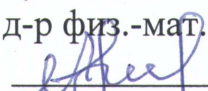


Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК

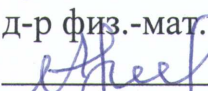
Руководитель ООП  
д-р физ.-мат. наук  
 В. А. Авдюшев  
« 6 » июня 2019 г.

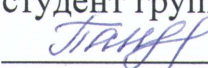
**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

**ЭФФЕКТ ЛИДОВА–КОЗАИ И КОНФИГУРАЦИОННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ  
ПОЧТИ КРУГОВОГО ДВИЖЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ  
ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**

по основной образовательной программе подготовки бакалавров  
направление подготовки 09.03.02 – Информационные системы и технологии

Пантелеева Ярослава Игоревна

Руководитель ВКР  
д-р физ.-мат. наук  
 В. А. Авдюшев  
*подпись*  
« 6 » июня 2019 г.

Автор работы  
студент группы № 05576  
 Я.И. Пантелеева  
*подпись*

Томск – 2019

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ООП

д-р физ.-мат. наук

Авдюшев В.А. 

15 сентября 2018 г.

**ЗАДАНИЕ**

по подготовке ВКР бакалавра студенту Пантелеевой Я.И. группы № 5576

1. Тема ВКР «Эффект Лидова–Козаи и конфигурационная устойчивость почти кругового движения в ограниченной круговой задаче трех тел».
2. Срок сдачи студентом выполненной ВКР: июнь 2019 г.
3. Исходные данные к работе: теория Лидова–Козаи; теория методов Рунге–Кутты; задача двух тел.
4. Краткое содержание работы:  
Глава 1 — Механизм Лидова-Козаи в задаче трех тел;  
Глава 2 — Численное моделирование орбитального движения;  
Глава 3 — Алгоритм численной модели и ее программная реализация;  
Глава 4 — Численные результаты.
5. Организации, по заданию которых выполнялась работа:  
Томский государственный университет и НИИ прикладной математики и механики ТГУ.
6. Графический материал: 10 рисунков, 4 таблицы.
7. Дата выдачи задания: 15 сентября 2018 г.

Руководитель ВКР,  
д-р физ.-мат. наук



Авдюшев В. А.

Задание принял к исполнению  
студент группы № 5576



Пантелеева Я.И.

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа содержит 31 страницу, 10 рисунков, 4 таблицы, 7 источников.

Ключевые слова: эффект Лидова–Козаи, ограниченная круговая задача трех тел, конфигурационная устойчивость, почти круговое движение.

В работе численно исследуется эффект Лидова–Козаи в ограниченной круговой задаче трех тел. На основе результатов численного моделирования орбитального движения выявлены условия проявления эффекта Лидова–Козаи, вызывающего большие возмущения в эксцентриситете и наклонении орбиты внутреннего тела, а также, как следствие, конфигурационную неустойчивость почти кругового движения. Определены критические значения параметров возмущающей силы от внешнего тела, которые приводят к неотложному выбросу внутреннего тела из орбитальной системы, в том числе вследствие эффекта Лидова–Козаи при умеренных возмущениях.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

|  |    |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 3  |
| 1. МЕХАНИЗМ ЛИДОВА – КОЗАИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ .....   | 4  |
| 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ .....                                       | 6  |
| 2.1. Дифференциальные уравнения орбитального движения  | 6  |
| 2.2. Метод Рунге–Кутты 6-го порядка для численного интегрирования дифференциальных уравнений | 7  |
| 2.3. Орбитальная и конфигурационная устойчивость   | 8  |
| 2.4. Определение орбитальных элементов   | 9  |
| 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ И ЕЁ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ .....                               | 10 |
| 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ .....  | 14 |
| 4.1. Постановка эксперимента   | 14 |
| 4.2. Описание и анализ результатов   | 16 |
| 4.3. Частные задачи  | 20 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....   | 25 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ .....   | 26 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ (ТЕКСТ ПРОГРАММЫ) .....   | 27 |

## ВВЕДЕНИЕ

В слабовозмущенных динамических системах вполне обоснованно ожидать малые отклонения возмущенных динамических состояний относительно невозмущенных. Однако в частных случаях при определенных особых условиях даже очень слабые возмущающие факторы способны существенно изменить динамическую картину.

В небесной механике таким характерным примером является эффект Лидова–Козаи. Это явление имеет место в задаче трех тел, когда исследуемое внутреннее небесное тело возмущается внешним массивным телом при условии, если угол между их орбитальными плоскостями превышает некоторое критическое значение. Эффект Лидова–Козаи вызывает долгопериодические изменения эксцентриситета и наклона орбиты, при этом, чем больше угол между орбитальными плоскостями небесных тел, тем значительнее возмущения в орбитальных элементах.

Даже при слабом воздействии внешнего массивного тела механизм Лидова–Козаи способен вызвать настолько большие значения эксцентриситета, которые могут привести к катастрофическому столкновению возмущаемого небесного тела с центральным. Этот вопрос сейчас весьма актуальный при проектировании космического полета, в особенности в задачах моделирования орбит околоземных и окололунных космических аппаратов.

Целью выпускной работы было исследование орбитальной динамики в ограниченной круговой задаче трех тел. В частности рассматривался вопрос о поиске конфигурационно устойчивых круговых орбит, а также о возникновении условий экстремальных возмущений, вызываемых механизмом Лидова–Козаи. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи: 1) освоить основные положения теории Лидова–Козаи; 2) составить алгоритм численного моделирования орбитальной динамики ограниченной круговой задачи трех тел; 3) разработать программное обеспечение на основе численного моделирования для исследования орбитальной динамики; 4) провести численный эксперимент по выявлению конфигурационно устойчивых круговых орбит; 5) выполнить анализ численных результатов.

## 1. МЕХАНИЗМ ЛИДОВА – КОЗАИ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Механизм Лидова–Козаи [1–4] является особенностью иерархических тройных систем небесных тел, где одно из тел (внешнее возмущающее) расположено далеко от двух других (внутреннего возмущаемого и центрального). Для исследования динамики таких систем часто применяют методы теории возмущений. Чтобы упростить задачу и сделать ее более удобной для вычислений, обычно прибегают к двойному усреднению уравнений движения по быстро меняющимся средним аномалиям внутреннего и внешнего тел.

Ограниченная задача трех тел предполагает, что внутреннее тело имеет бесконечно малую массу. Поэтому ее решение может быть пригодным для приближенного описания движения искусственных спутников Земли, которые возмущаются Луной, или короткопериодических комет, которые возмущаются Юпитером.

Если внешнее возмущающее тело движется по круговой орбите, усредненные уравнения движения возмущаемого тела имеют сохраняющуюся величину (интеграл Лидова–Козаи) — третью компоненту орбитального углового момента. Она может быть выражена через эксцентриситет  $e$  и наклонение  $I$  относительно орбитальной плоскости внешнего тела:

$$L = (1 - e^2) \cos^2 I = \text{const}. \quad (1)$$

Сохранение  $L$  означает, что орбитальный эксцентриситет можно «обменять» на наклонение. Таким образом, почти круговые и сильно наклоненные орбиты могут стать очень эксцентричными, а поскольку увеличение эксцентриситета при сохранении большой полуоси уменьшает расстояние между объектами в перигентре, то механизм Лидова–Козаи способен привести к столкновению малого тела с центральным.

Эффект Лидова–Козаи — это вековое явление, которое проявляется во временных масштабах значительно дольше по сравнению с орбитальными периодами внутреннего и внешнего небесных тел, и он проявляется как долгопериодические изменения эксцентриситета и наклонения орбиты с чрезвычайно большими амплитудами. При этом, чем больше (начальное) наклонение, тем значительнее возмущения в орбитальных элементах.

Колебания Лидова–Козаи имеют место, если наклонение  $I$  больше критического значения

$$I_c = \arccos \sqrt{3/5} \approx 39.2^\circ \quad (2)$$

и меньше  $180^\circ - I_c$ . В этих случаях существует  $L$ -параметрическое семейство орбитальных решений с долгопериодическими величинами  $e$  и  $I$ . Сле-

дует заметить, что критическое значение зависит от отношения больших полуосей внутреннего  $a$  и внешнего  $a_p$  небесных тел. Значение (2) соответствует бесконечно малому отношению. Однако если его устремить к единице, критическое значение уменьшится вплоть до  $I_C \approx 20^\circ$  [2].

Период колебаний Лидова–Козаи (период Козаи) в оборотах внутреннего тела задается формулой [4]

$$T_{LK} \approx \frac{a_p^3}{a^3} \frac{\mu + \mu_p}{\mu_p}, \quad (3)$$

где  $\mu$  и  $\mu_p$  — гравитационные параметры центрального и внешнего тел, а  $a$  и  $a_p$  — большие полуоси внутреннего и внешнего тел. Как видно, период Козаи (в среднем) обратно пропорционален прямому гравитационному влиянию внешнего тела. При уменьшении гравитационного параметра  $\mu_p$  и при увеличении большой полуоси  $a_p$  период Козаи увеличивается, хотя эффект Лидова–Козаи сохраняется.

Амплитуду изменения эксцентриситета, его максимальное значение при начальном нулевом, можно оценить как [4]

$$e_{\max} \approx \sqrt{1 - \frac{5}{3} \cos^2 I_{\max}}, \quad (4)$$

где максимальное значение наклона  $I_{\max}$  фактически является его начальным значением  $I_0$ . Формула (4) дает достаточно хорошую оценку, в особенности для больших максимальных значений эксцентриситета, хотя справедлива она лишь для больших наклонов  $I_{\max} > I_C$ .

Из интеграла (1) и формулы (4) можно оценить минимальное значение наклона  $I_{\min}$ . В частности, если внутреннее небесное тело стартует на круговой орбите, то оказывается, что  $I_{\min} = I_C$ . Таким образом, наклонение либрирует в диапазоне  $I \in [I_C, I_0]$ .

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 2.1. Дифференциальные уравнения орбитального движения

Будем рассматривать движение малого (внутреннего) тела  $P_2$  с бесконечно малой массой в гравитационном поле двух массивных тел  $P_1$  (центрального) и  $P_3$  (внешнего) с массами 1 и  $\mu_p$  соответственно (Рис. 1). При этом внешнее тело  $P_3$  движется относительно центрального  $P_1$  по круговой кеплеровской орбите. Внутреннее тело  $P_2$  в начальный момент времени  $t_0 = 0$  стартует на круговой орбите (эксцентриситет  $e = 0$ ) единичного радиуса (большая полуось  $a = 1$ , орбитальный период  $T = 2\pi$ ) вдоль основной координатной плоскости (наклонение  $I = 0^\circ$ ).

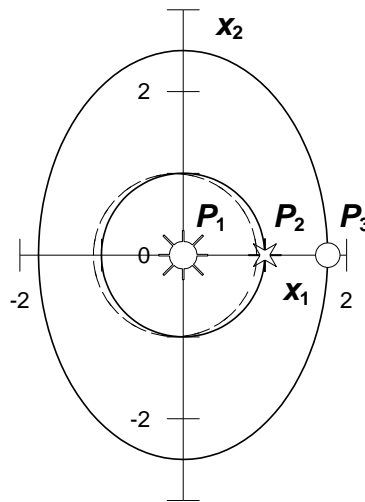


Рис. 1. Движение внутреннего тела  $P_2$  в гравитационном поле двух массивных тел  $P_1$  (центрального) и  $P_3$  (внешнего):  $a_p = 2.5$ ,  $\psi_p = 45^\circ$ . Пунктиром показана возмущенная эллиптическая орбита с эксцентриситетом  $e = 0.1$

Тогда движение внутреннего тела  $P_2$  относительно центрального  $P_1$  в прямоугольной системе координат (с неподвижными осями) будет описываться дифференциальными уравнениями [6]

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3} \equiv \mathbf{F}$$

или

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (5)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)^T, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = (0, 1, 0)^T, \quad t_0 = 0.$$



Здесь  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  и  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$  — векторы положения и скорости внутреннего тела соответственно;  $t$  — время, а  $\mathbf{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, x_{p3})^T$  — вектор положения возмущающего тела  $P_3$ , которое движется по круговой кеплеровской орбите радиуса  $a_p$  с наклоном  $\psi_p$ :

$$x_{p1} = a_p \cos \varphi \cos \psi_p, \quad x_{p2} = a_p \sin \varphi, \quad x_{p3} = a_p \cos \varphi \sin \psi_p,$$

$$\varphi = n_p t, \quad n_p = \sqrt{(1 + \mu_p)/a_p^3}.$$

## 2.2. Метод Рунге–Кутты 6-го порядка для численного интегрирования дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения орбитального движения (5) интегрируются численно явным семистадийным методом Рунге–Кутты 6-го порядка с постоянным шагом.

Представим уравнения (5) как

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}) \quad (6)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad t_0 = 0,$$

где  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T$ , а  $\mathbf{Q} = (\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{F})^T$ .

Применительно к уравнениям (6) схема интегрирования метода Рунге–Кутты с шагом  $h$  имеет вид [7]

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_0 + h \sum_{i=1}^7 b_i \mathbf{k}_i,$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{Q}(t_0, \mathbf{q}_0), \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{Q}\left(t_0 + hc_i, \mathbf{q}_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j\right) \quad (i = 2, \dots, 7). \quad (7)$$

Здесь  $a_{ij}$  ( $i = 2, \dots, 7; j = 1, \dots, i-1$ );  $b_i, c_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) — коэффициенты метода.

Их значения можно представить в виде таблицы Бутчера [5]

|          |          |          |          |          |       |
|----------|----------|----------|----------|----------|-------|
| 0        |          |          |          |          |       |
| $c_2$    | $a_{21}$ |          |          |          |       |
| $c_3$    | $a_{31}$ | $a_{32}$ |          |          |       |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ |          |       |
| $c_7$    | $a_{71}$ | $a_{72}$ | $\dots$  | $a_{76}$ |       |
|          | $b_1$    | $b_2$    | $\dots$  | $b_6$    | $b_7$ |

как

|               |                   |                  |                  |                   |                  |                 |                  |
|---------------|-------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 0             |                   |                  |                  |                   |                  |                 |                  |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$     |                  |                  |                   |                  |                 |                  |
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{9}$     | $\frac{4}{9}$    |                  |                   |                  |                 |                  |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{7}{36}$    | $\frac{2}{9}$    | $-\frac{1}{12}$  |                   |                  |                 |                  |
| $\frac{5}{6}$ | $-\frac{35}{144}$ | $-\frac{55}{36}$ | $\frac{35}{48}$  | $\frac{15}{8}$    |                  |                 |                  |
| $\frac{1}{6}$ | $-\frac{1}{360}$  | $-\frac{11}{36}$ | $-\frac{1}{8}$   | $\frac{1}{2}$     | $\frac{1}{10}$   |                 |                  |
| 1             | $-\frac{41}{260}$ | $\frac{22}{13}$  | $\frac{43}{156}$ | $-\frac{118}{39}$ | $\frac{32}{195}$ | $\frac{80}{39}$ |                  |
|               | $\frac{13}{200}$  | 0                | $\frac{11}{40}$  | $\frac{11}{40}$   | $\frac{4}{25}$   | $\frac{4}{25}$  | $\frac{13}{200}$ |

### 2.3. Орбитальная и конфигурационная устойчивость

В теории динамических систем под орбитальной устойчивостью понимают устойчивость фазовой траектории динамической системы к вариациям ее начального динамического состояния.

Пусть  $\mathbf{q}^*(t)$  — решение системы дифференциальных уравнений (6), близкое к исходному  $\mathbf{q}(t)$ , с начальными условиями  $\mathbf{q}^*(t_0) = \mathbf{q}(t_0) + \delta\mathbf{q}_0$ , где  $\delta\mathbf{q}_0$  — малая вариация начального динамического состояния  $\mathbf{q}_0$ . Тогда, согласно определению, фазовая траектория  $\mathbf{q}(t)$  является орбитально устойчивой, если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\delta > 0$  что, если  $\|\delta\mathbf{q}_0\| < \delta$ , то  $\min_{\tau} \|\mathbf{q}^*(t) - \mathbf{q}(t + \tau)\| < \varepsilon$ .

В работе мы исследуем конфигурационную устойчивость почти кругового движения, которая подобна орбитальной. Под конфигурационной устойчивостью мы понимаем устойчивость формы почти круговой орбиты к влиянию возмущающей силы от внешнего тела  $P_3$ , т.е.

$$\mathbf{P}(\mu_P, a_P, \psi_P) = -\mu_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} - \mu_P \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}, \quad (8)$$

а точнее к ее параметрам  $\mu_P, a_P, \psi_P = I$ . В качестве характеристики конфигурационной устойчивости мы рассматриваем эксцентриситет орбиты внутреннего небесного тела  $e$ . Пусть  $e^*$  — критическое значение эксцентриситета, при котором можно считать, что орбита значительно отличается от круговой. Тогда, если  $e < e^*$  для любых моментов времени  $t$  будем считать, что круговое движение внутреннего тела конфигурационно устойчиво, в противном случае — нет.

## 2.4. Определение орбитальных элементов

При численном моделировании на каждом шаге интегрирования из вектора динамического состояния  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T$  внутреннего тела вычисляем его кеплеровские позиционные элементы: большая полуось  $a$ , эксцентриситет  $e$  и наклонение  $i$ . Сводка формул для вычисления орбитальных элементов приводится ниже.[6]

Для каждого вектора динамического состояния  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T$  сначала находим радиус-вектор  $r$  и величину скорости  $v$ :

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad v = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2},$$

а также энергию

$$H = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{r}.$$

Затем вычисляем постоянные интеграла площадей

$$c_1 = x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2, \quad c_2 = x_3 \dot{x}_1 - x_1 \dot{x}_3, \quad c_3 = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1, \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Наконец, определяем орбитальные элементы из соотношений

$$a = -\frac{1}{2H}, \quad e = \sqrt{2Hc^2 + 1}, \quad i = \arccos \frac{c_3}{c}.$$

### 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ И ЕЕ ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Численная модель орбитального движения реализована программно на процедурном языке Фортран в арифметике с двойной точностью. Опишем структуру разработанной программы (см. Приложение, Таблица 1).

Вначале инициализируются требуемые для интегрирования коэффициента  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  метода Рунге–Кутты, задаются начальные условия: постоянный шаг интегрирования  $h=\pi^2/n$ ,  $n=512$ , вектор положения и скорости внутреннего тела

$$\begin{aligned}x &= 0d0, \\x(1) &= 1d0, x(2) = 0d0, x(3) = 0d0, \\x(4) &= 0d0, x(5) = 1d0, x(6) = 0d0,\end{aligned}$$

и время  $t=0d0$ . А также определяются параметры внешнего возмущающего тела: гравитационный параметр  $dmp$ , большая полуось  $ap$  и начальное наклонение  $psi$ , они варьируются в следующем диапазоне значений:

$$dmp=2^{-2i} (i=-3, \dots, 5), ap=2^j (j=1, \dots, 4), psi=5k (k=0, \dots, 36),$$

и задается формула для вычисления периода Козаи:  $T_k=ap^{*3}/dmp$ .

По формулам, описанным в разделе 2.4, рассчитываются позиционные орбитальные элементы внутреннего тела  $Kepler(x(1:6), sma, ecc, di)$ : большая полуось  $sma$ , эксцентриситет  $ecc$  и наклонение  $di$  и по полученным значениям элементов вычисляется интеграл Лидова–Козаи:

$$dl0=(1d0-ecc^{*2}) * dcos(di) **2$$

Затем выполняется численное интегрирование дифференциальных уравнений движения (5) явным методом Рунге–Кутты 6-го порядка с постоянным шагом на интервале 10000 оборотов и вычисляются векторы положения и скорости  $x(6)$  внутреннего тела.

После интегрирования из векторов положения и скорости внутреннего тела вычисляются его кеплеровские позиционные элементы  $sma, ecc, di$ , по найденным значениям орбитальных элементов вычисляются значения интеграла Лидова–Козаи:

$$dl=(1d0-ecc^{*2}) * dcos(di) **2.$$

Далее находятся среднеквадратические отклонения значений интеграла Лидова–Козаи:

$$sum=sum+(dl-dl0) **2$$

и определяются экстремальные значения орбитальных элементов внутреннего тела:

$$ecc\_max, sma\_max, sma\_min, di\_max, di\_min,$$

а также первое превышение эксцентриситета орбиты внутреннего тела критического значения  $ecc=0.2$ :

$$if (ecc>0.2.and.key==0) key=1,$$

при этом регистрируется период слабой эллиптичности:

$$T_c=dfloat(nrev) ..$$

Интегрирование останавливается, если эксцентриситет возвращается к малым значениям  $ecc<0.2$  или если  $ecc>1$ :

$$if ((ecc<0.2.and.key==1).or.ecc>1d0) exit .$$

После интегрирования находится среднее значение интеграла Лидова–Козаи:

$$sred\_L=dsqrt(sum/dfloat(nrev)).$$

и в выходной файл выводятся значения переменных

$$ecc\_max, sma\_min, sma\_max, di\_min, di\_max, T_c, sred\_L, di0,$$

при условии, что  $ecc<1$ .

В таблице 1 приведены переменные программы и соответствующие им теоретические аналоги.

Таблица 1: Переменные и процедуры

| Переменные                                  |   | Описание   |
|---|---|--|
| Программа                                   | Теория  |  |
| x   | $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)^T$                                | Вектор искомых переменных  |
| y   | $\mathbf{q}_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j$           | Приближенное решение для вычисления правой части внутри шага для узлового значения $c_i$ |
| f1, ..., f7                                 | $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_7$                               | Правые части внутри шага для узловых значений $c_1, \dots, c_7$                          |
| f   | $\mathbf{Q}$  | Правая часть дифференциальных уравнений  |
| a21, ..., a76<br>b1, ..., b7<br>c1, ..., c7 | $a_{21}, \dots, a_{76}$<br>$b_1, \dots, b_7$<br>$c_1, \dots, c_7$ | Коэффициенты метода Рунге–Кутты 6-го порядка   |
| h   | $h$   | Величина шага  |
| nrev  | $[t/2\pi]$  | Количество оборотов  |

|                  |                      |   |
|------------------|----------------------|---|
| dmp              | $\mu_p$              | Гравитационный параметр внешнего тела                                       |
| ap               | $a_p$                | Большая полуось орбиты внешнего тела  |
| di0              | $\Psi_p$             | Наклонение внешнего тела  |
| T_k              | $T_{LK}$             | Период Козаи  |
| ecc_max          | $e_{\max}$           | Максимальное значение эксцентриситета внутреннего тела                      |
| sma_max(sma_min) | $a_{\max}(a_{\min})$ | Максимальное (минимальное) значение большой полуоси орбиты внутреннего тела |
| di_max(di_min)   | $i_{\max}(i_{\min})$ | Максимальное (минимальное) значение наклона орбиты внутреннего тела         |
| t                | $t$                  | Время   |
| dn               | $n$                  | Среднее движение внутреннего тела   |
| prd              | $T$                  | Орбитальный период внутреннего тела   |
| vel              | $v$                  | Скорость внутреннего тела   |
| dl0,dl           | $L$                  | Интеграл Лидова–Козаи   |
| Kepler           |                      | Процедура для вычисления кеплеровых элементов орбиты                        |
| sma              | $a$                  | Большая полуось орбиты внутреннего тела                                     |
| di               | $i$                  | Наклонение внутреннего тела   |
| ecc              | $e$                  | Эксцентриситет орбиты внутреннего тела                                      |
| c1,c2,c3,c       | $c_1,c_2,c_3,c$      | Постоянные интеграла площадей   |
| v2               | $v^2$                | Квадрат величины скорости   |
| r                | $r$                  | Радиус-вектор   |
| fun              |                      | Процедура вычисления правых частей дифференциальных уравнений движения      |
| dnp              | $n_p$                | Среднее движение внешнего тела по орбите                                    |

|        |   |  |
|--------|---|--|
| phi    | $\varphi$                                   | Средняя аномалия внешнего тела   |
| xp(3)  | $\mathbf{x}_p = (x_{p1}, x_{p2}, x_{p3})^T$ | Вектор положения внешнего тела   |
| r3     | $ \mathbf{x} ^3$                            | Модуль вектора положения внутреннего тела, возведенный в третью степень          |
| rp3    | $ \mathbf{x}_p ^3$                          | Модуль вектора положения внешнего тела, возведенный в третью степень             |
| rrp3   | $ \mathbf{x} - \mathbf{x}_p ^3$             | Модуль разности векторов положения внутреннего и внешнего тела в третьей степени |
| sred_L | $\bar{L}$                                   | Ср. кв. отклонение значений интеграла Лидова–Козаи                               |
| Tc     | $T_C$                                       | Период слабой эллиптичности  |

## 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

### 4.1. Постановка эксперимента

Для численного исследования эффекта Лидова–Козаи в ограниченной круговой задаче трех тел с целью определения условий задачи для конфигурационной устойчивости почти кругового движения мы провели численный эксперимент.

Мы выполняли численное моделирование орбит тройных систем на интервале времени  $N = 10000$  оборотов внутреннего тела ( $\Delta t = 2\pi \cdot 10000$ ) при различных значениях трех параметров возмущающей силы от внешнего тела  $\mu_p, a_p$  и  $\psi_p$  (8) в пределах

$$\mu_p \in [1/1024, 64], a_p \in [2, 16], \psi_p \in [0, 180^\circ]. \quad (9)$$

Моделирование выполнялось на основе дифференциальных уравнений движения (5), которые интегрировались методом Рунге–Кутты (7) в арифметике с двойной точностью с шагом, обеспечивающим методическую точность порядка  $10^{-6}$ .

Заметим, что обширные диапазоны параметрических значений (9) позволяют охватить широкий спектр задач динамической астрономии: от спутниковой орбитальной динамики до звездной, где доминирующее возмущающее влияние на внутреннее тело оказывает массивное внешнее. Например, параметры  $\mu_p = 1/81$  и  $a_p = 14.8$  приблизительно соответствуют динамике космического аппарата навигационной системы ГЛОНАСС под влиянием Луны;  $\mu_p = 1/1024$  и  $a_p = 1.86$  — орбитальному движению астероида главного пояса под влиянием Юпитера, а  $\mu_p = 1$  и  $a_p = 16$  — динамике экзопланеты внутри двойной звездной системы.

В процессе моделирования (через каждый оборот) оценивались экстремальные (минимальные и максимальные) значения орбитальных элементов внутреннего тела  $a, e, I$  (Рис. 2), а также период слабой эллиптичности  $T_C$  ( $e < 0.2$ ) и среднеквадратическое отклонение  $\Delta L$  значений интегрального соотношения  $L$  (1):

$$\Delta L^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (L_i - L_0)^2,$$

где  $i$  — номер оборота;  $L_0$  — начальное значение интеграла. При выбросе внутреннего тела из орбитальной системы (когда орбита объекта становится гиперболической) моделирование завершалось.



Для каждой пары  $\mu_p$  и  $a_p$  определялось общее состояние орбиты внутреннего тела на множестве всех значений наклона  $\psi_p$  в зависимости от показателя гравитационного влияния внешнего тела

$$\nu = \frac{\mu_p}{a_p^3} = T_{LK}^{-1}.$$

Рассматривались три состояния: 1) устойчивость (конфигурационная) для всех значений орбитального наклона; 2) устойчивость при малых наклонах вне диапазона  $[40^\circ, 140^\circ]$ , механизм Лидова–Козаи при больших наклонах приводит к выбросу внутреннего тела из орбитальной системы; 3) неустойчивость при любых наклонах ( $0.2 < e < 1$ ), либо гравитационное влияние внешнего тела приводит к неотложному выбросу внутреннего тела из орбитальной системы ( $e > 1$ ).

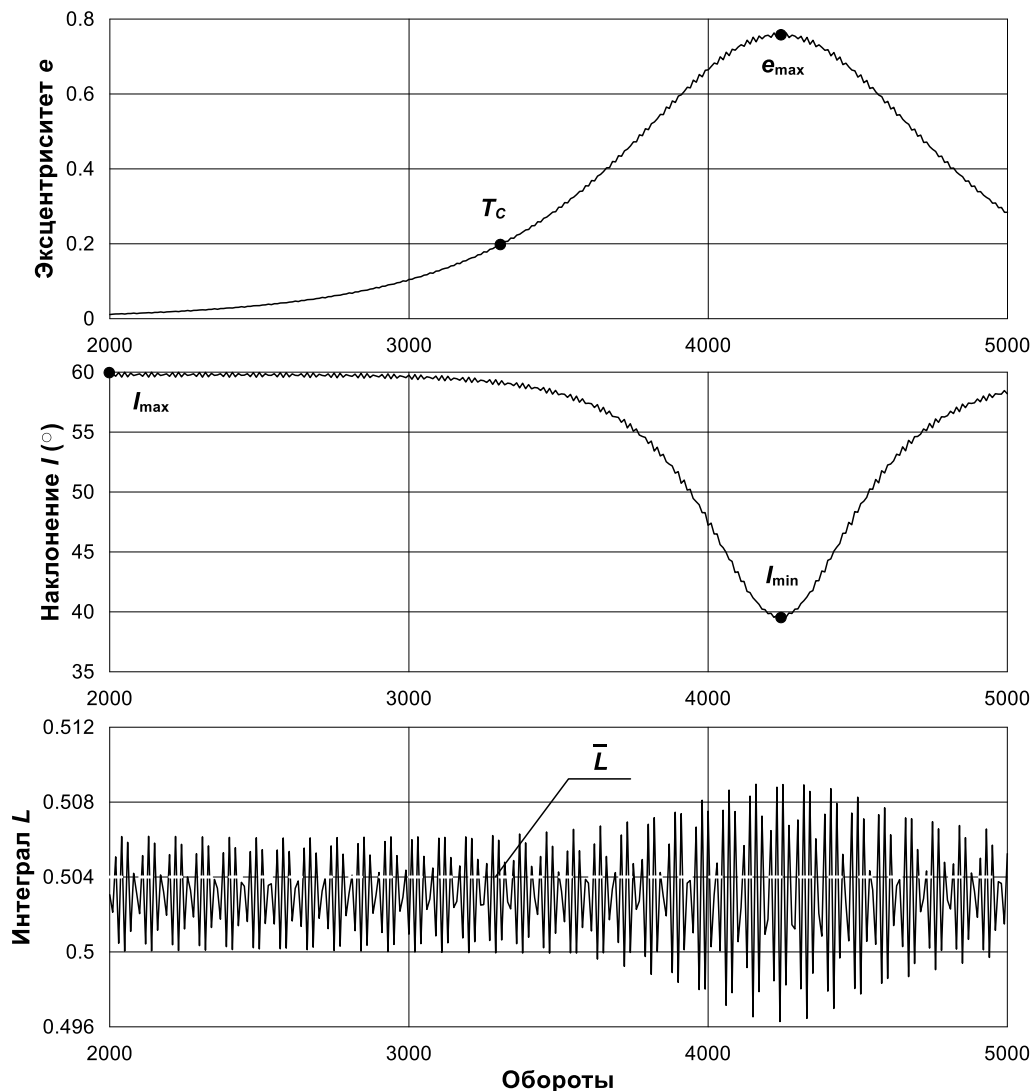


Рис. 2. Исследуемые характеристики орбитального движения  
( $\mu_p = 1$ ,  $a_p = 16$ ,  $\psi_p = 60^\circ$ )

## 4.2. Описание и анализ результатов

В Таблице 2 приведены значения показателя гравитационного влияния внешнего тела на внутреннее при различных условиях ограниченной задачи трех тел. Заливкой выделены состояния орбит внутреннего тела при слабых, умеренных и сильных возмущениях от внешнего тела.

Таблица 2: Показатель гравитационного влияния внешнего тела  $\nu$  и конфигурационная устойчивость в зависимости от параметров орбитальной системы  $\mu_p$  и  $a_p$

| $a_p$ | $\mu_p$           |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
|-------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|       | 1/1024            | 1/256             | 1/64              | 1/16              | 1/4               | 1                 | 4                 | 16                | 64                |
| 2     | $1 \cdot 10^{-4}$ | $5 \cdot 10^{-4}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ | $8 \cdot 10^{-3}$ | $3 \cdot 10^{-2}$ | 0.1               | 0.5               | 2                 | 8                 |
| 4     | $2 \cdot 10^{-5}$ | $6 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-4}$ | $1 \cdot 10^{-3}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ | $2 \cdot 10^{-2}$ | $6 \cdot 10^{-2}$ | 0.3               | 1                 |
| 8     | $2 \cdot 10^{-6}$ | $8 \cdot 10^{-6}$ | $3 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{-4}$ | $5 \cdot 10^{-4}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ | $8 \cdot 10^{-3}$ | $3 \cdot 10^{-2}$ | 0.1               |
| 16    | $2 \cdot 10^{-7}$ | $1 \cdot 10^{-6}$ | $4 \cdot 10^{-6}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $6 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-4}$ | $1 \cdot 10^{-3}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ | $2 \cdot 10^{-2}$ |

|  |   |
|--|---|
|  | Устойчивость  |
|  | Устойчивость при наклонениях вне диапазона $[40^\circ, 140^\circ]$ (т.е. при отсутствии эффекта Лидова–Козаи). Механизм Лидова–Козаи приводит к выбросу внутреннего тела из орбитальной системы |
|  | Неустойчивость, либо гравитационное влияние внешнего тела приводит к неотложному выбросу внутреннего тела из орбитальной системы  |

Из таблицы видно, что значительное проявление эффекта Лидова–Козаи имеет место при умеренном влиянии внешнего тела, когда

$$10^{-4} < \nu < 8 \cdot 10^{-3} \text{ и } 125 \text{ об.} < T_{LK} < 10^4 \text{ об.}$$

При  $\nu < 10^{-4}$  эффект слабый и не приводит к конфигурационной неустойчивости, а в случае  $\nu < 10^{-5}$  ( $T_{LK} > 10^5$  об.) эксцентриситет вообще едва превышает значение 0.001. В сильновозмущенном случае, когда  $\nu > 3 \cdot 10^{-2}$ , эффект Лидова–Козаи не успевает проявиться, поскольку прямое гравитационное влияние внешнего тела приводит к немедленному выбросу внутреннего тела из орбитальной системы вне зависимости от значений наклона.

На Рис. 3 и 4 для частных случаев при умеренных возмущениях представлены области изменения орбитальных элементов, а также периоды слабой эллиптичности и среднеквадратические отклонения значений интегрального соотношения Лидова–Козаи в зависимости от наклона орбиты внешнего тела  $\psi_p$ .

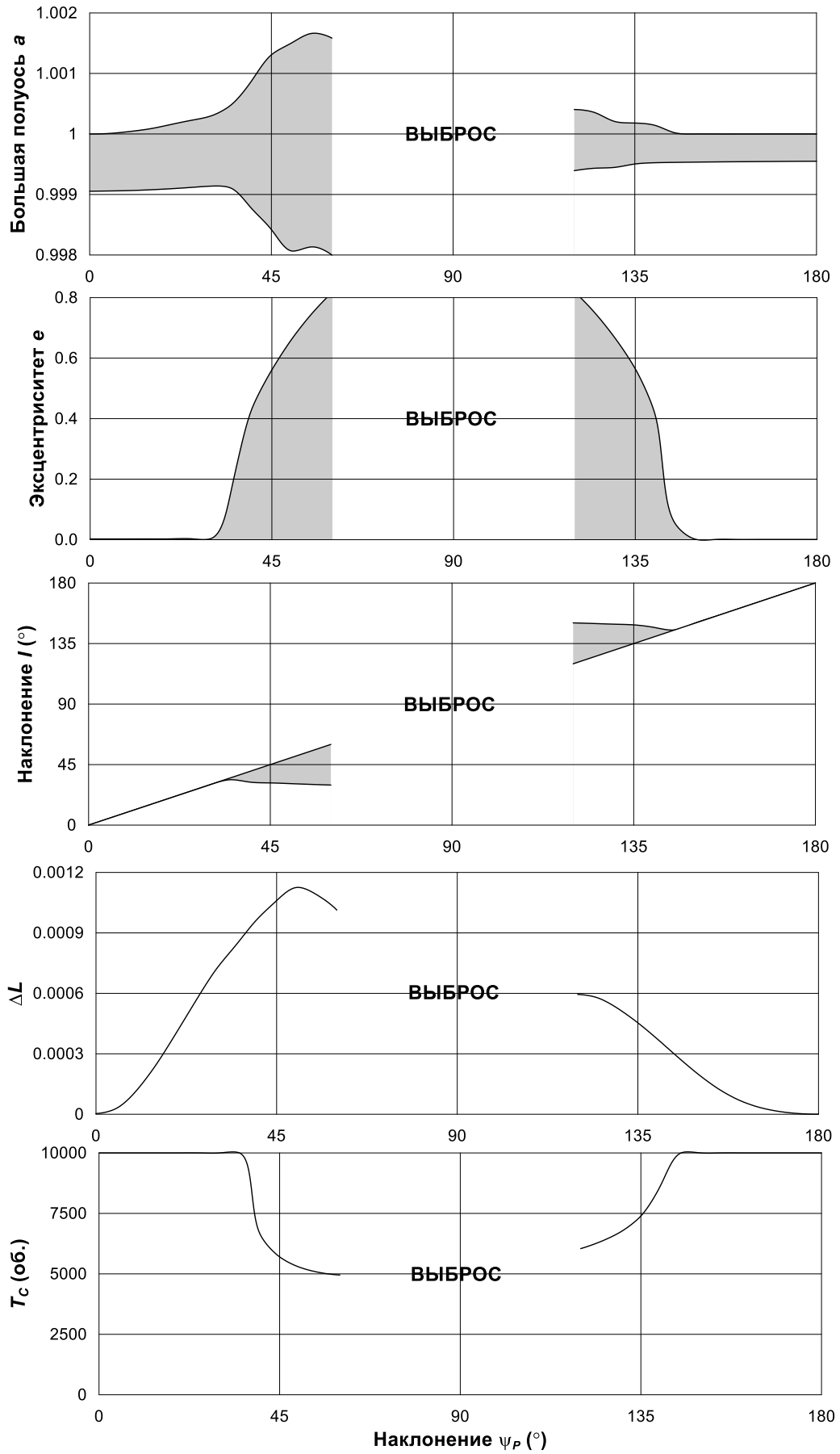


Рис. 3. Максимальные возмущения орбитальных элементов, период слабой эллиптичности и среднеквадратическое отклонение интегральных значений Лидова–Козаи при  $\mu_p = 1/1024$ ,  $a_p = 2$  (астероидная задача)

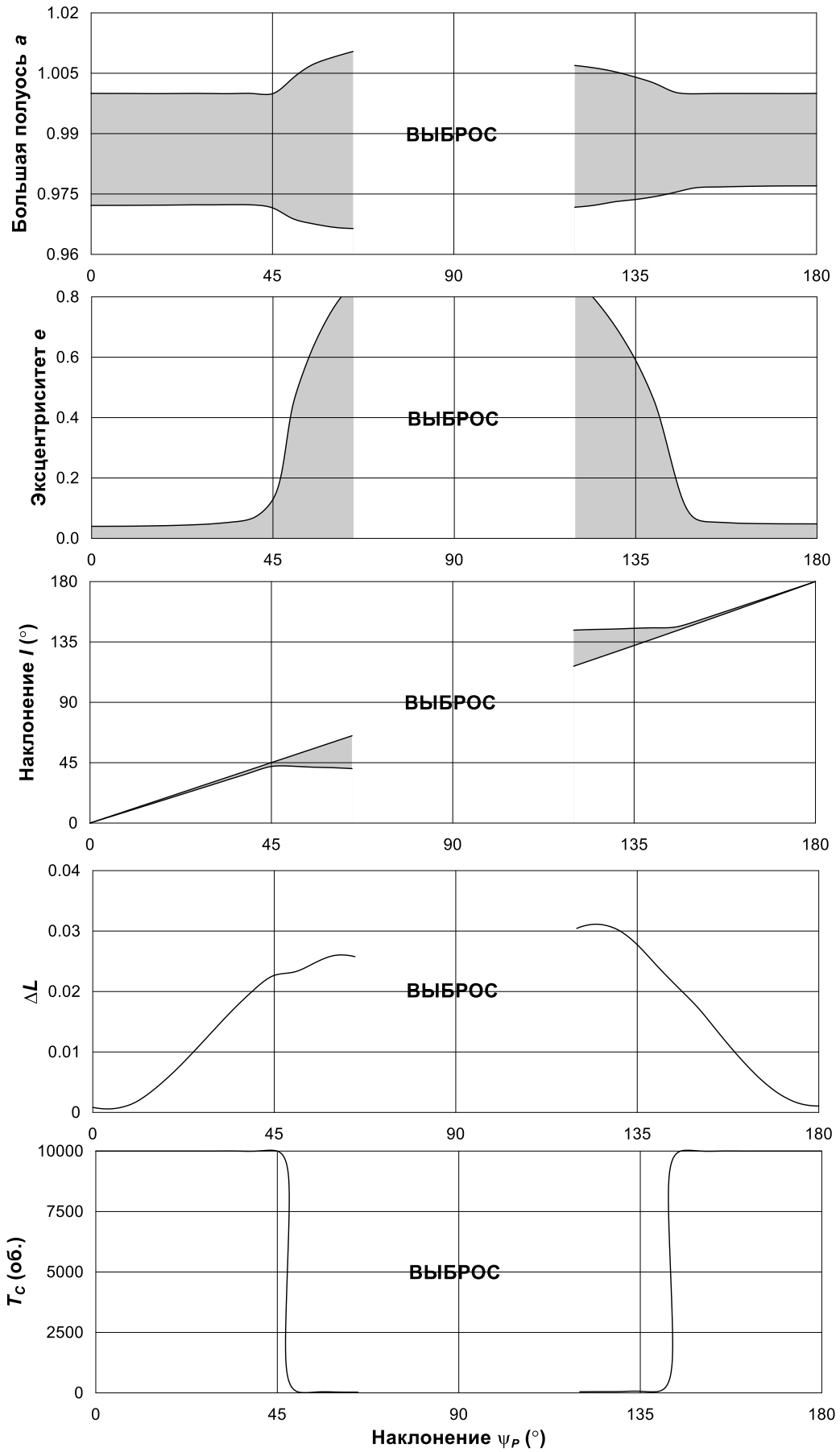


Рис. 4. То же, что и на Рис. 3, но для  $\mu_p = 4$ ,  $a_p = 8$  (звездная задача)

Рисунки показывают характерные изменения орбитальных элементов при умеренном влиянии внешнего тела. Механизм Лидова–Козаи вызывает большие возмущения при наклонениях  $\psi_p \in [35^\circ, 145^\circ]$  для астероидной задачи и  $\psi_p \in [40^\circ, 140^\circ]$  для звездной задачи, которые при наклонениях около  $90^\circ$ , приводят к выбросу внутреннего тела из орбитальной системы. Между тем, если наклонения малы, орбиты конфигурационно устойчивы.

Заметим, что в случае проявления эффекта Лидова–Козаи при наклонениях около критических значений, конфигурационная устойчивость орбит еще сохраняется на всем рассматриваемом интервале времени. Хотя совершенно очевидно, что с увеличением интервала эффект Лидова–Козаи, каким бы он не был малым (см. Рис. 5), будет только усиливаться, что приведет в конечном итоге к неустойчивости.

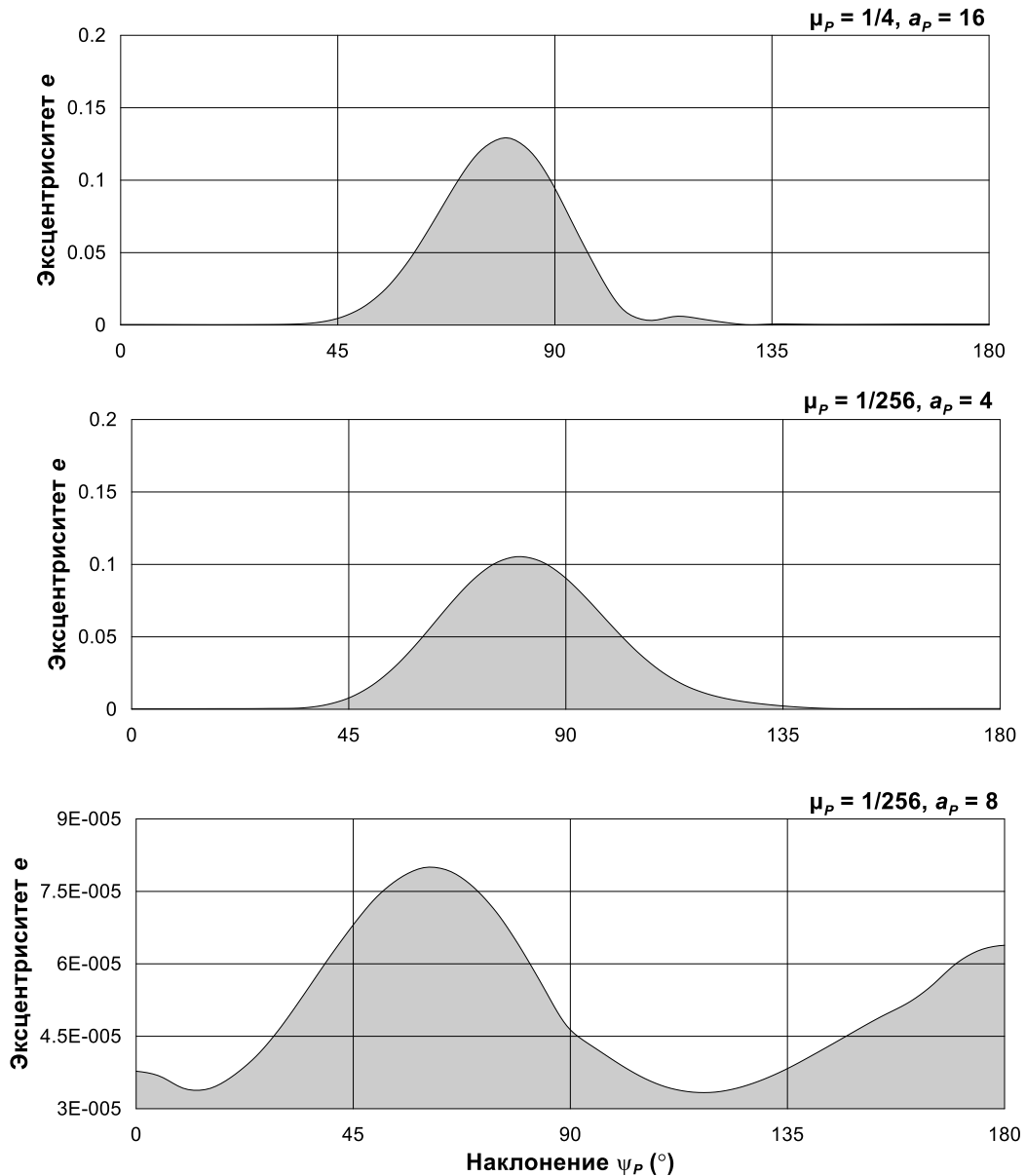


Рис. 5. Возмущения эксцентриситета при слабом влиянии внешнего тела

Как показывает Рис. 2 значения интеграла Лидова–Козаи (1) ограничены, однако их разброс зависит от прямого влияния внешнего тела на внутреннее. В астероидной задаче (Рис. 3) влияние слабее ( $\nu = 10^{-4}$ ), нежели в звездной задаче (Рис. 4) ( $\nu = 8 \cdot 10^{-3}$ ), поэтому возмущающее воздействие планеты вызывает отклонение интегральных значений до четвертого знака, тогда как гравитация массивной звезды — до второго.

### 4.3. Частные задачи

Эффект Лидова–Козаи также исследовался в некоторых частных задачах с параметрами, которые приближенно соответствуют реальным тройным системам: Солнце–астероид (главного пояса)–Юпитер; Земля–ИСЗ<sup>1</sup>–Луна и Луна–КА<sup>2</sup>–Земля (Таблица 3). На Рис. 6–8 показаны возмущения эксцентриситета в зависимости от наклона  $\psi_p$  для рассматриваемых задач.

Таблица 3: Параметры орбитальных систем

| Система небесных тел |                         |   | $\mu_p$ | $a_p$ | $T_{LK}$<br>(Г.тыс.об.) |
|----------------------|-------------------------|---|---------|-------|-------------------------|
| Центр                | Внешнее тело            | Внутреннее тело                         |         |       |                         |
| Солнце               | Юпитер (5.2 а.е.)       | Астероид (2.8 а.е.)                     | 1/1000  | 1.86  | 33000 <sub>7</sub>      |
| Земля                | Луна<br>(384 тыс. км.)  | ИСЗ <sub>ГЛОНАСС</sub> (26 тыс. км.)    | 1/81    | 14.8  | 395 <sub>300</sub>      |
|                      |                         | ИСЗ <sub>Геосинхрон</sub> (42 тыс. км.) | 1/81    | 9.14  | 189 <sub>70</sub>       |
| Луна                 | Земля<br>(384 тыс. км.) | КА ( 1920 км. = 1.13 $R_L$ )            | 81      | 200   | 2.9 <sub>110</sub>      |
|                      |                         | КА ( 3840 км. = 2.26 $R_L$ )            | 81      | 100   | 1 <sub>14</sub>         |
|                      |                         | КА ( 7680 км. = 4.52 $R_L$ )            | 81      | 50    | 0.4 <sub>2</sub>        |

Как мы видим из рисунков, эффект Лидова–Козаи имеет место во всех задачах. Однако при слабых возмущениях ( $\nu < 2 \cdot 10^{-5}$ ), в задачах ИСЗ и низкого окололунного КА, эффект проявляется лишь как небольшое возвышение характеристики возмущений на отрезке  $\psi_p \in [40^\circ, 140^\circ]$ . При умеренных возмущениях ( $\nu > 8 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_{LK} < 10^4$  об.) эффект Лидова–Козаи становится уже достаточно весомым возмущающим фактором, который способен привести к выбросу внутреннего тела из орбитальной системы.

<sup>1</sup> Искусственный спутник Земли

<sup>2</sup> Космический аппарат

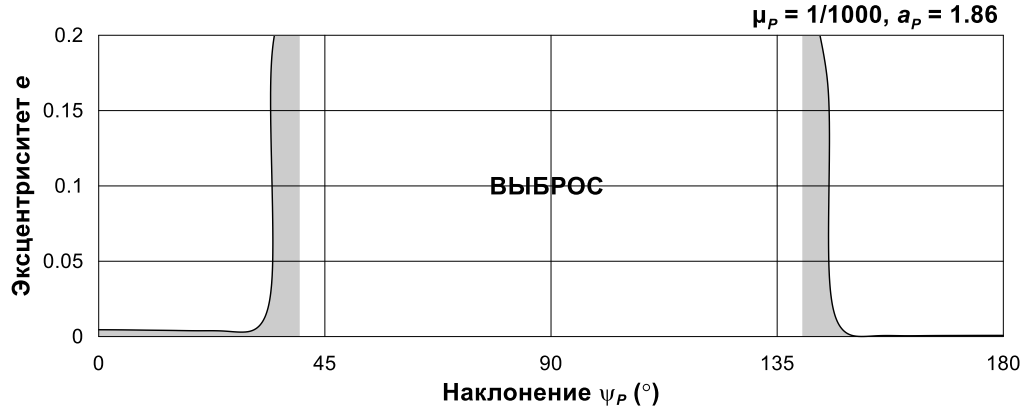


Рис. 6. Возмущения эксцентриситета в астероидной задаче ( $\nu = 2 \cdot 10^{-4}$ ) на интервале времени 10000 оборотов астероида (внутреннего тела)

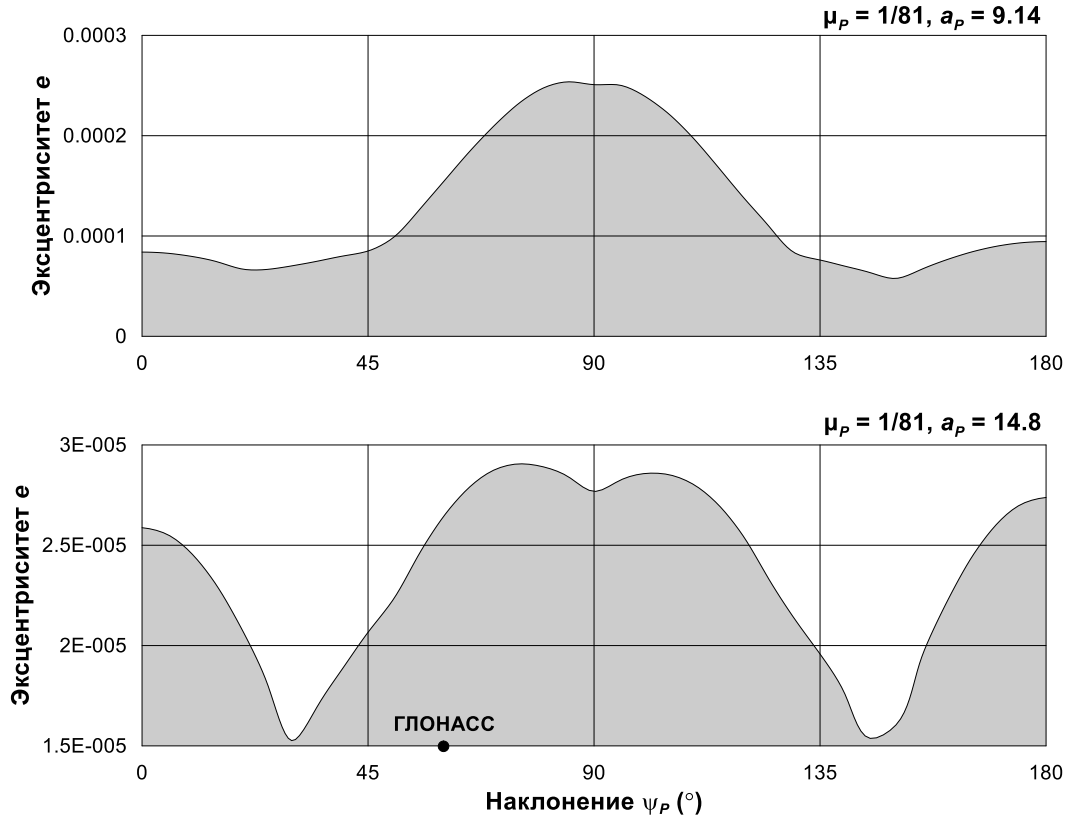


Рис. 7. То же, что и на Рис. 6, но для задач динамики космического аппарата типа ГЛОНАСС ( $\nu = 4 \cdot 10^{-6}$ ) и геосинхронного спутника ( $\nu = 2 \cdot 10^{-5}$ )

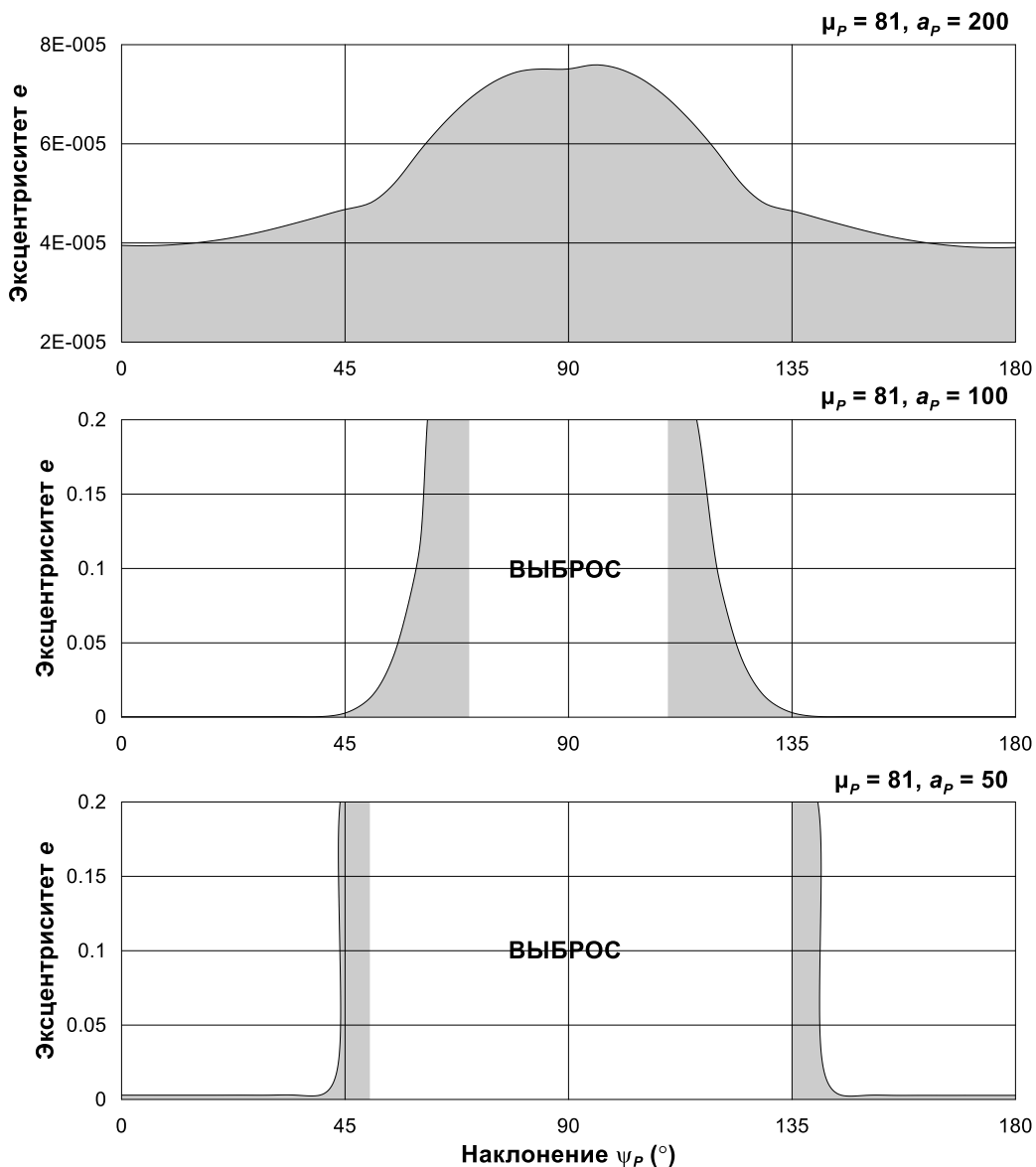


Рис. 8. То же, что и на Рис. 6, но для задач динамики окололунных космических аппаратов с орбитальными большими полуосями 1920 км. ( $\nu = 1 \cdot 10^{-5}$ ), 3840 км. ( $\nu = 8 \cdot 10^{-5}$ ) и 7680 км. ( $\nu = 7 \cdot 10^{-4}$ )

Мы также рассмотрели звездную задачу, в которой двойная звезда с возмущающей компонентой (Таблица 4) находится внутри внешней малой планеты. В этом случае, как и ожидалось, эффект Лидова–Козаи в возмущениях эксцентриситета не проявляется (Рис. 9), даже несмотря на достаточно сильное возмущающее воздействие ( $\nu = 0.125$ ) от внутренней звезды и немалые эксцентриситеты до 0.16.



Таблица 4: Показатель гравитационного влияния внешнего тела  $\nu$  и конфигурационная устойчивость в звездной задаче

| $a_p$ | $\mu_p$           |                   |       |      |     |   |    |     |     |
|-------|-------------------|-------------------|-------|------|-----|---|----|-----|-----|
|       | 1/1024            | 1/256             | 1/64  | 1/16 | 1/4 | 1 | 4  | 16  | 64  |
| 1/2   | $8 \cdot 10^{-3}$ | $3 \cdot 10^{-2}$ | 0.125 | 0.5  | 2   | 8 | 32 | 128 | 512 |

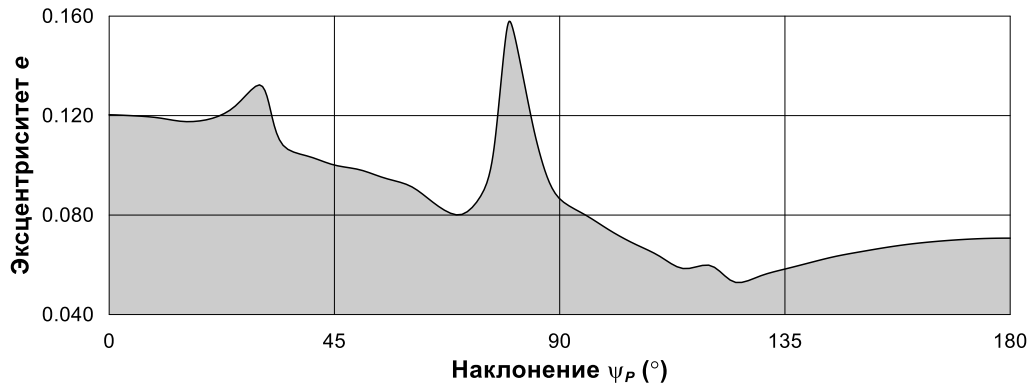


Рис. 9. Возмущения эксцентриситета в звездной задаче при  $\mu_p = 1/64$  и  $a_p = 1/2$  ( $\nu = 0.125$ ) на интервале времени 10000 оборотов планеты (внешнего тела)

Интересно, что если распределить массу внешнего тела вдоль его (круговой) орбиты, эффект Лидова–Козаи сохраняется, причем не только, качественно, но и количественно. Из Рис. 10 видно, что численные результаты при использовании точечной и кольцевой моделей хорошо согласуются.

Формально кольцевое представление гравитации внешнего тела соответствует усреднению его возмущающей силы по средней аномалии. Гравитационное кольцо мы приближенно моделировали, используя мультиполь

$$\mathbf{P}_{\text{Ring}}(\mu_p, a_p, \psi_p) = -\frac{\mu_p}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^i|^3},$$

где положения гравитирующих полюсов  $\mathbf{x}_p^i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) определяются как

$$x_{p1}^i = a_p \cos \varphi^i \cos \psi_p, \quad x_{p2}^i = a_p \sin \varphi^i, \quad x_{p3}^i = a_p \cos \varphi^i \sin \psi_p, \\ \varphi^i = 2\pi i / N \quad (i = 1, \dots, N).$$

Хорошее согласие результатов (Рис. 10) свидетельствует, в частности, о том, что эффект Лидова–Козаи зависит не столько от динамики внешнего возмущающего тела вдоль его орбиты, сколько от взаимного расположения орбитальных плоскостей (их взаимного наклона) внутреннего и внешнего небесных тел.

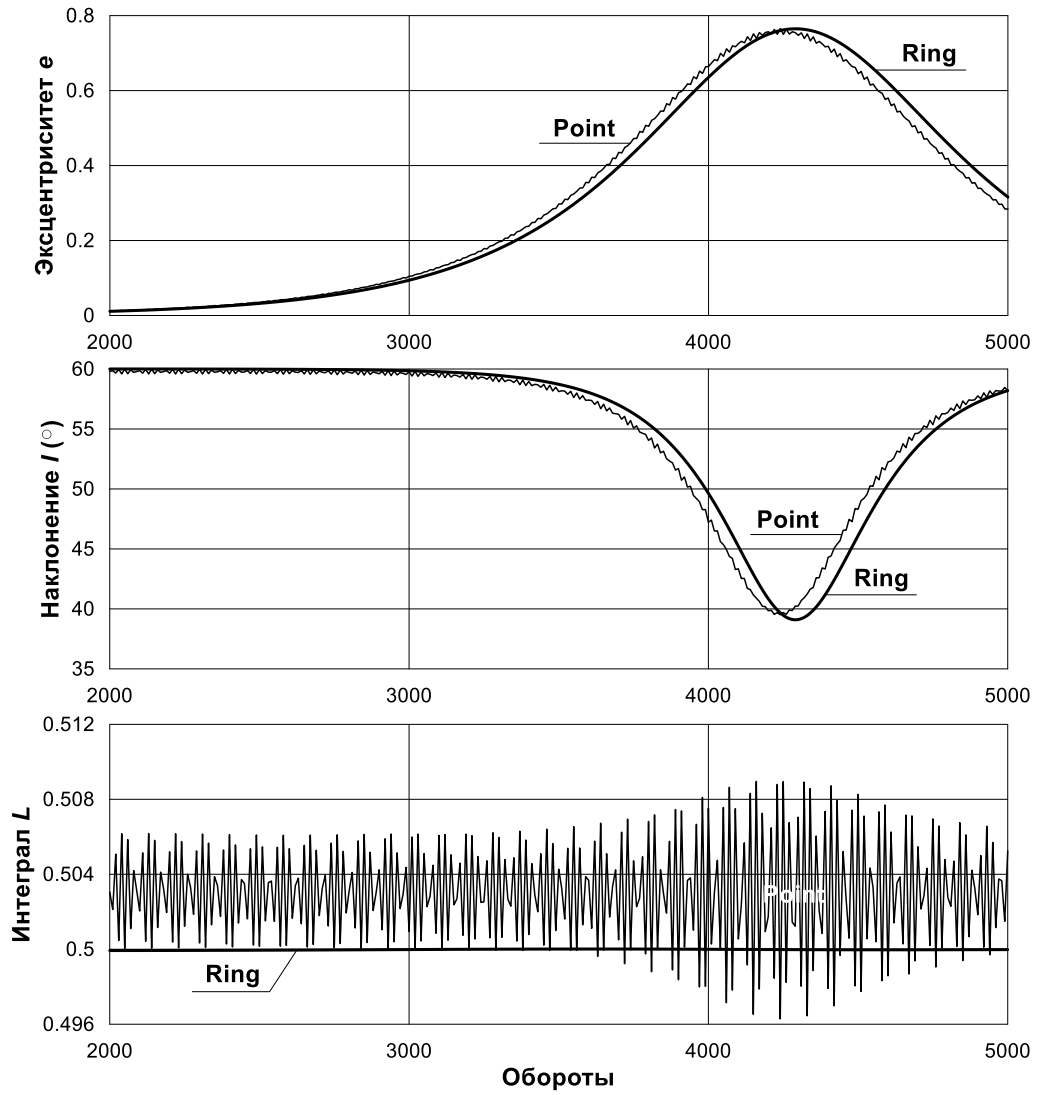


Рис. 10. Численные результаты для точечной (**Point**) и кольцевой (мультипольной) (**Ring**) моделей возмущающей силы от внешнего тела ( $\mu_p = 1$ ,  $a_p = 16$ ,  $\psi_p = 60^\circ$ )

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены следующие результаты:

1. Разработано программное обеспечение для исследования орбитального движения в ограниченной круговой (иерархической) задаче трех тел.
2. Проведен численный эксперимент по выявлению конфигурационно устойчивых орбит в зависимости от параметров возмущающей силы.
3. Определены критические значения параметров, которые приводят к неотложному выбросу внутреннего тела из орбитальной системы.
4. При слабом воздействии возмущающей силы всегда присутствует эффект Лидова–Козаи в диапазоне начальных наклонов от  $40^\circ$  до  $140^\circ$ , что вполне соответствует теоретическим оценкам.
5. Однако только на временных интервалах, соизмеримых с периодом Козаи, механизм Лидова–Козаи приводит к появлению конфигурационно неустойчивых орбит.
6. Во многих случаях при значительных возмущениях он провоцирует выброс внутреннего тела из орбитальной системы.
7. Между тем для малых наклонов при отсутствии механизма Лидова–Козаи все орбиты конфигурационно устойчивы

## СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников под воздействием гравитационных возмущений внешних тел // Искусственные спутники Земли. 1961. Вып. 8. С. 5–45.
2. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astron. J.* 1962. V. 67. P. 591–598.
3. Shevchenko I. *The Lidov–Kozai Effect — Applications in Exoplanet Research and Dynamical Astronomy.* Springer International Publishing. 2017.
4. Valtonen M.J. Karttunen H. *The three-body problem.* Cambridge University Press. 2005.
5. Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
7. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Издательский Дом ТГУ, 2015.

## ПРИЛОЖЕНИЕ (ТЕКСТ ПРОГРАММЫ)

```

program lidov_kozai
implicit real*8(a-h,o-z)
parameter (pi2=6.283185307179586d0)
parameter (n=512)
real*8, dimension(6) :: x,f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,y
common /incl/dmp,ap,psi

open(1,file='4_8.dat')

! Коэффициенты метода Рунге-Кутты 6-го порядка

a21=1d0/2d0
a31=2d0/9d0; a32=4d0/9d0
a41=7d0/36d0; a42=2d0/9d0; a43=-1d0/12d0
a51=-35d0/144d0; a52=-55d0/36d0; a53=35d0/48d0; a54=15d0/8d0
a61=-1d0/360d0; a62=-11d0/360d0; a63=-1d0/8d0
a64=1d0/2d0; a65=1d0/10d0
a71=-41d0/260d0; a72=22d0/13d0; a73=43d0/156d0
a74=-118d0/39d0; a75=32d0/195d0; a76=80d0/39d0
b1=13d0/200d0; b3=11d0/40d0; b4=11d0/40d0; b5=4d0/25d0
b6=4d0/25d0; b7=13d0/200d0
c2=1d0/2d0; c3=2d0/3d0; c4=1d0/3d0; c5=5d0/6d0
c6=1d0/6d0; c7=1d0

! Параметры возмущающей силы

m=5; dmp=2d0**(-2*m)      ! m=-3,...,5
j=4; ap=dfloat(2**j)     ! j=-1,1,...,4

T_k=ap**3/dmp  ! Период Козаи

do k=0,36

di0=dfloat(5*k) ! Начальное наклонение

! Инициализация начальных значений переменных

ecc_max=0d0
sma_max=0d0
sma_min=1d0
di_max=0d0
di_min=180d0
sum=0
key=0

! Начальные условия

h=pi2/dfloat(n); x=0d0
x(1)=1d0; x(5)=1d0; t=0d0

```

```

sma=1d0                ! Semimajor Axis (km)
dn=dsqrt(1d0/sma**3)   ! Mean Motion
prd=pi2/dn             ! Period (sec)
vel=dn*sma             ! Mean Velocity (km/sec)
ecc=0d0                ! Eccentricity
psi=0d0                ! Inclination (deg.)
nskip=n                ! Skip of Data

x=0d0
x(1)=sma*(1d0-ecc)
x(5)=dcos(di0*pi2/360d0)*vel*dsqrt((1d0+ecc)/(1d0-ecc))
x(6)=dsin(di0*pi2/360d0)*vel*dsqrt((1d0+ecc)/(1d0-ecc))

! Вычисление позиционных орбитальных элементов

call Kepler(x, sma, ecc, di)

! Вычисление начального значения интеграла Лидова-Козаи

dl0=(1d0-ecc**2)*dcos(di)**2

! Численное интегрирование дифференциальных уравнений

do nrev=1,10000

do i=1,n
call fun(t,x,f1)                ! k1
y=x+h*a21*f1
call fun(t+h*c2,y,f2)          ! k2
y=x+h*(a31*f1+a32*f2)
call fun(t+h*c3,y,f3)          ! k3
y=x+h*(a41*f1+a42*f2+a43*f3)
call fun(t+h*c4,y,f4)          ! k4
y=x+h*(a51*f1+a52*f2+a53*f3+a54*f4)
call fun(t+h*c5,y,f5)          ! k5
y=x+h*(a61*f1+a62*f2+a63*f3+a64*f4+a65*f5)
call fun(t+h*c6,y,f6)          ! k6
y=x+h*(a71*f1+a72*f2+a73*f3+a74*f4+a75*f5+a76*f6)
call fun(t+h*c7,y,f7)          ! k7
x=x+h*(b1*f1+b3*f3+b4*f4+b5*f5+b6*f6+b7*f7)
t=t+h
end do ! i

! Вычисление позиционных орбитальных элементов

call Kepler(x, sma, ecc, di)

! Вычисление значений интеграла Лидова-Козаи

dl=(1d0-ecc**2)*dcos(di)**2

```

```

! Сумма отклонений значений интеграла Лидова-Козаи от начального
sum=sum+(dl-dl0)**2

! Нахождение максимального эксцентриситета

if(ecc_max<ecc) then
ecc_max=ecc; T_kn=dfloat(nrev)
end if

! Нахождение максимальной большой полуоси

if(sma_max<sma) sma_max=sma

! Нахождение максимального наклона

if(di_max<di) di_max=di

! Нахождение минимальной большой полуоси

if(sma_min>sma) sma_min=sma

! Нахождение минимального наклона

if(di_min>di) di_min=di

! Нахождение первого максимума эксцентриситета

if(ecc>0.2.and.key==0) key=1

! Нахождение периода слабой эллиптичности

if(ecc<0.2.and.key==0) Tc=dfloat(nrev)

! Условие выхода из цикла

if((ecc<0.2.and.key==1).or.ecc>1d0) exit

end do ! nrev

! Ср. кв. отклонение значений интеграла Лидова-Козаи

sred_L=dsqrt(sum/dfloat(nrev))

! Вывод результатов в файл

if(ecc<1d0)
*write(1,'(10g16.9)') ecc_max,sma_min,sma_max,
*di_min/pi2*360d0,di_max/pi2*360d0,Tc,
*T_kn*2d0,T_k,sred_L,di0

```

```

call flush(1)

end do ! k - di0

end

*****
subroutine fun(t,x,f)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension x(6),f(6),xp(3)
common /incl/dmp,ap,psi
data key/0/

if(key==0) then
dnp=(1d0+dmp)**(0.5d0)*ap**(-1.5d0); key=1
end if

phi=dnp*t
xp(1)=ap*dcos(phi)*dcos(psi)
xp(2)=ap*dsin(phi)
xp(3)=ap*dcos(phi)*dsin(psi)

r2=x(1)**2+x(2)**2+x(3)**2
r3=dsqrt(r2)**3
rp3=dsqrt(xp(1)**2+xp(2)**2+xp(3)**2)**3
rrp3=dsqrt((x(1)-xp(1))**2+(x(2)-xp(2))**2+(x(3)-xp(3))**2)**3
rpr2=(xp(1)-x(1))**2+(xp(2)-x(2))**2+(xp(3)-x(3))**2
rpr3=dsqrt(rpr2)**3

f(1:3)= x(4:6)
f(4:6)=-x(1:3)/r3-dmp*((x(1:3)-xp(1:3))/rrp3+xp(1:3)/rp3)

end subroutine fun

*****
subroutine fun_ring(t,x,f)
implicit real*8(a-h,o-z)
parameter (n=32)
dimension x(6),f(6),xp(3),p(3)
common /incl/dmp,ap,psi
data key/0/

if(key==0) then
dnp=(1d0+dmp)**(0.5d0)*ap**(-1.5d0); key=1
end if

p=0d0

do i=1,n

xp(1)=ap*dcos(phi)*dcos(psi)
xp(2)=ap*dsin(phi)
xp(3)=ap*dcos(phi)*dsin(psi)

```



```

r2=x(1)**2+x(2)**2+x(3)**2
r3=dsqrt(r2)**3
rp3=dsqrt(xp(1)**2+xp(2)**2+xp(3)**2)**3
rrp3=dsqrt((x(1)-xp(1))**2+(x(2)-xp(2))**2+(x(3)-xp(3))**2)**3
rpr2=(xp(1)-x(1))**2+(xp(2)-x(2))**2+(xp(3)-x(3))**2
rpr3=dsqrt(rpr2)**3

p=p+dmp*((x(1:3)-xp(1:3))/rrp3)/dfloat(n)

end do

f(1:3)= x(4:6)
f(4:6)=-x(1:3)/r3-p

end subroutine fun_ring

*****
subroutine Kepler(x,sma,ecc,di)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension x(6)

c1=x(2)*x(6)-x(3)*x(5)
c2=x(3)*x(4)-x(1)*x(6)
c3=x(1)*x(5)-x(2)*x(4)

c=dsqrt(c1**2+c2**2+c3**2)
v2=x(4)**2+x(5)**2+x(6)**2
r=dsqrt(x(1)**2+x(2)**2+x(3)**2)

eh=v2/2d0-1d0/r
sma=-1d0/(2d0*eh)
di=dacos(c3/c)

t1=x(5)*c3-c2*x(6)-x(1)/r
t2=c1*x(6)-x(4)*c3-x(2)/r
t3=x(4)*c2-c1*x(5)-x(3)/r

ecc=dsqrt(t1**2+t2**2+t3**2)

end subroutine Kepler

```

# Отчет о проверке на заимствования №1



**Автор:** Пантелеева Ярослава [panteleeva\\_yaroslava\\_98@mail.ru](mailto:panteleeva_yaroslava_98@mail.ru) / ID: 6756865  
**Проверяющий:** Пантелеева Ярослава ([panteleeva\\_yaroslava\\_98@mail.ru](mailto:panteleeva_yaroslava_98@mail.ru) / ID: 6756865)

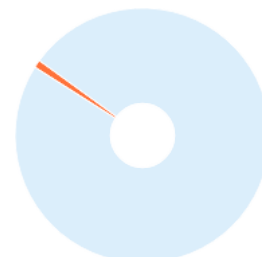
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат»- <http://users.antiplagiat.ru>

## ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 3  
Начало загрузки: 14.06.2019 07:40:57  
Длительность загрузки: 00:00:01  
Имя исходного файла: диплом последняя версия  
Размер текста: 1116 кБ  
Символов в тексте: 32763  
Слов в тексте: 4321  
Число предложений: 174

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)  
Начало проверки: 14.06.2019 07:40:59  
Длительность проверки: 00:00:01  
Комментарии: не указано  
Модули поиска: Модуль поиска Интернет



|                      |                    |                       |
|----------------------|--------------------|-----------------------|
| <b>ЗАИМСТВОВАНИЯ</b> | <b>ЦИТИРОВАНИЯ</b> | <b>ОРИГИНАЛЬНОСТЬ</b> |
| 1,47%                | 0%                 | 98,53%                |

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.  
Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общеупотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

| №    | Доля в отчете | Источник   | Ссылка  | Актуален на | Модуль поиска          |
|------|---------------|--|---|-------------|------------------------|
| [01] | 0,77%         | Резонанс Лидова — Козаи  | <a href="http://ru.wikipedia.org">http://ru.wikipedia.org</a> | 25 Окт 2017 | Модуль поиска Интернет |
| [02] | 0,71%         | Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения ИСЗ. Учебное пособ... | <a href="http://iaaras.ru">http://iaaras.ru</a>               | 10 Ноя 2016 | Модуль поиска Интернет |
| [03] | 0%            | З Т.В. БОРДОВИЦЫНА, В.А. АВДЮШЕВ ТЕОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСКУССТВЕН...       | <a href="http://diss.seluk.ru">http://diss.seluk.ru</a>       | 18 Дек 2017 | Модуль поиска Интернет |