АВДЮШЕВ В.А.
МЕТОД ВОЗМУЩЕННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ВОЗМОЖНЫХ ПАРАМЕТРОВ

□ ВВЕДЕНИЕ

Все наблюдения небесных тел, как бы тщательно они не выполнялись, обременены ошибками различного происхождения, которые можно оценить только качественно. Поэтому из наблюдений практически **нельзя получить точные орбиты. Встает вопрос:** как же тогда оценить неопределенности в орбитальных параметрах, вызванные ошибками наблюдений?

С появлением в последнее время быстродействующих и многопроцессорных компьютеров для исследования неопределенностей в орбитах все чаще прибегают к моделированию областей возможных параметров. Они широко используются при планировании наблюдений и идентификации небесных тел, а также в задачах астероидной опасности.

Область возможных параметров представляет собой множество точек в параметрическом пространстве, плотность которого отвечает вероятностной плотности нахождения истинных орбитальных параметров. Вероятностные области обычно строятся **на основе оценок линейной задачи** наименьших квадратов, поэтому их плотность соответствует многомерному **нормальному распределению**. Поскольку связь между представлениями наблюдений и орбитальными параметрами, вообще говоря, **нелинейна**, использование оценок линейной НК-задачи для моделирования вероятностных областей будет обоснованным только в случае, **если области достаточно малы**, где указанная связь может хорошо представляться линейной частью ее разложения по параметрам. В ином случае оценки линейной НК-задачи **будут недостоверно** описывать вероятностные области.

В данной работе предлагается способ построения больших областей возможных параметров, когда нелинейность модели проявляется существенно и ею нельзя пренебрегать.

□ ЗАДАЧА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Пусть требуется решить переопределенную систему уравнений (Имп.: описание переменных). Причем предполагается, что ошибки случайны и независимо распределены по нормальному закону с нулевой средней и дисперсией s^2. В этом случае наилучшие оценки параметров определяются из принципа наименьших квадратов.

В линейном случае (Имп.: комментарии к слайду). В нелинейном случае для нахождения оценки обычно прибегают к итерационному методу Гаусса–Ньютона.

□ ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОБЛАСТЬ

В линейной задаче доверительной областью в пространстве оцениваемых параметров называется эллипсоидальное множество с центром в НК-оценке, содержащее с вероятностью α истинное решение. Формально доверительная область задается как (Имп.: описание переменных). Например, когда N достаточно большое, при $\alpha = 99.7\%$ и $K = 6$ в правой части неравенства получаем $(4.5\sigma)^2$.

В соответствии с определением доверительной области случайный вектор **q**, определяющий область возможных параметров, будет распределен по нормальному закону в K-мерном пространстве с функцией плотности (Имп.).

□ ОВП

Для моделирования области возможных параметров существуют разные способы. Однако, на наш взгляд, наиболее простой способ состоит в использовании матрицы Холецкого. Такая матрица существует и единственна, поскольку ковариационная матрица симметрична и положительно определена. Алгоритм моделирования области возможных параметров с использованием матрицы Холецкого основан на формуле (Имп.).

Заметим, что вероятностную область можно моделировать, используя решения задачи наименьших квадратов, получаемый путем многократного введения в вектор наблюдений несмещенного нормально распределенного вектора ошибок с дисперсией σ^2, т.е. по формуле (Имп.).

Нетрудно показать, что оба способа будут давать одно и то же распределение **q** в соответствии с нормальным распределением.

В нелинейном случае, если ошибки наблюдений достаточно малы и влекут малые параметрические ошибки в **q**, НК-оценки могут рассматриваться в контексте линейной задачи и поэтому для моделирования области возможных параметров можно воспользоваться матрицей Холецкого, где ковариационная матрица, определяется в НК-оценке.

К сожалению, в сильно нелинейном случае при достаточно большом разбросе параметров использование этого алгоритма оказывается необоснованным, поскольку доверительные области могут существенно отличаться от эллипсоидальных.

□ ПЕРЕПАРАМЕТРИЗАЦИЯ

Предположим, что существует такая система параметров, относительно которых задача становится линейной, причем между новыми и старыми параметрами имеет место взаимнооднозначное соответствие.

Построим области возможных параметров как НК-разбросы в пространстве этих параметров. Очевидно, что множества НК-решений будут также связаны друг с другом взаимнооднозначно. Но для новых параметров область будет адекватно описывать параметрические неопределенности. Следовательно, и множество НК-решений в старых переменных будет также адекватно описывать вероятностную область.

Таким образом, в качестве дискретного представления области возможных параметров в нелинейном случае можно рассматривать разброс НК-решений, искусственно получаемый при различных выборках наблюдений. Примечательно, что такой подход не требует перехода к новым параметрам. Однако для возможности его применимости необходимо все же знать, что такая система параметров существует, и это имеет место в том случае, когда пространство оценок, задаваемое моделью, является плоским.

□ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Давайте рассмотрим **геометрическую интерпретацию** метода наименьших квадратов, на котором основан предлагаемый способ построения вероятностных областей.

Вектор наблюдений $\mathbf{P}^{O}$ задает **точку** в некотором ***N*-мерном** пространстве измеряемых величин. В то же время модель при всевозможных параметрах $\mathbf{q}$ будет задавать ***K*-мерное подпространство**. Тогда из принципа наименьших квадратов **решение задачи** будет то, для которого расстояние до $\mathbf{P}^{O}$ минимальное, т.е. решение задачи — это **ортогональная проекция** $\mathbf{P}^{O}$ на подпространство оценок. Между тем **точка точных положений** спутника, в отличие от наблюдаемых, будет лежать в *K*-мерном подпространстве.

Таким образом, способ возмущенных наблюдений — это просто ортогональная проекция **множества возможных наблюдений** на *K*-мерное подпространство оценок с последующим отображением его на пространство определяемых параметров $\mathbf{q}$.

Как я уже говорил, нелинейная задача **может быть сведена к линейной** в том случае, когда подпространство оценок является **плоским**, т.е. когда можно ввести такую прямоугольную систему координат, на которую бы натягивалось все подпространство оценок.

Теперь заметим, что ортогональная проекция *N*-мерной сфероидальной вероятностной области на плоское подпространство оценок дает *K*-мерную сфероидальную область, конфигурация которой не зависит от точки $\mathbf{P}^{O}$. И в этом случае, если мы построим вероятностные области относительно точных параметров и их оценок, то первая будет характеризовать вероятность оценок относительно точных параметров, тогда как вторая — вероятность точных параметров относительно оценок, причем, самое главное, эти вероятности будут равны. Это можно назвать принципом согласованности.

□ МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Так вот, этот принцип в общем случае не выполняется, поскольку за счет кривизны подпространства оценок конфигурации спроецированных областей будут непосредственно зависеть от положения $\mathbf{P}^{O}$. Для того чтобы компенсировать эту рассогласованность, предлагается строить вероятностную область не относительно точки $\mathbf{P}^{O}$, а относительно ее модельного представления. В итоге, мы получаем модификацию метода возмущенных наблюдений.

□ ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

1. Постановка задачи. 2. Нелинейность. 3. Постановка эксперимента. 4. Метод квазиньютоновских направлений. 5. Численные результаты. 7. Выводы.

LEAST-SQUARES (LS) PROBLEM

System of Equations

$\bar{\mathbf{P}}^O + \delta\mathbf{P}^O = \mathbf{P}^O = \mathbf{P}^C(\mathbf{q})$

$\delta\mathbf{P}^O \in \mathrm{N}(0, s^2)$

Solution of System

$\hat{\mathbf{q}} : S(\hat{\mathbf{q}}) = \| \mathbf{P}^O - \mathbf{P}^C(\hat{\mathbf{q}}) \|^2 \to \min$

Linear Case

$$\mathbf{P}^C(\mathbf{q}) = \mathbf{A}\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{P}^O$$

Nonlinear Case

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k + \frac{1}{2}\left[\mathbf{Q}^{-1}\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right](\mathbf{q}_k), \quad \mathbf{Q} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}}\right]^T \frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{q}} = \lim_{k\to\infty}\mathbf{q}_k$$

CONFIDENCE REGION

$$S(\mathbf{q}) - S(\hat{\mathbf{q}}) = (\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}}) \le (4\sigma^2\sigma^2)(K(\xi KN{=}{-}6Kq\alpha{=})0.997)$$

RMS Error

$$\sigma^2 = S(\hat{\mathbf{q}})/(N-K)$$

Normal Distribution

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K \det\mathbf{C}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})\right)$$

Covariance Matrix

$$\mathbf{C} = \sigma^2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$$

TWO TECHNIQUES FOR BUILDING REGIONS OF POSSIBLE PARAMETERS

Technique 1

$\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^{1/2}\boldsymbol{\eta}$

$\boldsymbol{\eta} \in \mathrm{N}(0,1)$

Cholesky Matrix

$\mathbf{C}^{1/2} : \mathbf{C}^{1/2}(\mathbf{C}^{1/2})^T = \mathbf{C}$

Technique 2 (LS-scattering)

$\mathbf{q} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{P}^O + \delta\mathbf{P}) = \hat{\mathbf{q}} + (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\delta\mathbf{P}$

$\delta\mathbf{P} \in \mathrm{N}(0, \sigma^2)$

$$f(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^K \det\mathbf{C}}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})\right)$$

REPARAMETRIZATION

Nonlinear Problem — **Linear Problem**

$$\mathbf{P}^O = \mathbf{P}^C(\mathbf{q}) \xrightarrow{\mathbf{q}=\mathbf{T}(\mathbf{r})} \mathbf{P}^O = \mathbf{P}^C(\mathbf{T}(\mathbf{r}))$$

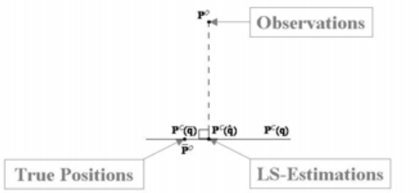
LS-SCATTERING

$$\hat{\mathbf{q}} : S(\hat{\mathbf{q}}) \xrightarrow{\mathbf{P}^O+\delta\mathbf{P}} \min \qquad \hat{\mathbf{r}} : S(\mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})) \xrightarrow{\mathbf{P}^O+\delta\mathbf{P}} \min$$

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{r}})!$$

GEOMETRIC INTERPRETATION

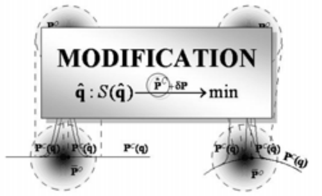
Linear Case



$\hat{\mathbf{q}} : \| \mathbf{P}^O - \mathbf{P}^C(\hat{\mathbf{q}}) \|^2 \to \min$

GEOMETRIC INTERPRETATION

Planar Case — **Non-planar Case**

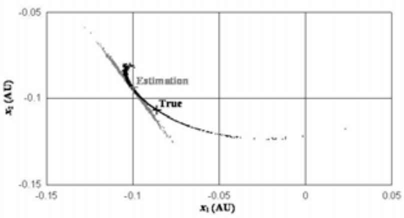


NUMERICAL EXAMPLE

PROBLEM

Object	**S/2003 J04 (Jupiter's Satellite)**
$\mathbf{P}^O$	**(Емельянов и др, 2006)** $(N = 22)$
$\mathbf{P}^C$	**(Авдюшев, Баньщикова, 2007)**
Parameters	$\mathbf{q} = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T \quad (K = 6)$

PROBABILISTIC REGIONS



Small Scale