

МЕТОД СИНХРОННОГО СЛЕЖЕНИЯ

Авдюшев В.А.

НИИ прикладной математики и механики при Томском университете

634050 г. Томск, пр. Ленина, 36

тел.(3822) 410576, факс (3822) 410347

E-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru

Существенный недостаток численных методов интегрирования дифференциальных уравнений связан с накоплением ошибки, в значительной степени обусловленной округлением. Этот недостаток, в свою очередь, усугубляется многошаговостью численного процесса, а также неустойчивостью дифференциальных уравнений.

В построении численного решения непосредственно участвуют функции правых частей дифференциальных уравнений. Именно они и являются первоисточником ошибок округления.

В общем случае можно выделить, по меньшей мере, две причины, которые влияют на точность вычисления какой-либо функции. Первая — это округление значения самой функции и вторая — округление ее аргументов.

Очевидно, что на компьютере с разрядной сеткой в N десятичных разрядов ошибка округления δx пропорциональна переменной x , в которой она паразитирует, т.е. $\delta x \approx \epsilon x$, где $\epsilon = 10^{-N}$. Поэтому, чем больше величина переменной, тем больше ее ошибка. Следовательно, для обеспечения высокой точности целесообразно при вычислении иметь дело с малыми величинами.

Уменьшение величины вычисляемых функций в дифференциальных уравнениях, по сути, означает кардинальное преобразование самих дифференциальных уравнений и является делом не столь простым. Ослабить влияние ошибок округления аргументов значительно проще, и это оказывается возможным при удачном выборе системы координат. Поясним на примере.

Пусть некоторое поле в разных неподвижных системах координат с началами в точках O и O^* задается функциями f и f^* , причем $f^*(x^*) = f(x)$, где x и x^* — векторы аргументов, вычисленные в разных координатных системах.

Ошибки в аргументах порождают ошибки в функциях как

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x, \quad \delta f^* = \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \delta x^*.$$

Тогда

$$|\delta f| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\delta x| = \delta \bar{f}, \quad |\delta f^*| \leq \left| \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \right| |\delta x^*| = \delta \bar{f}^*.$$

Поскольку градиенты $\partial f / \partial x$ и $\partial f^* / \partial x^*$ равны, то

$$\frac{\delta \bar{f}^*}{\delta \bar{f}} = \frac{|\delta x^*|}{|\delta x|} \approx \frac{|\epsilon x^*|}{|\epsilon x|} = \frac{r^*}{r}.$$

Здесь $r = |x|$ и $r^* = |x^*|$ — расстояния в разных системах координат до точки пространства, в которой определяется значение поля.

Отсюда следует, что для уменьшения ошибок аргументов систему координат необходимо помещать по возможности ближе к точкам определения.

Одной из центральных проблем в небесной механике является проблема исследования траекторий сближения. Дифференциальные уравнения, описывающие процессы сближения, характеризуются большими правыми частями. В связи с этим численное интегрирование таких уравнений сопряжено с существенной потерей точности.

Исходя из вышеизложенного, можно предположить, что сближение гравитирующих масс приводит к потере точности численного интегрирования отчасти и в значительной степени лишь потому, что слежение за ними ведется из удаленного местоположения. Таким образом, точность моделирования тесных сближений тем хуже, чем дальше от координатной системы они происходят.

Указанная проблема часто встает в астероидных задачах, когда сближение исследуемого объекта происходит с планетой достаточно удаленной от Солнца, центрального тела.

На практике основным приемом для сохранения точности решения является перенос системы координат [1]. Идея смены центра системы координат прозрачна и имеет математическое обоснование. Однако наряду с этим она сопряжена со следующими трудностями.

С математической точки зрения переход к новой координатной системе влечет за собой переход к качественно новому дифференциальному уравнению движения, иначе говоря, к новой задаче Коши. Как показывают экспериментальные данные, эти изменения заметно ухудшают точность численного решения. Кроме того, следует заметить, что кардинальные трансформации в динамике происходят при форсировании границ гравитационных областей. Для определения состояния динамической системы после тесных сближений такие трансформации часто требуют тщательного исследования и в этом случае переход к новой системе координат может стать весьма сомнительным.

Уравнения синхронного слежения. Для преодоления этих трудностей предлагается производить слежение за исследуемым объектом из разных пунктов одновременно (синхронно), а именно из гравитационных центров, участвующих в сближении.

С математической точки зрения это равносильно объединению дифференциальных уравнений движения, записанных в разных системах координат. Интересно, что в задаче двух неподвижных центров система уравнений синхронного слежения будет состоять из двойного набора уравнений с одинаковыми правыми частями. Однако при численном интегрировании они будут отправляться от разных начальных условий.

Разберем методику синхронного слежения детально применительно к задаче двух неподвижных центров. Дифференциальные уравнения движения бесконечно малой массы (тела) относительно системы координат, связанной с одним из двух гравитационных центров, будут иметь вид [2]

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{\mu_1}{r_1^3} x_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} (x_1 - x^*), \quad (1)$$

где x_1 — вектор положения третьего тела в принятой системе координат, x^* — вектор положения второго тела относительно первого (центрального), μ_1, μ_2 — гравитационные параметры первого и второго тел соответственно, причем $r_1 = |x_1|$ и $r_2 = |x_1 - x^*|$.

Уравнения движения той же задачи, но в системах координат синхронного слежения, запишутся как

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{\mu_1}{r_1^3} x_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} x_2, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{\mu_1}{r_1^3} x_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3} x_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь новая переменная x_2 — вектор положения третьего тела относительно второго.

Примечательная особенность уравнений-близнецов (2) в отличие от уравнений (1) состоит в том, что $r_2 = |x_2|$, а x_2 определяется как самостоятельное решение уравнений, хотя формально $x_2 = x_1 - x^*$. Введение дополнительных уравнений для x_2 таким образом позволяет точнее вычислять правые части всей системы уравнений, в особенности, когда третье тело входит в область сильного гравитационного влияния со стороны второго тела.

Численный эксперимент. Уравнения синхронного слежения были апробированы на трех модельных задачах плоского движения. Параметры движения в каждой задаче подбирались таким образом, чтобы обеспечить на исследуемом интервале времени достаточно тесные сближения с двумя фиксируемыми массивными центрами.

Первая задача — астероидная. В консервативном гравитационном поле Солнца и Юпитера моделировалось тесное сближение с планетой (Рис.1). Во второй и третьей задачах рассматривалось нерегулярное движение, обусловленное мощным влиянием сил притяжения двух Солнц (Рис.2). Для сравнения наряду с уравнениями синхронного слежения (2) (SW) использовались и уравнения, записанные относительно гелиоцентра (1) (G). Результаты эксперимента приведены в таблице. Здесь P_2 — второе тело (первое — Солнце), q_1, q_2 — минимальные расстояния при сближении с первым и вторым телами соот-

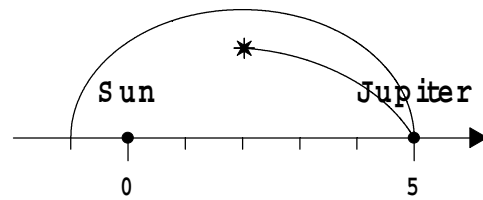


Рис.1. Сближение с Юпитером, $S = 1400$ сут.

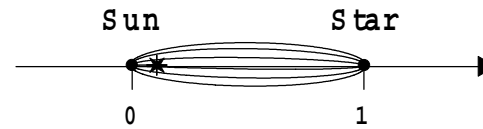


Рис.2. Движение в поле тяготения двух неподвижных Солнц, $S = 130$ сут.

ветственно, S — рассматриваемый временной интервал, а Δr — ошибки интегрирования.

Как показывают результаты эксперимента, точность численного решения SW-уравнений выше, чем для G-уравнений. Численное интегрирование уравнений астероидной задачи, выполненное только в гелиоцентрической системе, из-за ошибок в векторе положения после сближения с Юпитером теряет в точности до 3 десятичных знаков. В звездной задаче при краткосрочном моделировании, несмотря на то, что самое тесное сближение имело место с первым Солнцем, точность решения G-уравнений все же на порядок хуже, чем для SW-уравнений. При моделировании на более длительный период серия сближений со вторым Солнцем окончательно "забывает" численное решение ошибками, делая его, таким образом, непригодным для представления движения.

Таблица. Оценка точности интегрирования в разных координатных системах

P_2	S , сут.	q_1 , а.е.	q_2 , а.е.	Δr_G , а.е.	Δr_{SW} , а.е.
Юпитер	1400	1	$5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-12}$
Солнце	130	$4 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-10}$
Солнце	1300	$2 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-9}$

Расширение интегрируемой системы дифференциальных уравнений естественно понижает быстроту действия численного алгоритма. На основе оптимизированных вариантов программного обеспечения были оценены скоростные характеристики рассматриваемых численных алгоритмов. Оказалось, что методика синхронного слежения в сравнении с классическим подходом требует большего объема вычислений приблизительно в 1.6 раза, несмотря на то, что порядок получаемой системы уравнений удваивается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казимирчак-Полонская Е.И. Обзор исследований тесных сближений короткопериодических комет с Юпитером (1770–1960) // Труды Института теоретической астрономии. Л.: Изд-во АН СССР, 1961. Вып. 7. С. 19–190.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 800 с.