. Затем применяется проекционный метод, и решение продвигается вдоль оврага к минимуму. Наконец, вблизи минимума итерационный процесс завершается применением схемы Гаусса–Ньютона. Таким образом, комплексный подход требует всего несколько десятков итераций.

☐

Следует ли теперь из этого, что нужно бить в набат и срочно пересматривать все имеющиеся теории близких спутников? Конечно же, нет. Однако всегда нужно быть начеку и помнить, что такие особенности имеют место в обратных задачах, и они могут возникнуть в самый неподходящий момент. Когда нужно быть настороже? Во-первых, если у вас имеются очень мало групп наблюдений и, во-вторых, если эти группы разнесены на достаточно большом интервале времени, за который спутник делает порядка 1000 и более оборотов. Как мы уже показали, наиболее опасная ситуация возникает в случае двух групп наблюдений. Тогда минимумы целевой функции располагаются очень плотно, и они почти равнозначны. Для этого случая мы получили грубую оценку, которая показывает, при каких условиях реально на практике можно столкнуться с множеством решений.