Авдюшев В.А

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОРБИТ

Введение

По мнению **Эрнста Хайрера**, за несколько десятилетий теория методов интегрирования достигла своей зрелости. Действительно, и об этом говорит еще и тот факт, что за тот же период времени не было сделано ничего революционного. Пожалуй, самым крупным среди последних стало открытие геометрических свойств симметричных методов в начале девяностых.

Таким образом, можно подводить итоги и сейчас я бы хотел обрисовать общее положение дел, которое сложилось в небесной механике: какие методы интегрирования сейчас используют и каковы их возможности в тех или иных задачах.

Численная модель орбиты

Методы интегрирования применяют для численного моделирования орбит. Орбита формализуется в виде дифференциальных уравнений, которые как раз интегрируются численными методами на компьютере.

Историю развития методов интегрирования можно представить в виде следующей схемы. Из нее можно выделить пять принципиально разных групп, которые, однако, имеют очень тесную историческую связь друг с другом. Это методы рядов Тейлора, методы Рунге–Кутты, многошаговые, экстраполяционные и геометрические методы.

Допустим, орбита описывается дифференциальными уравнениями первого порядка при заданном начальном динамическом состоянии. Требуется определить динамическое состояние на любой заданный момент времени.

Метод рядов Тейлора

Начнем с самого древнего метода. В этом методе решение уравнения представляется в виде суммы ряда Тейлора, где соответствующие производные находятся путем дифференцирования правой части уравнения. В итоге получается приближенная аналитическая формула. Ее точность определяется степенью старшего члена.
К сожалению, формула пригодна лишь на малом интервале времени. Чтобы найти решение для момента времени, достаточно удаленного от начального, интервал между этими моментами делят на малые подынтервалы, и для каждого из них последовательно применяют формулу Тейлора, выполняя нечто вроде аналитического продолжения. Причем ошибка пошагового интегрирования оказывается на порядок ниже, нежели на каждом шаге. Стоит заметить, что пошаговость — это необходимый атрибут численного интегрирования, что главным образом отличает его от приближенного аналитического.

Методы Рунге–Кутты

Главный недостаток метода Тейлора состоит в том, что для его использования необходимо предварительно вручную продифференцировать правую часть уравнения, что часто оказывается практически невозможным. Чтобы разрешить эту проблему в начале прошлого века **Карл Рунге** и **Мартин Кутта** предложили методы, не требующие дифференцирования. Они имеют вид. Коэффициенты метода подбираются таким образом, чтобы разложения приближенного и точного решений по малому параметру совпадали до нужного порядка. Эти коэффициенты обычно представляют в виде таблицы Бутчера.

Вложенные методы

Среди методов Рунге–Кутты стоит выделить вложенные методы, которые позволяют выполнять интегрирование с переменным шагом, что полезно для интегрирования сложных орбит. Вложенный метод помимо основного решения содержит также и вспомогательное, либо на порядок выше, либо ниже. По разности этих решений оценивается ошибка либо основного решения, либо вспомогательного. Затем эта оценка используется для управления шагом.

Коллокационные методы

В середине прошлого века было обнаружено, что многие неявные методы Рунге–Кутты являются коллокационными. Это означает, что приближенное решение метода может быть представлено в виде многочлена, который определяется из так называемых условий коллокации, т.е. он должен удовлетворять дифференциальному уравнению лишь в некоторых точках и, кроме того, конечно же, должен удовлетворять начальному условию.

Условия коллокации позволяют построить интерполяцию для производной от многочлена. Интегрируя интерполяционную формулу, получаем сам многочлен и соответственно приближенное решение на шаге. В частности, из слайда видно, что коллокационный метод является методом Рунге–Кутты, где его коэффициенты выражаются через интегралы.

Методы Гаусса

В общем случае коллокационный метод имеет порядок, равный числу условий коллокаций. Однако **Джон Бутчер** показал, что если коллокационные методы строить на разбиении Лежандра (как в гауссовых квадратурах), то порядок повышается вдвое. Можно использовать другие гауссовы разбиения, Гаусса–Радо или Гаусса–Лобатто, но тогда порядки методов будут соответственно на один, два ниже. Кстати, метод Эверхарта также является гауссовым на разбиении Радо.

Экстраполяционные методы

Экстраполяция численных решений была предложена еще в начале прошлого века **Льюисом Ричардсоном**, хотя общая теория экстраполяционных методов сложилась только в шестидесятых годах.

Идея экстраполяции очень проста. Глобальное решение можно рассматривать как функцию шага. Если устремить шаг к нулю, получим точное решение. Однако это практически невозможно. Поэтому поступают следующим образом. Находят ряд решений для разных шагов. Интерполируют их и затем на основе интерполяционной формулы выполняют экстраполяцию для нулевого шага.

Точность экстраполированного решения зависит от того, сколько решений использовалось для интерполяции. В общем случае порядок экстраполированного решения определяется как порядок метода + степень интерполяции.

Однако, если опорный метод симметричный, то интерполяцию можно строить по квадрату величины шага и тогда точность экстраполированного решения будет увеличиваться на два порядка за каждую степень интерполяции. В 1965 г. **Уильям Грэгг** предложил в качестве опорного использовать явный составной симметричный метод, что существенно повысило практическую значимость экстраполяционных методов. Грэгг в компании с **Роландом Булиршем** и **Джозефом Штером** разработали экстраполяционный метод, известный теперь как метод Грэгга–Булирша–Штера.

Методы Адамса

За 50 лет до появления методов Рунге–Кутты, еще в 1855 г., известный математик и астроном **Джон Адамс** предложил иной тип методов.

Дифференциальное уравнение орбиты можно переписать в виде интегрального уравнения. Но какой в этом прок? Задача ведь не упрощается. Но допустим, что мы знаем первые s решений, а потому и соответствующие значения правой части уравнения. По этим правым частям можно построить интерполяционный многочлен и подставить его в интегральное уравнение. Тогда приближенное решение будет. Таким образом, мы получаем схему интегрирования Адамса.

Как видно, метод Адамса является многошаговым, поскольку в отличие от методов Рунге–Кутты использует несколько решений, полученных на предыдущих шагах. Однако, несмотря на это, примечательно, что он требует всего лишь одно вычисление правой части за шаг.

Формально в интерполяцию можно включить искомое решение, но тогда схема интегрирования становится неявной и для получения приближенного решения необходимо применять итерационные методы. Тем не менее, неявные схемы предпочтительнее, поскольку они более устойчивые.

Неявные схемы используются в тандеме с явными, но на порядок ниже. Явный метод дает начальное приближение для итерационного процесса, предиктор, неявная схема после итераций — уточненное решение, корректор. Удобство такого тандема состоит еще и в том, что разность решений предиктора и корректора представляет собой достаточно хорошую оценку локальной ошибки, что, разумеется, используется для управления шагом.

Геометрические методы

Теория геометрических методов сформировалась за какие-то последние десять лет и большой вклад в ее развитие внесли **Эрнст Хайрер** и **Герхарт Ваннер**. Молодой возраст теории совершенно не означает, что сами геометрические методы не использовались ранее. Просто их замечательные свойства были обнаружены совсем недавно, когда с развитием компьютерных технологий стало возможным интегрировать орбиты на длительные интервалы времени.

Геометрическими называют такие методы, которые сохраняют те или иные геометрические свойства точного решения. (**Имп.**)

В качестве примера рассмотрим канонические уравнения. Какие геометрические свойства решений можно выделить? 1. Поток, производимый каноническими уравнениями, является симплектическим. 2. Решение обратимо по времени: интегрирование вперед–назад дает начальные условия. 3. Решение удовлетворяет интегралу энергии. Таким образом, геометрические методы должны отвечать этим свойствам.

Первому свойству отвечают симплектические методы, которые строятся на основе канонических преобразований, второму — симметричные методы, третьему — так называемые проекционные методы.

В проекционных методах приближенное решение после каждого шага интегрирования исправляется таким образом, чтобы оно удовлетворяло интегралу, причем поправки должны быть минимальными. Геометрически это означает, что приближенное решение как бы проецируется на гиперповерхность, задаваемую интегральным соотношением в пространстве интегрируемых переменных. (**Имп.**)

Симплектические методы высоких порядков можно получить из простых симплектических методов путем составного интегрирования. Впервые этот подход предложил **Харуо Йошида**. В качестве отправного он использовал симметричный и симплектический метод Штермера–Верлета, известный как метод прыгающих лягушек. Согласно Йошиде, симплектические методы высоких порядков конструируются по схеме. Каждое ее применение повышает порядок на два. Поскольку схема предполагает тройное последовательное интегрирование, ее называют еще тройным прыжком. (**Имп.**)

Несмотря на то что бум в развитии симплектических методов приходится на 80–90-е годы, первые симплектические методы существовали гораздо раньше. Только тогда об этом никто не знал. Например, метод средней точки является симплектическим. Он же является и гауссовым. Так вот в конце 80-х **Хесус Санц-Серна** обнаружил, что все гауссовы методы на разбиениях Лежандра являются симплектическими. Таким образом, используя принцип коллокаций, можно довольно просто получить симплектический метод высокого порядка. Стоит заметить, что все эти симплектические методы являются также и симметричными. Как правило, эти свойства идут рука об руку.

Построение же чисто симметричных методов также не составляет особого труда. У каждого метода Рунге–Кутты есть свой зеркальный брат. Его называют сопряженным методом. Он получается из исходного метода путем следующей замены переменных. Используя их в паре можно получить симметричный метод: делаем полшага исходным методом, затем полшага сопряженным или наоборот. (**Имп.**)

Первые симметричные многошаговые методы были предложены **Скоттом Тремейном** и **Джеральдом Куинланом**. Кстати, именно они первыми обнаружили замечательные свойства симметричных методов применительно к моделированию круговых орбит.

Может возникнуть вопрос: какой нам прок от всей этой геометрии? Скажем, ведь нас интересует не столько сохранение конфигурации орбиты, сколько точное положение на ней. Дело том, что эти методы имеют побочные, но полезные свойства.

Если при использовании обычных методов ошибка со временем возрастает квадратично, то геометрические методы обеспечивают линейный рост ошибки. То есть ошибка развивается медленнее, и поэтому чем больше интервал интегрирования, тем выше будет эффективность геометрических методов.

Эффективность методов

Чтобы исследовать эффективность методов я провел численный эксперимент. Выбрал шесть ярких представителей восьмого порядка. (**Имп.**) Они применялись для численного решения задачи двух тел и возмущенной задачи. Варьируя задаваемую точность на шаге, я получил характеристики точность–быстродействие для каждого метода. Приведу лишь результаты для невозмущенной задачи, так как для возмущенной результаты почти такие же.

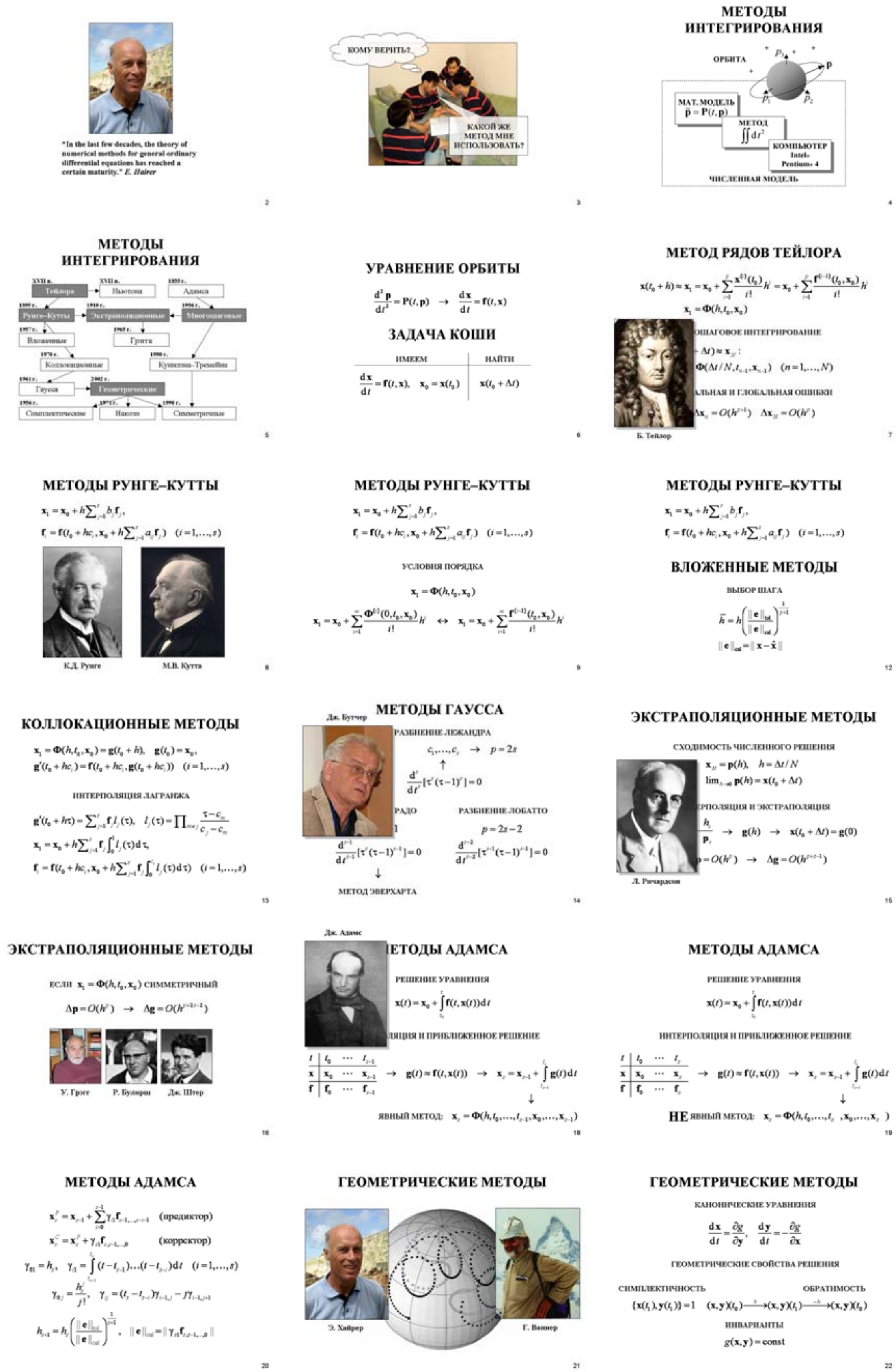
Выводы

Итак, при интегрировании почти круговых орбит очень хорошо себя проявили многошаговые методы. В частности, их можно рекомендовать для исследования орбит близких спутников. Однако эти методы очень чувствительны к вычислительным ошибкам и, если требуется супервысокая точность, имеет смысл обратиться к гауссовым методам.

При интегрировании сложного, нерегулярного движения выбор однозначный. Только гауссовы методы. Впрочем, если требования к точности не высоки, вполне могут быть использованы методы Адамса.

Конечно, взятые мной уравнения являются далеко не лучшей формализацией орбитального движения, хотя они и получены непосредственно из вполне осязаемых законов механики. Это, кстати, как раз тот случай, когда естественное не есть лучшее. В данном случае это совершенно не должно смущать, ведь таким образом мы с вами увидели, на что способны методы интегрирования в экстремальных условиях, применительно к сложным дифференциальным уравнениям.

Что касается других уравнений, то, опираясь на свой личный опыт, я могу лишь сказать, что в общем ситуация здесь очень похожая, хотя в некоторых задачах порой трудно выявить фаворита.



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1\} = 1$$

СИММЕТРИЧНЫЕ

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \xrightarrow{h} (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \xrightarrow{-h} (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$$

ПРОЕКЦИОННЫЕ

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = g(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$$

23

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ПРОЕКЦИОННЫЕ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{\Phi}(h, t_0, \mathbf{x}_0) + \Delta\mathbf{x} \quad (\|\Delta\mathbf{x}\| \to \min)$$

$$g(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_0)$$

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1\} = 1$$

МЕТОДЫ ЙОШИДЫ

$\mathbf{\Phi}^{(2)}$ — симплектический

$$\mathbf{\Phi}^{(2q+2)} = \mathbf{\Phi}^{(2q)}_{c_1 h} \circ \mathbf{\Phi}^{(2q)}_{c_2 h} \circ \mathbf{\Phi}^{(2q)}_{c_1 h}$$

$$c_1 + 2c_2 = 1, \quad c_1^{2q+1} + 2c_2^{2q+1} = 0$$

Х. Йошида

24

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ПРОЕКЦИОННЫЕ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{\Phi}(h, t_0, \mathbf{x}_0) + \Delta\mathbf{x} \quad (\|\Delta\mathbf{x}\| \to \min)$$

$$g(\mathbf{x}_1) = g(\mathbf{x}_0)$$

И. Санц-Серна

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1\} = 1$$

МЕТОДЫ ГАУССА

$$c_1, \dots, c_s$$

$$\uparrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}[\tau^s(\tau-1)^s] = 0$$

25

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

СИММЕТРИЧНЫЕ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{\Phi}^*(h/2, t_{1/2}, \mathbf{x}_{1/2}) \circ \mathbf{\Phi}(h/2, t_0, \mathbf{x}_0)$$

СОПРЯ

$\mathbf{x}_0 \leftrightarrow \mathbf{x}_1,$

$\mathbf{\Phi}^* : \mathbf{x}$

С. Тремейн

МЕТОДЫ КУИНЛЭНА–ТРЕМЕЙНА

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$$

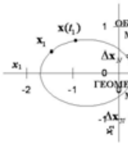
$$\sum_{i=0}^{r} \alpha_i \mathbf{x}_i = h^2 \sum_{i=0}^{r} \beta_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

$$\alpha_i = \alpha_{r-i}, \quad \beta_i = \beta_{r-i}$$

26

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ОТ КАЧЕСТВА К КОЛИЧЕСТВУ



ОБЫЧНЫЙ МЕТОД

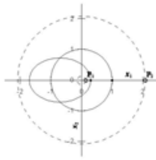
$$\Delta\mathbf{x}_{ij} = O(\Delta t^2 h^p)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

$$\Delta\mathbf{x}_{ij} = O(\Delta t h^p)$$

27

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДОВ

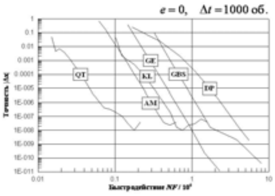


МЕТОДЫ (8-го порядка)	
ДОРМАНА–ПРИНСА	DP
ГАУССА–ЭВЕРХАРТА	GE
ГРЭГГА–БУЛИРША–ШТЕРА	GBS
АДАМСА–МУЛЬТОНА	AM
КАХАНА–ЛИ (ЙОШИДЫ)	KL
КУИНЛЭНА–ТРЕМЕЙНА	QT

28

КРУГОВАЯ ОРБИТА

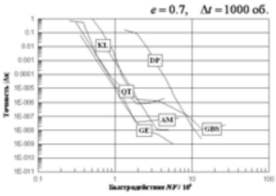
$e = 0, \quad \Delta t = 1000$ об.



29

ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОРБИТА

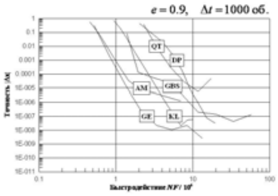
$e = 0.7, \quad \Delta t = 1000$ об.



30

СИЛЬНОЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОРБИТА

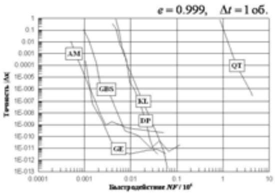
$e = 0.9, \quad \Delta t = 1000$ об.



31

ОРБИТА СБЛИЖЕНИЯ

$e = 0.999, \quad \Delta t = 1$ об.



32

...Д ИСПОЛЬЗОВАТЬ?

ЧТО-ТО УЖЕ ПРОЯСНЯЕТСЯ

ОРБИТА	ОБЪЕКТЫ	МЕТОДЫ
КРУГОВАЯ	СПУТНИКИ ПЛАНЕТЫ АСТЕРОИДЫ	QT, AM GE (высокоточн.)
ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ	КОМЕТЫ АСТЕРОИДЫ	GE
СБЛИЖЕНИЯ	АСТЕРОИДЫ КА	GE

33