

УДК: 521.1

*М.А. БАНЬЩИКОВА¹, В.А. АДЮШЕВ²***ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СПУТНИКОВ ЮПИТЕРА³**

В данной работе представлены результаты численного исследования динамики спутников Юпитера: близких (Амальтея и Теба) и далеких спутников группы Гималии (Леда, Гималия, Лисифея, Элара) и группы Пасифе (Ананке, Карме, Пасифе, Синопе). Проведен анализ структуры возмущений спутников. По имеющимся наблюдениям определены орбиты спутников. Исследуя эволюцию областей возможных движений рассматриваемых объектов, оценена достоверность полученных орбит. Выведены приближенные формулы для оценки пригодности моделей для задач идентификации объектов.

1. Введение

В последнее время вышла серия работ [1–4], посвященных исследованию динамики спутников Юпитера. В [1,2] Р.А. Якобсон определил орбиты четырех внутренних (Амальтея, Теба, Адрастея и Метис) и восьми внешних спутников Юпитера (групп Гималии и Пасифе), используя все их наблюдения до 2000 г. Н.В. Емельянов [3,4] определил орбиты 54 внешних спутников Юпитера, включая 46 новых, открытых до сентября 2004 г.

В этих работах авторы традиционно подходят к исследованию достоверности получаемых результатов. Используя метод наименьших квадратов (МНК), они оценивают ее по среднеквадратической ошибке и по невязкам МНК-орбиты относительно наблюдательных данных. Однако, как известно, вычисленная по многочисленному ряду наблюдений орбита не является истинной, поскольку наблюдения содержат в себе ошибки, причем не только случайные, но и систематические. Несмотря на близость истинных и вычисленных орбитальных параметров, МНК-орбита, главным образом, вследствие ляпуновской неустойчивости со временем может настолько существенно отклоняться от истинной орбиты, что отклонения будут превосходить МНК-невязки.

Для более содержательного изучения этой проблемы обычно прибегают к моделированию так называемых областей возможных движений [5], где исследуется не одна МНК-орбита, а целое семейство наиболее вероятных орбит, которое строится не только по МНК-оценкам, но и с привлечением ковариационной матрицы ошибок.

В данной работе мы представляем результаты численного исследования динамики некоторых спутников Юпитера (близких и далеких групп Гималии и Пасифе) (таблица 1), где основное внимание уделяется моделированию и исследованию областей возможных движений.

2. Модель спутникового движения

В основу численной модели спутникового движения положены уравнения в прямоугольных координатах, которые интегрировались методом Эверхарта 15-го порядка [6]. В качестве оцениваемых параметров были взяты компоненты начального вектора состояния динамической системы: координаты и компоненты скорости в начальный момент времени. Процесс исправления начального вектора состояния системы выполнялся по фотографическим и ПЗС-наблюдениям с использованием метода наименьших квадратов [7]. Дифференциальные коэффициенты (изохронные производные), необходимые для исправления орбиты, вычислялись путем численного интегрирования их дифференциальных уравнений (метод Мультона [8]) совместно с уравнениями движения.

¹ НИИ прикладной математики и механики

² Томский государственный университет

³ Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-02-17043.

Таблица 1 — Параметры движения спутников

Спутник	Откр. (г.)	a (тыс. км.)	T (сут)	e	i (°)	
Амальтея	JV	1892	181	0.5	0.003	0.3
Теба	JXIV	1979	222	0.6	0.020	0.7
Леда	JXIII	1974	11094	238.7	0.150	27.0
Гималия	JVI	1904	11480	247.8	0.166	30.2
Лисифея	JX	1938	11720	259.2	0.110	29.0
Элара	JVII	1905	11737	259.6	0.210	28.0
Ананке	JXII	1951	21200	-631.0	0.170	147.0
Карме	JXI	1938	22600	-692.0	0.210	163.0
Пасифе	JVIII	1908	23500	-732.6	0.380	138.0
Синопе	JIX	1914	23700	-758.0	0.280	153.0

Движение спутников рассматривалось в йоивцентрической координатной системе, связанной с экватором Земли J2000. Дифференциальные уравнения движения в этой системе имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P}, \quad (1)$$

с начальными условиями, составляющими начальный вектор состояния динамической системы:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{x} — вектор положения спутника; t — время (t_0 — начальный момент времени); μ — гравитационная постоянная Юпитера; \mathbf{P} — возмущающие силы.

3. Возмущающие силы

Движение спутника рассматривалось в поле тяготения сжатой планеты (до гармоника V_6) под действием сил притяжения Солнца, планет и галилеевых спутников с учетом релятивистских эффектов в рамках задачи Шварцшильда [9].

Возмущающие силы от Солнца, планет и галилеевых спутников вычислялись по формуле

$$\mathbf{P}_p = \mu_p \left(\frac{\mathbf{x}_p - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3} \right),$$

где μ_p и \mathbf{x}_p — гравитационный параметр и вектор положения возмущающего тела соответственно. Для получения координат Солнца использовалась эфемериды DE200. Координаты галилеевых спутников вычислялись по формулам кругового движения

$$x_{G1} = a_G \cos(n_G(t - T_J) + \Phi_G), \quad x_{G2} = a_G \sin(n_G(t - T_J) + \Phi_G), \quad x_{G3} = 0, \quad (G = \overline{1,4})$$

где динамические параметры спутников a_G , n_G , T_J , Φ_G взяты из теории Лиске [10]. Массы Солнца, планет и галилеевых спутников взяты из [11].

Для моделирования влияния от несферичности центральной планеты \mathbf{P}_N мы учитывали четыре зональные гармоники V_2 , V_3 , V_4 , V_6 , для которых на данный момент достаточно уверенно определены значения их коэффициентов J_2 , J_3 , J_4 , J_6 . Влияние от несферичности вычислялось по формуле

$$\mathbf{P}_N = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{где } V = -\mu J_2 \frac{b^2}{r^3} L_2(\sin \varphi) - \mu J_3 \frac{b^3}{r^4} L_3(\sin \varphi) - \mu J_4 \frac{b^4}{r^5} L_4(\sin \varphi) - \mu J_6 \frac{b^6}{r^7} L_6(\sin \varphi).$$

Здесь b — экваториальный радиус Юпитера; φ — широта спутника относительно экватора Юпитера; L_2, L_3, L_4, L_6 — полиномы Лежандра. Кроме того, при вычислении φ учитывалась прецессия экватора Юпитера. Коэффициенты зональных гармоник были взяты из [11].

Возмущения от релятивистских эффектов в рамках задачи Шварцшильда представлены в следующем виде:

$$\mathbf{P}_R = 4 \frac{\mu^2}{c^2 r^4} \mathbf{x} + \frac{\mu}{c^2 r^3} [4(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}^2 \mathbf{x}],$$

где c — скорость света.

Для получения оценок влияния возмущающих факторов мы заменили реальные наблюдения на фиктивные, полученные из представления наблюдений в α и δ по некоторой заданной системе начальных параметров (2). Затем вычисляли невязки, отключая в модели те или иные возмущающие силы. В качестве меры влияния возмущающих сил была выбрана полученная по этим невязкам их среднеквадратическая величина σ , которая представлена на рисунках 1,2 для различных возмущающих факторов, таких как: несферичность центральной планеты (Jov); влияние каждой гармоники йовепотенциала в отдельности (J3, J4, J6); притяжение от Солнца (Sun), галилеевых спутников (Gal), Нептуна, Урана и Сатурна (Nept, Uran, Sat); релятивистские эффекты (Rltv). В виду чрезмерно большой среднеквадратической величины возмущений от второй зональной гармоники для близких спутников на рисунке 1 она не представлена.

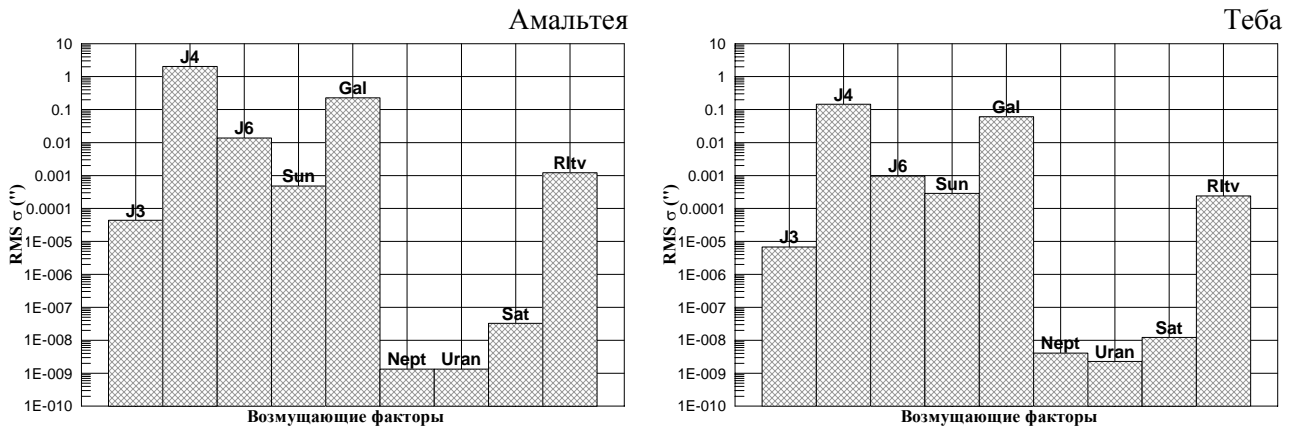


Рисунок 1 — Структура возмущений для близких спутников

Как видно из рисунка 1, основными возмущающими факторами являются несферичность Юпитера и притяжение от галилеевых спутников. Влияние от Солнца и релятивистские эффекты довольно малы в сравнении с ошибками современных наблюдений, которые составляют не менее $0.05''$ [12]. Однако их все же следует включить в модель возмущающих сил с целью уменьшения систематических ошибок модели. Другие факторы существенно меньше и их влиянием можно пренебречь.

Для спутников групп Гималии и Пасифе (рисунок 2) основными возмущающими факторами являются притяжение от Солнца и галилеевых спутников. По мере увеличения расстояния спутника от Юпитера возрастает возмущающее влияние Сатурна и уменьшается влияние от несферичности центральной планеты. Тем не менее, при моделировании орбит эти возмущающие факторы следует учитывать для всех далеких спутников. В то же время притяжением от Урана и Нептуна, а также релятивистскими эффектами можно пренебречь.

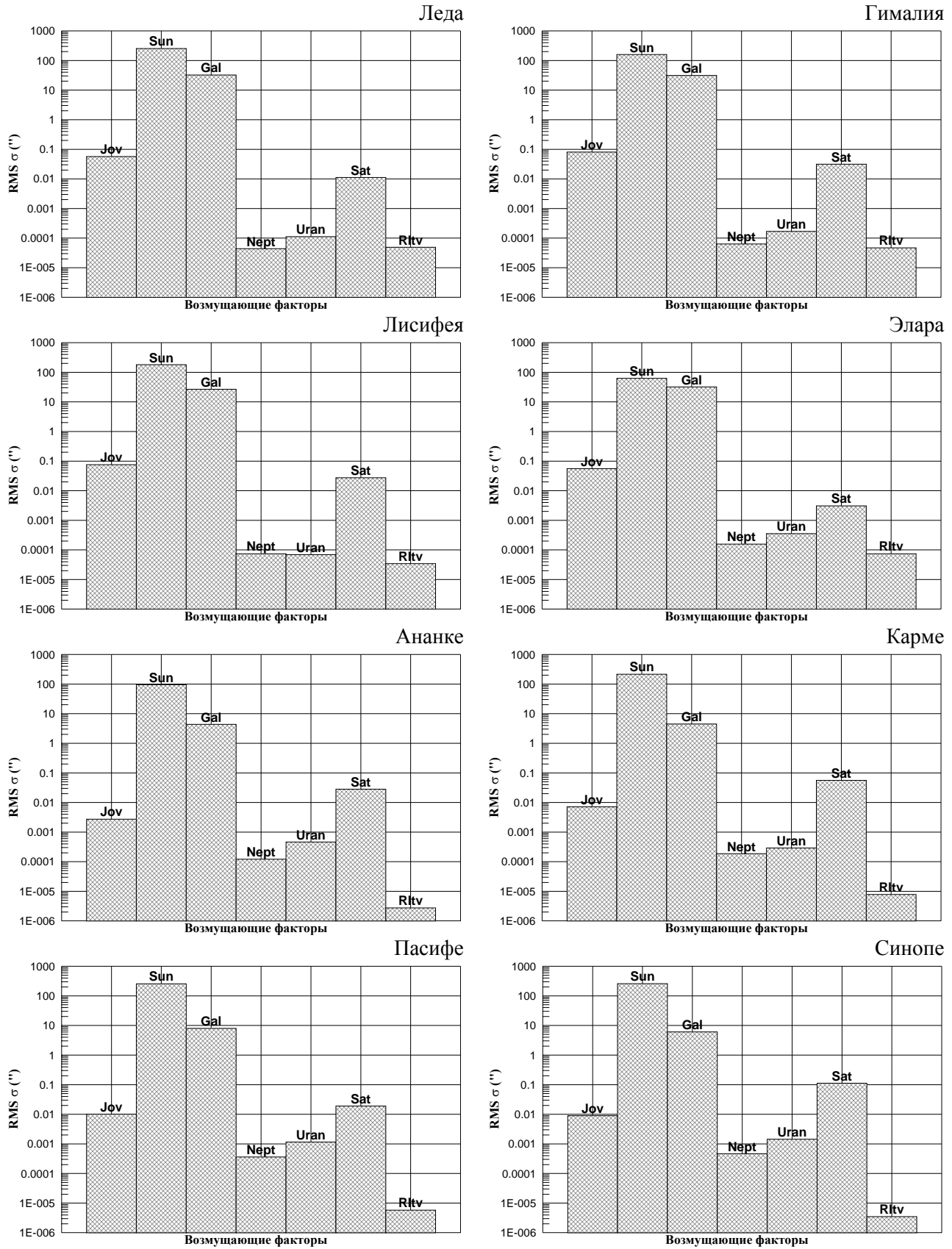


Рисунок 2 — Структура возмущений для групп Гималии и Пасифе

4. Дифференциальная коррекция орбит

По наблюдениям спутников [13] (таблица 2) после предварительной отбраковки наблюдений было проведено улучшение начального вектора состояния динамической системы (2) (таблица 3).

Таблица 2 — Характеристики наблюдений и среднеквадратическая ошибка

Спутник	Кол-во наблюдений			Интервал (г.–г.)	Приемник	RMS σ (")
	Общ.	Исп.	Отбр.			
Амальтея	200	164	36	1989–2001	Фото, ПЗС	0.1
Теба	133	133	0	1995–1999	ПЗС	0.1
Леда	73	54	19	1974–2002	Фото, ПЗС	0.9
Гималия	542	453	89	1894–2001	Фото, ПЗС	1.0
Лисифея	173	148	25	1938–2002	Фото, ПЗС	0.9
Элара	575	505	70	1905–2003	Фото, ПЗС	1.0
Ананке	256	246	10	1954–2003	Фото, ПЗС	0.8
Карме	438	376	62	1938–2003	Фото, ПЗС	0.7
Пасифе	725	594	131	1905–2003	Фото, ПЗС	1.4
Синопе	392	289	103	1914–2003	Фото, ПЗС	0.8

Таблица 3 — Йовицентрические экваториальные координаты и скорости на эпоху J2000

Спутник	t_0	\mathbf{x}_0 (а.е.)	$\dot{\mathbf{x}}_0$ (а.е./сут.)
Амальтея	2449860.5	.5885320590070E–03 –.9693172666694E–03 –.4470541259475E–03	.1332096398104E–01 .6554025960186E–02 .3297847074979E–02
Теба	2450464.5	–.6254898026180E–03 –.1231950516630E–02 –.5886856711303E–03	.1232999397055E–01 –.5444312388714E–02 –.2118268630062E–02
Леда	2451872.5	–.3683926907261E–01 .4871472833178E–01 –.9763312382166E–02	–.1771128569779E–02 –.1385250476452E–02 –.5271691359444E–03
Гималия	2451545.0	–.3288484922447E–01 .4192906556578E–01 .5351738492915E–01	–.1628152703984E–02 –.1023790340913E–02 .2563026193965E–03
Лисифея	2452691.63	–.8047003429038E–01 –.1074843806532E–01 –.1025468171055E–01	.1234505389157E–03 –.1142907844034E–02 –.1401557345104E–02
Элара	2451545.0	–.3937732494865E–01 –.4644654923000E–01 .1065238904955E–01	.1575576260903E–02 –.1377558889647E–02 –.1076981333373E–02
Ананке	2452691.66	–.1172102878849E–01 .1804610151096E+00 –.1320212848618E–01	.1016536353043E–02 .8010615599325E–04 .2796867822315E–03
Карме	2452655.75	.1305134769064E+00 .2216862861175E–02 .2900537469926E–01	.4622798384478E–03 –.1290383774965E–02 –.7021719354961E–03
Пасифе	2451545.0	.8998652666680E–02 –.1678373368520E+00 .1750001195046E–01	–.1052440602257E–02 .4576597075581E–03 .4713083168077E–03
Синопе	2451545.0	–.1604236104886E+00 .9457413260288E–01 .7275920395901E–01	.3859682522826E–03 .9123959148424E–03 –.6736096311513E–04

На рисунках 3–5 представлены разности (невязки) наблюдаемых и вычисленных данных (O–C) для прямого восхождения ($\Delta\alpha\cos\delta$) и склонения ($\Delta\delta$) (\circ – для отбракованных наблюдательных данных, \bullet – для используемых). Среднеквадратические ошибки, полученные по используемым наблюдениям, говорят о хорошей согласованности с наблюдательными данными (таблица 2).

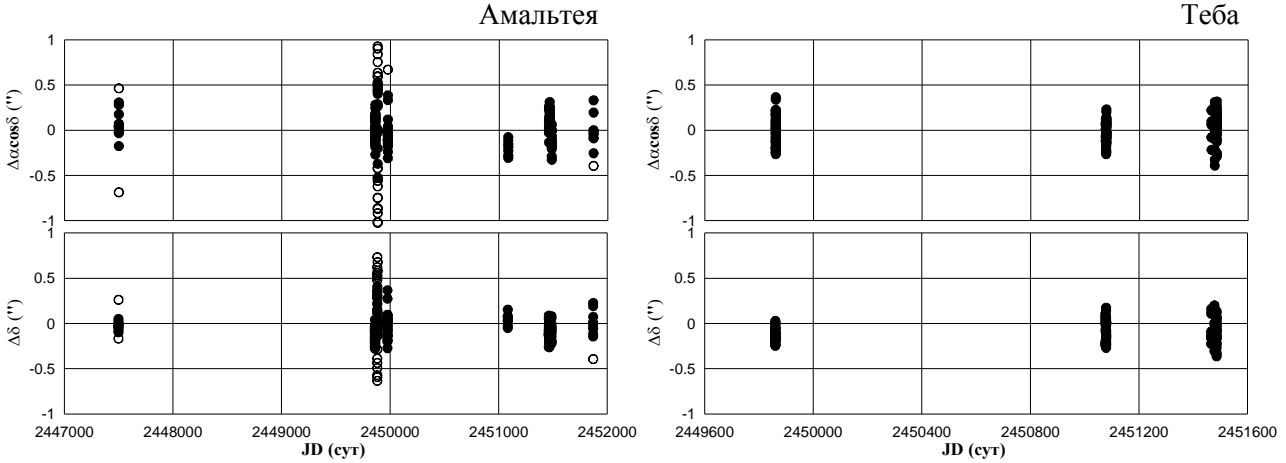


Рисунок 3 — Невязки O–C для близких спутников
(для отбракованных наблюдательных данных — \circ , для используемых — \bullet)

5. Моделирование начальной области возможных движений

Пусть $\mathbf{q}_0 \equiv (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T$ — оцениваемый начальный вектор состояния динамической системы (2), а $\hat{\mathbf{c}}_0$ его МНК-оценка. Всякий раз после дифференциальной коррекции мы получаем так называемую ковариационную матрицу $\hat{\mathbf{B}}_0 = \sigma^2 \mathbf{N}^{-1}$, которая несет в себе информацию о распределении возможных орбит (в рамках линейной модели) относительно $\hat{\mathbf{c}}_0$ в 6-мерном фазовом пространстве. Здесь \mathbf{N} — нормальная матрица. Опишем алгоритм получения возможных орбит по МНК-оценке и ковариационной матрице $\hat{\mathbf{B}}_0$ [5].

Находим методом Гаусса такую треугольную матрицу \mathbf{A} , чтобы $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \hat{\mathbf{B}}_0$. С помощью датчика псевдослучайных чисел получаем матрицу $\boldsymbol{\eta}$ размера $[s \times 6]$, состоящую из случайных чисел распределенных по нормальному закону: $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1^i, \eta_2^i, \eta_3^i, \eta_4^i, \eta_5^i, \eta_6^i)$, $i = 1, \dots, s$. Произведение $\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^T$ дает s точек в 6-мерном пространстве определяемых параметров \mathbf{q}_0 , распределенных вокруг точки $\hat{\mathbf{c}}_0$ по нормальному закону. Таким образом, возможные решения определяются по формуле $\mathbf{q}_0^i = \mathbf{A}\boldsymbol{\eta}^T + \hat{\mathbf{c}}_0$, $i = 1, \dots, s$. Эти решения будут заполнять некий гиперэллипсоид, задаваемый ковариационной матрицей $\hat{\mathbf{B}}_0$, с высокой концентрацией около $\hat{\mathbf{c}}_0$ (рисунок 6).

6. Исследование эволюции области возможных движений

Для исследования эволюции области возможных движений обычно численно интегрируют все орбиты $\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^i(t, \mathbf{q}_0^i)$, а затем оценивают их отклонения от номинальной орбиты $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t, \hat{\mathbf{c}}_0)$. Очевидно, чем больше число орбит s мы рассматриваем, тем качественнее будет представление области возможных движений, но в то же время такой подход будет требовать больших затрат процессорного времени.

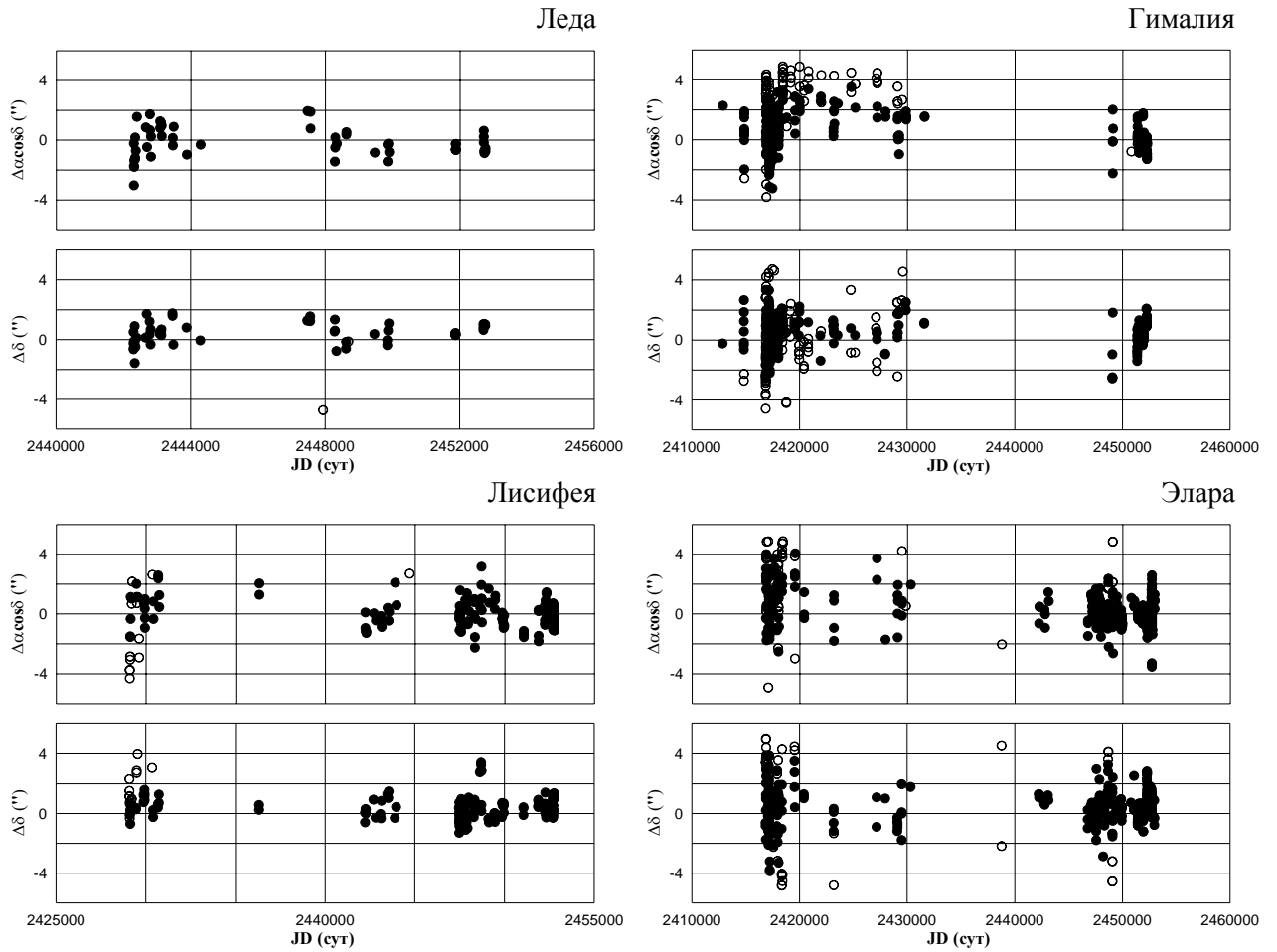


Рисунок 4 — Невязки О–С для спутников группы Гималия

Однако, если орбитальное движение спутника близко к кеплеровскому, для прогноза эволюции вероятностной области можно использовать приближенные оценки, основанные на решениях задачи двух тел. Так, нетрудно показать, что для двух близких кеплеровских орбит с начальным взаимным отклонением $\Delta \mathbf{q}_0 = (\Delta \mathbf{x}_0, \Delta \dot{\mathbf{x}}_0)^T$ будет справедлива оценка для величины $|\Delta \mathbf{x}|$ [14]

$$|\Delta \mathbf{x}| \sim \frac{|\Delta n|}{n} |\dot{\mathbf{x}}| \Delta t, \tag{3}$$

где Δn — разность средних движений орбит, n — среднее движение одной из орбит, $\dot{\mathbf{x}}$ — вектор скорости одного из спутников на момент времени t , $\Delta t = t - t_0$. Пользуясь формулой (3), можно уже после процедуры орбитальной коррекции получить приближенные оценки для размера⁴ области возможных движений. Для этого достаточно лишь знать максимальную величину разностей средних движений $|\Delta n| = \max_{i,j} |n_i - n_j|$, $i, j = 1, \dots, s$, что непосредственно определяется из начальных условий \mathbf{q}_0^i .

⁴ В данном случае под размером области понимается максимальное из всех взаимных расстояний между возможными решениями $\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^i(t, \mathbf{q}_0^i)$.

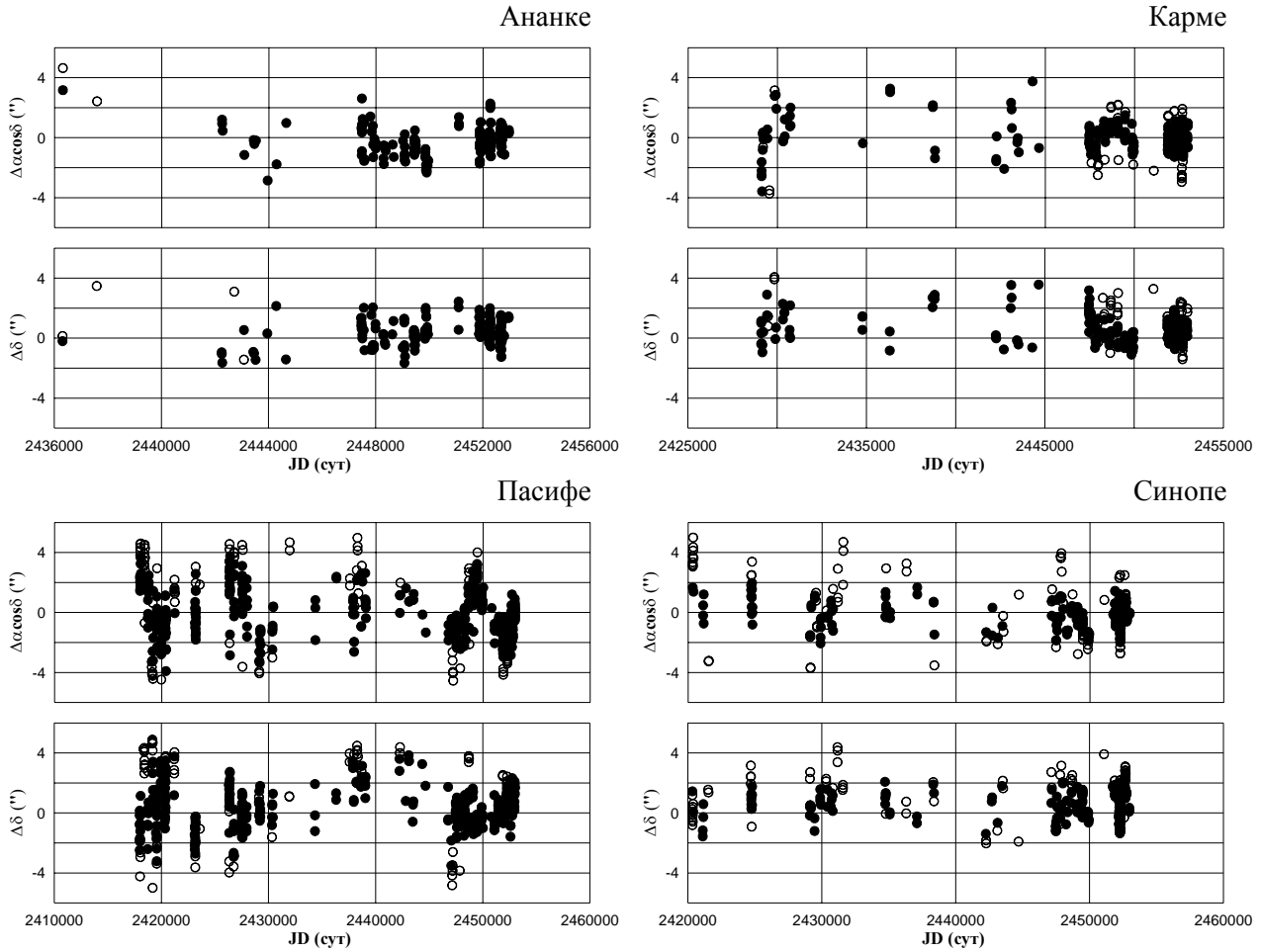


Рисунок 5 — Невязки O–C для спутников группы Пасифе

Мы исследовали точность представления размера вероятностных областей по формуле (3) для всех спутников, сравнивая оценки (3) с полученными из непосредственного интегрирования всего семейства возможных орбит. Результаты показали, что относительные размеры вероятностных областей $|\Delta x|/a$, оцененные по (3), получаются немного больше реальных и это несоответствие между оценками остается в пределах порядка от самих оцениваемых величин. Из формулы (3) можно ввести некоторое характеристическое время $\Delta\tau$, определяющее временной интервал $(t_0 - \Delta\tau, t_0 + \Delta\tau)$, на котором построенная нами модель может быть пригодна для задач идентификации объекта. Согласно (3) будем определять $\Delta\tau$ как

$$\Delta\tau = \frac{l}{a} \frac{\sigma_{tol}}{|\Delta n|}, \quad (4)$$

где a — большая полуось спутника, l — геоцентрическое расстояние до Юпитера, σ_{tol} — допустимая угловая величина вероятностной области, видимой из геоцентра. Здесь мы заменили величину скорости $|\dot{x}|$ на ее среднее значение an , а $|\Delta x|$ — на $l\sigma_{tol}$. Таким образом, характеристическое время $\Delta\tau$ говорит о том, что за пределами интервала $(t_0 - \Delta\tau, t_0 + \Delta\tau)$ размеры вероятностной области, видимой из центра Земли на небесной сфере, будут больше σ_{tol} и наш спутник может не попасть в тот наблюдаемый участок небесной сферы величины σ_{tol} , где ожидается его появление.

Таблица 4 — Пригодность моделей

Спутник	Время Δt ($\sigma_{Iol} = 1''$)	
	(сут.)	(об.)
Амальтея	46.4	92.8
Теба	67.4	99.5
Леда	1136.1	4.8
Гималия	5005.1	20.0
Лисифея	1958.5	7.5
Элара	3924.1	15.1
Ананке	1937.6	3.1
Карме	2562.7	3.7
Пасифе	2089.1	2.8
Синопе	1799.8	2.4

По формуле (4) мы получили оценки пригодности построенных нами моделей, где мы приняли $\sigma_{Iol} = 1''$ и $l = 4$ (а.е.). Результаты приведены в таблице 4.

Из таблицы видно, что для далеких спутников соответствующие интервалы пригодности довольно большие и составляют от 3 (Леда) до 14 лет (Гималия). Для близких спутников эти интервалы существенно меньше, что объясняется достаточно большими (относительно размеров орбит) начальными областями возможных движений и быстрым обращением спутников около Юпитера, что приводит к быстрому расползанию области вдоль орбиты.

Очевидно, что полученные нами оценки могут быть использованы для других σ_{Iol} . Для этого их необходимо лишь умножить на соответствующий коэффициент.

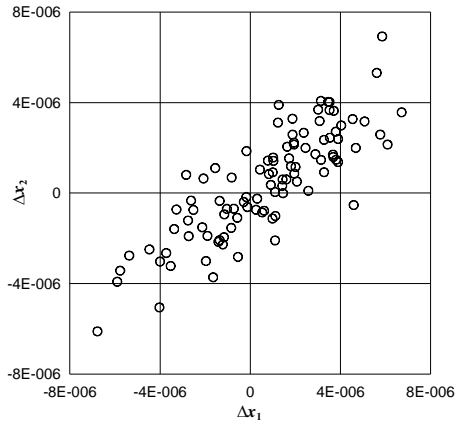


Рисунок 6 — Начальная область возможных движений относительно МНК-оценок (Гималия)

7. Заключение

Таким образом, в данной работе получены следующие результаты. По имеющимся наблюдениям рассматриваемых спутников получены их начальные динамические параметры. На основе начальных ковариационных матриц выполнено моделирование областей возможных спутниковых движений. Получены приближенные формулы для оценки размеров областей возможных движений, а также для определения временных интервалов, на которых построенные нами модели могут быть пригодны для задач идентификации. Результаты показали, что для далеких спутников интервалы пригодности, соответствующие ошибке порядка $1''$, довольно большие, от 3 до 14 лет, тогда как для близких спутников они существенно меньше, порядка 2 месяцев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jacobson, R. A. Revised Ephemerides of the Inner Jovian Satellites. JPL IOM 314. 1994. P. 10-101.
2. Jacobson R. A. The Determination of the Orbits of the Outer Jovian Satellites. American Astronomical Society, 2000. V. 32. P. 861.
3. Emelyanov N. V. Ephemerides of the Outer Jovian Satellites // Astron. Astrophys. 2005. V. 435. I 3. P. 1173–1179.

4. Emelyanov N. V., Kanter A. A. Orbits of New Outer Planetary Satellites Based on Observations // *Solar System Research*. 2005. V. 39. I. 2. P. 112–123.
5. Черницов А.М., Батурич А.П., Тамаров В.А. О представлении вероятностных областей движения малых тел // *Астрономия и геодезия*. Томск: Изд-во ТГУ. В. 16. 1998. С. 98–113.
6. Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* 1974. V. 10. P. 35–55
7. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука. 1976. 416 с.
8. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е. Теория движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979–2000 годы. Томск: Изд-во ТГУ 1978. 122 с.
9. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М: Наука. 1972. 384 с.
10. Lieske J. H. Galilean Satellites Ephemerides E5 // *Astron. Astrophys.* 1998. V. 129. P. 205–217.
11. <http://www.imcce.fr>
12. Варфоломеев М.И., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., Уральская В.С. Эфемеридное обеспечение наблюдательных программ ближайших лет // Тезисы докладов международной конференции «Околоземная астрономия – 2005» 19-24 сентября 2005 г. г. Казань. С. 42–43.
13. <http://lnfm1.sai.msu.ru/neb/nss/index.htm>
14. Avdyushchev V. A. Stabilization of orbital motion. *Cel. Mech.* 2003. V. 87. I 4. P. 383 – 409.