

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)

Физический факультет

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
д-р физ.-мат. наук


О.Н. Чайковская

подпись

« 16 » июня 2021 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

Моделирование и исследование влияния светового давления в орбитальном движении ИСЗ

по направлению подготовки 03.03.02 — Физика
профиль «Фундаментальная физика»

Михайлова Яна Андреевна

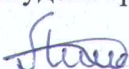
Руководитель ВКР
д-р физ. мат. наук


В.А. Авдюшев

подпись

« 16 » июня 2021 г.

Автор работы
студент группы № 051772


Я.А. Михайлова

подпись

« 16 » июня 2021 г.

РЕФЕРАТ

Выпускная квалифицированная работа «Моделирование и исследование влияния светового давления в движении ИСЗ» состоит из 37 страниц печатного текста, 20 рисунков, 3 таблиц и 7 источников использованной литературы.

Ключевые слова: искусственные спутники Земли, орбитальное движение, световое давление, численное моделирование.

Объект исследования — орбитальное движение искусственных спутников Земли.

Предмет исследования — влияние светового давления в орбитальном движении.

Цель работы — численное моделирование и исследование влияния светового давления в орбитальном движении ИСЗ, а также выявление возможной потери позиционной точности при прохождении спутника через полутеневые участки орбиты и разработка алгоритма редуцирования шага интегрирования для сохранения позиционной точности.

В работе на основе численного моделирования исследуется влияние светового давления в орбитальном движении искусственных спутников Земли. Выявляется проблема потери точности в положении спутника при численном моделировании полутеневых участков орбиты. Предлагается алгоритм редуцирования шага интегрирования для решения проблемы потери точности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ	4
1.1 Возмущения от сжатия Земли	4
1.2 Притяжение Луны и Солнца	5
1.3 Световое давление	6
2 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РУНГЕ–КУТТЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ	8
2.1 Схема интегрирования метода	8
2.2 Редуцирование шага при моделировании теневых участков орбиты.....	8
3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	12
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	29
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ.....	30
ПРИЛОЖЕНИЕ	31

ВВЕДЕНИЕ

Высокоточные эфемериды искусственных спутников Земли (ИСЗ) рассчитываются посредством высокоточного численного моделирования на основе сложных дифференциальных уравнений орбитального движения, которые содержат самые разнообразные возмущающие факторы как гравитационной, так и негравитационной природы: притяжение Земли, Луны, Солнца, релятивистские эффекты и т.д. Тонкий, но очень важный возмущающий фактор, который также необходимо учитывать, — это световое давление от Солнца. Его моделирование сопряжено с некоторыми сложностями. Во-первых, требуется знание пространственной модели спутника и его вращательного движения, что определяет площадь миделева сечения, от которого напрямую зависит влияние светового давления. Во-вторых, вход спутника в тень и его выход из тени может моделироваться с ощутимой потерей точности. Дело в том, что для высокоточного моделирования применяются интеграторы высоких порядков, которые при достаточно гладких возмущениях позволяют численно решать дифференциальные уравнения с большим шагом. Однако кратковременное прохождение спутника через полутень сопровождается хоть и малыми, но весьма быстрыми возмущениями, на которые алгоритм выбора шага при моделировании может не отреагировать. Несомненно, это приводит к потере точности вычисляемой эфемериды, поскольку интегрирование орбиты на таких участках следует выполнять с малым шагом.

Целью выпускной работы являлось численное моделирование и исследование влияния светового давления в орбитальном движении ИСЗ, а также выявление возможной потери точности при прохождении спутника через полутеневые участки орбиты. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи: 1) ознакомиться с принципами построения численной модели орбитального движения ИСЗ; 2) используя классический метод Рунге–Кутты, построить простую численную модель орбитального движения с учетом влияния светового давления на процедурном языке программирования Паскаль; 3) исследовать возмущения от светового давления в орбитальных элементах на примере космического аппарата (КА) глобальной навигационной спутниковой системы (ГЛОНАСС), а также трех фрагментов космического мусора с большой парусностью на орбитах международной космической станции (МКС), ГЛОНАСС и геостационарной зоны (ГЕО); 4) оценить эффективность численного моделирования при различных величинах шага интегрирования с целью выявления потери точности в положении при прохождении спутника через полутеневые участки орбиты; 5) разработать специальный алгоритм редуцирования шага интегрирования для сохранения позиционной точности при моделировании орбиты на полутеневых участках; 6) исследовать эффективность алгоритма редуцирования шага на рассматриваемых ИСЗ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛ

Пусть искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется в поле тяготения центральной планеты (с точностью до второй зональной гармоники) под действием сил притяжения Луны и Солнца, а также светового давления от светила. Тогда в геоцентрической геоэквадориальной системе координат дифференциальные уравнения орбитального движения спутника будут иметь вид

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_L,$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ — геоцентрический вектор положения ИСЗ; t — время; μ — гравитационный параметр Земли; \mathbf{P} — равнодействующая возмущающих сил: \mathbf{P}_J — сжатие Земли до второй зональной гармоники; \mathbf{P}_S — притяжение Солнца; \mathbf{P}_M — притяжение Луны; \mathbf{P}_L — световое давление.

1.1 Возмущения от сжатия Земли

Возмущающая сила от сжатия Земли \mathbf{P}_J моделировалась с точностью до второй зональной гармоники. Ее можно определить как

$$\mathbf{P}_J = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right)^T, \quad (2)$$

где потенциальная функция имеет вид

$$U = -\frac{\mu J_2 b_E^2}{|\mathbf{x}|^3} L_2(\sin \varphi), \quad \sin \varphi = \frac{x_3}{|\mathbf{x}|}. \quad (3)$$

Здесь J_2 — коэффициент при второй зональной гармоники; b_E — экваториальный радиус Земли; φ — широта спутника; $L_2(z)$ — полином Лежандра второй степени. Дифференцируя потенциальную функцию U (3) по координатам \mathbf{x} , получаем возмущающую силу от сжатия Земли (2):

$$\mathbf{P}_J = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = -\frac{3\mu J_2}{|\mathbf{x}|^3} \left[\frac{\sin \varphi}{|\mathbf{x}|} \left(\mathbf{a} - \sin \varphi \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - L_2(\sin \varphi) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \right],$$

где $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ — орт оси аппликат. Значения гравитационных параметров Земли приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Гравитационные параметры Земли

Параметр	μ	J_2	b_E
Значение	398600.43560 км ³ /сек ²	0.0010826	6378.14 км

1.2 Притяжение Луны и Солнца

Луна и Солнце довольно отдаленные от спутника тела, поэтому их притяжение можно моделировать как от гравитирующих материальных точек, т.е.

$$\mathbf{P}_P = -\mu_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} - \mu_P \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_P = (x_{1P}, x_{2P}, x_{3P})^T$ — положение тела P , а μ_P — его гравитационный параметр.

Положения Луны и Солнца в (4) вычислялись по формулам кругового движения. Их параметры получены методом наименьших квадратов по высокоточным эфемеридам DE406 [1] на 10-летнем интервале времени. На рисунке 1 показаны относительные ошибки положений гравитирующих тел на 100-летнем временном интервале. Несмотря на то что ошибки достаточно большие, в контексте поставленной перед нами задачи точность рассчитываемых положений Луны и Солнца для моделирования возмущающих сил вполне приемлема.

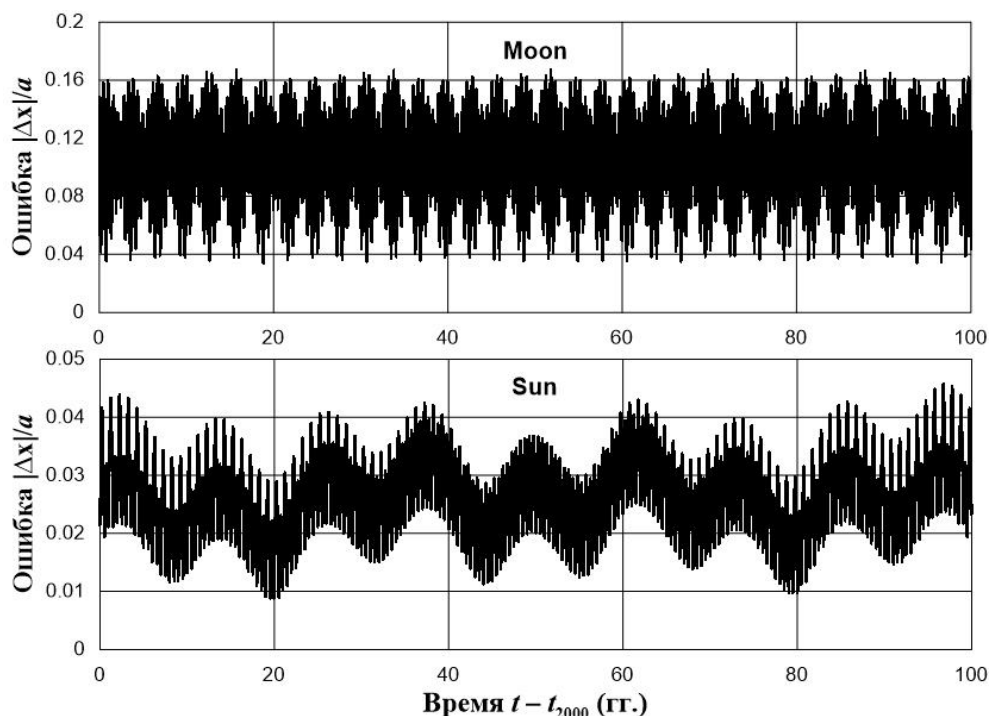


Рисунок 1 — Относительные ошибки в положениях Луны (Moon) и Солнца (Sun)

Формулы кругового движения для определения положений Луны и Солнца представимы в виде

$$\mathbf{x}_P = a_P(\mathbf{e}_{P1} \cos v_P + \mathbf{e}_{P2} \sin v_P), \quad v_P = n_P(t - t_0), \quad (5)$$

где \mathbf{e}_{P1} и \mathbf{e}_{P2} — взаимно перпендикулярные орты, определяющие орбитальную плоскость тела P ; a_P , v_P и n_P — его большая полуось, аномалия и среднее движение соответственно; $t_0 = 2451545$ — эпоха J2000. Значения используемых в (5) параметров приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Параметры для расчёта положения Луны (M) и Солнца (S)

Параметр	Значение
\mathbf{e}_{M1}	(-0.781828867, -0.662735076, -0.189098618)
\mathbf{e}_{M2}	(0.684636126, -0.662034129, -0.303143777)
a_M , км	384400.0
n_M	0.229970839
\mathbf{e}_{S1}	(0.187697338, -0.901092508, -0.390898965)
\mathbf{e}_{S2}	(0.982206403, 0.172203218, 0.074665066)
a_S , км	149597871.0
n_S	0.0172024238

1.3 Световое давление

Световое давление — давление, оказываемое светом на отражающие и поглощающие тела. В работе мы исследовали, как световое давление от Солнца действует на орбитальное движение ИСЗ. Силы, создаваемые радиационным давлением, как правило, очень малы в сравнении с другими возмущающими силами. Тем не менее, при высокоточных расчетах их все же нужно учитывать.

В работе применялась стандартная модель светового давления [2]:

$$\mathbf{P}_L = k\theta a_E^2 \frac{\sigma}{m} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3}, \quad (6)$$

где $k = 4.56 \cdot 10^{-6}$ Н/м² — солнечная постоянная, θ — постоянная, которая характеризует отражающие свойства объекта, a_E — астрономическая единица σ и m — площадь миделева сечения и масса исследуемого объекта соответственно. Величина $\gamma = \sigma/m$ определяет парусность спутника.

Для учета прохождения тени Земли в (6) как множитель вводится так называемая функция тени Φ . Она представляет собой площадь видимой части светила, перекрываемого Землей. Предположим, что Солнце и Земля имеют форму шара. Введем радиусы r_s и

r_E видимых со спутника дисков Солнца и Земли, а также угловое расстояние между ними r [3]:

$$r_S = \arcsin \frac{b_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_E = \arcsin \frac{b_E}{|\mathbf{x}|}, \quad r = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)}{|\mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|},$$

где b_S и b_E — соответствующие радиусы светила и перекрывающего тела.

Функция тени вводится при условии затмения:

$$r < r_S + r_E \quad \text{и} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S| > |\mathbf{x}|.$$

Ее можно представить в виде

$$\Phi = 1 - \frac{s}{s_S},$$

где s — площадь ущерба:

$$s = \begin{cases} s_{SE}, & \text{если } r > |r_S - r_E|, \\ s_E, & \text{если } r \leq |r_S - r_E| \text{ и } r_E < r_S, \\ s_S, & \text{если } r \leq |r_S - r_E| \text{ и } r_E \geq r_S; \end{cases}$$

а s_S , s_P и s_{SE} — площади дисков Солнца и Земли, а также их пересечения:

$$s_S = \pi R_S^2, \quad s_P = \pi r_E^2, \quad s_{SE} = \frac{r_S^2}{2} (\theta_S - \sin \theta_S) + \frac{r_E^2}{2} (\theta_E - \sin \theta_E)$$

Величины θ_S и θ_E — это углы между радиальными направлениями из центров дисков в точки пересечения их границ. Они определяются по формулам

$$\theta_S = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_S^2 - r_E^2}{2 r r_S} \right), \quad \theta_E = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_E^2 - r_S^2}{2 r r_E} \right).$$

2 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РУНГЕ–КУТТЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

2.1 Схема интегрирования метода

Дифференциальные уравнения движения ИСЗ интегрировались численно классическим методом Рунге–Кутты (4-го порядка) [4]. Пусть необходимо решить задачу Коши

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (7)$$

Тогда применительно к (7) схема интегрирования классического метода Рунге–Кутты будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + h/2, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_1/2), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(t_n + h/2, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_2/2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3), \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \quad t_{n+1} = t_n + h, \end{aligned} \quad (8)$$

где h — величина шага интегрирования.

Чтобы применить метод к дифференциальным уравнениям второго порядка (1), их нужно привести к системе уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P},$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ — вектор скорости ИСЗ.

2.2 Редуцирование шага при моделировании теневых участков орбиты

Орбиты большинства ИСЗ почти круговые и их можно интегрировать с постоянным шагом. Однако, если требуется высокая точность расчета спутниковой эфемериды, в численном интегрировании орбиты могут возникать определенные сложности, связанные с сохранением точности при прохождении спутником тени Земли. Вхождение в тень и выход из нее происходит за очень короткие периоды времени, что приводит к почти ступенчатому поведению возмущающей силы от светового давления. Несмотря на ее малость, резкие изменения могут приводить к заметной потере точности численного интегрирования. Чтобы сохранить точность, эти участки орбиты необходимо интегрировать с редуцированным шагом.

Насколько нам известно, в компьютерных лабораториях эфемеридного обеспечения ГЛОНАСС для численного моделирования спутниковых орбит применяют неявный многошаговый метод Адамса 7-го порядка. При полном освещении спутника орбита инте-

грируется с большим постоянным шагом. Чтобы не проскочить тень, на каждом шаге выполняется полиномиальная интерполяция для положения спутника по нескольким ранее вычисленным положениям и на основе интерпеллянта анализируется поведение функции тени на следующем шаге.

Если функция тени становится меньше единицы, выполняется полиномиальная интерполяция для функций дифференциальных уравнений по ранее вычисленным их значениям, которые составляют многошаговую схему интегрирования, и на основе интерпеллянтов они пересчитываются на узловые значения внутри текущего шага интегрирования. Таким образом, получается набор функций для схемы интегрирования с шагом, величина которого в 6 раз меньше исходного. Далее выполняется интегрирование с малым шагом до тех пор, пока функция тени не станет равной единице и пока на освещенном участке орбиты не наберутся необходимые функции дифференциальных уравнений для сборки схемы интегрирования с исходным большим шагом.

Этот алгоритм редуцирования шага представляется нам достаточно сложным, хотя вся сложность алгоритма обусловлена, главным образом, спецификой используемых многошаговых схем интегрирования с постоянным шагом. Кроме того, при таком подходе может ухудшаться точность вычислений после пересчета функций многошаговой схемы с применением интерполяции вследствие ошибок интерполяционных формул.

При использовании одношаговых методов Рунге–Кутты алгоритм редуцирования шага интегрирования может быть значительно проще и без дополнительных потерь в точности. При высокоточном моделировании орбит ИСЗ применяют неявные коллокационные интеграторы высоких порядков на гауссовых разбиениях [5]. Прохождение тени в них выявляется на этапе оценивания локальной ошибки интегрирования. Если она больше задаваемого порогового значения, шаг выполняется повторно с меньшей величиной в соответствии с оценкой локальной ошибки. Однако одной из особенностей любого гауссова интегратора является то, что оценивание локальной ошибки в нем выполняется как для метода с почти удвоенно меньшим порядком, т.е. ошибка оценивается неадекватно. Поэтому проблему потери точности полностью разрешить не удастся, хотя численные результаты все же становятся немного точнее.

Для сохранения точности необходим специальный алгоритм с выявлением теневых участков орбиты и принудительным редуцированием шага. Применительно к классическому методу Рунге–Кутты мы предлагаем простой подход для разрешения проблемы потери точности, который также может быть применен в методах более высоких порядков.

Точность интегрирования ухудшается вследствие резкого (почти скачкообразного) изменения возмущающей силы от светового давления при прохождении спутником полу-

тени, поэтому уменьшать шаг интегрирования необходимо именно на полутеневых участках орбиты. После выполнения очередного шага мы имеем положение \mathbf{x}_0 и скорость $\dot{\mathbf{x}}_0$. Признак исходного шага, задаваемого в начале интегрирования, — $flag = 0$. Алгоритм редуцирования шага состоит в следующей последовательности действий (рисунок 2).

1. Используя положение и скорость, в линейном приближении находим положение на следующем шаге: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0 h$.
2. Для положений \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_1 вычисляем значения функции тени Φ_0 и Φ_1 .
3. Если $\Phi_0 \neq \Phi_1$ (в течение шага спутник проходит полутень) и $flag = 0$, уменьшаем шаг: $h := h/k$, где k — делитель шага, и задаем признак редуцированного шага $flag := 1$.
4. Далее, если $\Phi_0 = \Phi_1$ (в течение шага спутник либо в тени Земли, либо полностью освещен Солнцем) и $flag = 1$, возвращаемся к исходному шагу: $h := hk$, задаем признак исходного шага $flag := 0$, и переходим к п. 1, для того чтобы проверить, не происходит ли прохождение спутником полутени внутри увеличенного шага (это может иметь место непосредственно перед входом в тень или выходом из нее).
5. Выполняем следующий шаг интегрирования.

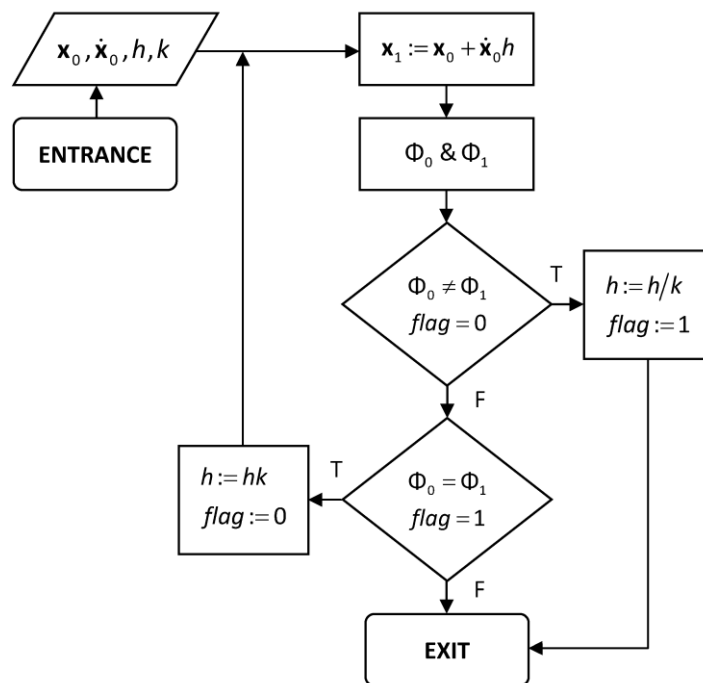


Рисунок 2 — Блок-схема процедуры STEPSIZE

Здесь делитель шага k подбирается опытным путем по достижении наилучшей точности. Вопрос оптимального делителя рассматривается в следующем разделе. Алгоритм редуцирования шага реализован в программной процедуре STEPSIZE. Ее блок-схема представлена на рисунке 2.

3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Возмущение от светового давления исследовалось на примере КА ГЛОНАСС, а также трех фрагментов космического мусора с большой парусностью на орбитах МКС, ГЛОНАСС и геостационарной зоны [6]. Для проведения исследований разработан программный комплекс на языке Delphi — Численная модель орбитального движения ИСЗ (см. Приложение). Модель основана на дифференциальных уравнениях (1), которые интегрируются численно классическим методом Рунге–Кутты (8).

ГЛОНАСС — это российская навигационная спутниковая система. Штатная орбитальная группировка ГЛОНАСС состоит из 24 спутников, находящихся на средневысотных околокруговых орбитах с номинальными значениями высоты — 19100 км, наклона — 64.8° и периода — 11 часов 15 минут 44 секунды (таблица 3; рисунок 3). Позволяет при наличии ГЛОНАСС-приёмника в абсолютно любой точке Земного шара, а также в космическом пространстве вблизи планеты определять местоположение и скорость объектов. Система ГЛОНАСС предназначена для оперативного глобального обеспечения неограниченного числа потребителей — наземного, морского, воздушного и космического базирования — навигационной информацией и сигналами точного времени.

Геостационарная зона располагается на высоте 35786 км в экваториальной плоскости Земли (таблица 3; рисунок 3). Орбитальный период каждого объекта в геостационарной зоне 23 часа 56 минут 4 секунды (звездные сутки), что обеспечивает ему стационарное положение во вращающейся координатной системе, связанной с Землей. Геостационарные спутники используются для междугородней и международной телефонной связи. Они обеспечивают также передачу данных, телевизионное вещание, выход в интернет. В настоящее время на геостационарной орбите находится около 500 ИСЗ. Около половины из них — действующие спутники. Другая половина — космический мусор.

МКС — это пилотируемая орбитальная станция, используемая как многоцелевой космический исследовательский комплекс. МКС движется на низковысотной (407 км) почти круговой орбите с периодом обращения около 93 минут (таблица 3; рисунок 3). Наклонение орбиты МКС относительно экватора Земли — 51.6° .

Таблица 3 — Орбитальные параметры ИСЗ и их парусность

Параметр	ГЛОНАСС	Геостационарный	МКС
Большая полуось, км	25778	42164	6771
Период, часы	11.25	23.93	1.55
Эксцентриситет	0.001	0	0.01
Наклонение, $^\circ$	64.8	0	51.64
Парусность, $\text{м}^2/\text{кг}$	$10^{-2}-1$	1	1

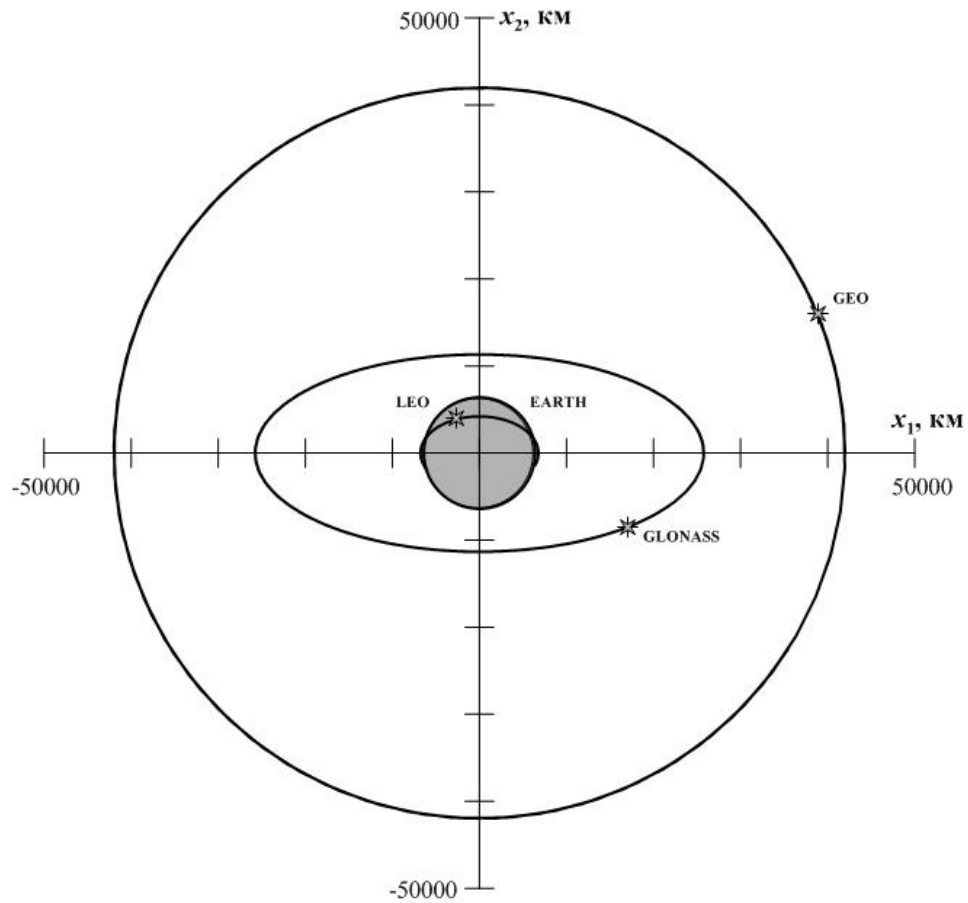


Рисунок 3 — Орбиты КА ГЛОНАСС (GLONASS), геостационарного спутника (GEO) и объекта на орбите МКС (LEO)

Влияние светового давления исследовалось в позиционных орбитальных элементах a (большая полуось), e (эксцентриситет) и i (наклонение). Возмущения в элементах оценивались как отклонения их текущих значений, получаемых по результатам численного интегрирования на каждом шаге, от начальных.

Пусть имеем положение \mathbf{x} и $\dot{\mathbf{x}}$, а также гравитационную постоянную μ . Тогда позиционные элементы вычисляются по следующим формулам [7]:

$$h = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|}, \quad a = -\frac{\mu}{2h}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{g} = -\frac{\mu \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{c}, \quad e = \frac{|\mathbf{g}|}{\mu}, \quad i = \arcsin \frac{c_3}{|\mathbf{c}|},$$

где h — энергия; \mathbf{c} — момент количества движения; \mathbf{g} — вектор Лапласа.

Возмущения в орбитальных элементах КА ГЛОНАСС приведены на рисунке 4. По большой полуоси мы видим периодические изменения с собственной частотой обращения спутника и амплитудой в несколько километров. Эксцентриситет возрастает, но очень слабо. Скорее всего, мы видим лишь малый фрагмент его долгопериодического изменения. Между тем периодические возмущения в наклонении ничтожно малые. На ри-

сунке 4 показаны возмущения только от светового давления. Несмотря на то что возмущения в эксцентриситете и наклонении малы, в большой полуоси они достигают 4 м, что достаточно много для численного моделирования с субмиллиметровой точностью. Поэтому световое давление, безусловно, следует учитывать для расчета высокоточных эфемерид спутников ГЛОНАСС.

Для фрагмента космического мусора в зоне ГЛОНАСС с большой парусностью структура возмущений в большой полуоси и наклонении такая же (рисунок 6), как и для КА ГЛОНАСС, в то время как в эксцентриситете вследствие светового давления наблюдается вековое изменение, что, видимо, есть проявление долгопериодических изменений на коротком интервале времени. Характер возмущений только от светового давления точно такой же, что и для КА ГЛОНАСС, однако величина их больше на два порядка.

Возмущения в движении фрагментов космического мусора на геостационарной орбите и в зоне МКС весьма различны (рисунки 8 и 10), поскольку для первого главным возмущающим фактором является притяжение Луны, тогда как для второго — несферичность гравитационного поля Земли. Характер возмущений от светового давления для геостационарного объекта (рисунок 9) почти такой же, как и для объекта зоны ГЛОНАСС, хотя величина их значительно больше. Например, в большой полуоси возмущения даже превышают километровые значения. В то же время влияние светового давления на низкой орбите МКС (рисунок 11) существенно слабее, нежели на средневысотной орбите ГЛОНАСС. Несмотря на большую парусность фрагмента космического мусора, возмущения в большой полуоси в зоне МКС такого же порядка, что и для КА ГЛОНАСС с малой парусностью.

Для объектов зон ГЛОНАСС и ГЕО возмущения от светового давления оценивались в периоды полного освещения спутников. В этих орбитальных зонах объекты проходят тень Земли на каждом витке в течение двух периодов за год длиной около 45 суток. МКС же всегда проходит тень Земли на каждом витке. Это явление отражается на характере возмущений от светового давления: при прохождении спутником полутени Земли световое давление изменяется почти скачкообразно за очень короткий интервал времени (см. функцию тени на рисунке 12, а также длительность полутени на рисунках 13–15), а в тени оно отсутствует, что проявляется в кривой возмущения как плато постоянного значения с угловатыми краями (рисунок 11). Численное интегрирование таких возмущений при сохранении величины шага может сопровождаться заметной потерей точности в положении спутника. В особенности эта проблема актуальна при высокоточном расчете эфемерид действующих спутников, а также при моделировании орбит фрагментов космического мусора с большой парусностью.

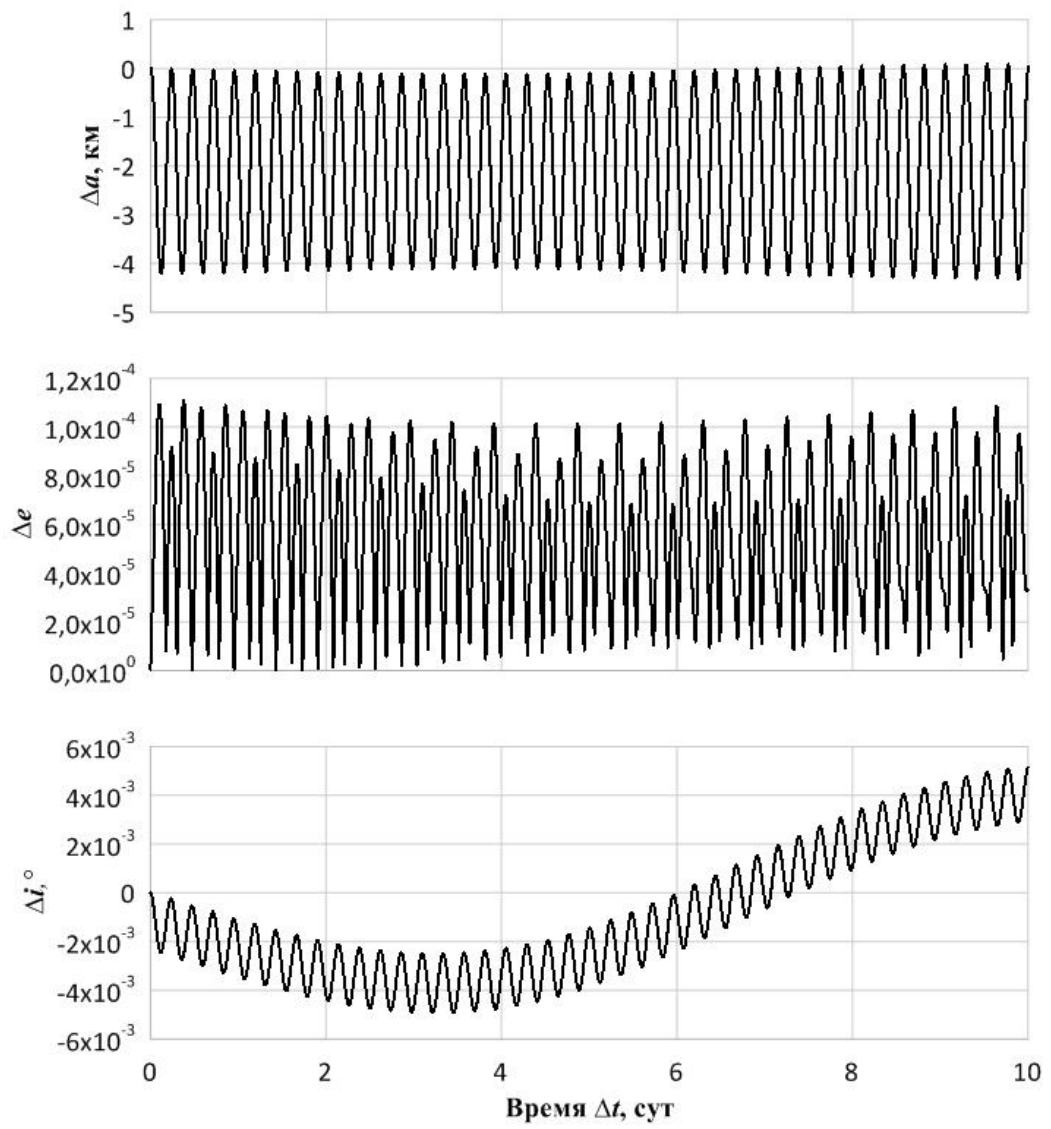


Рисунок 4 — Суммарные возмущения в кеплеровых элементах спутника ГЛОНАСС

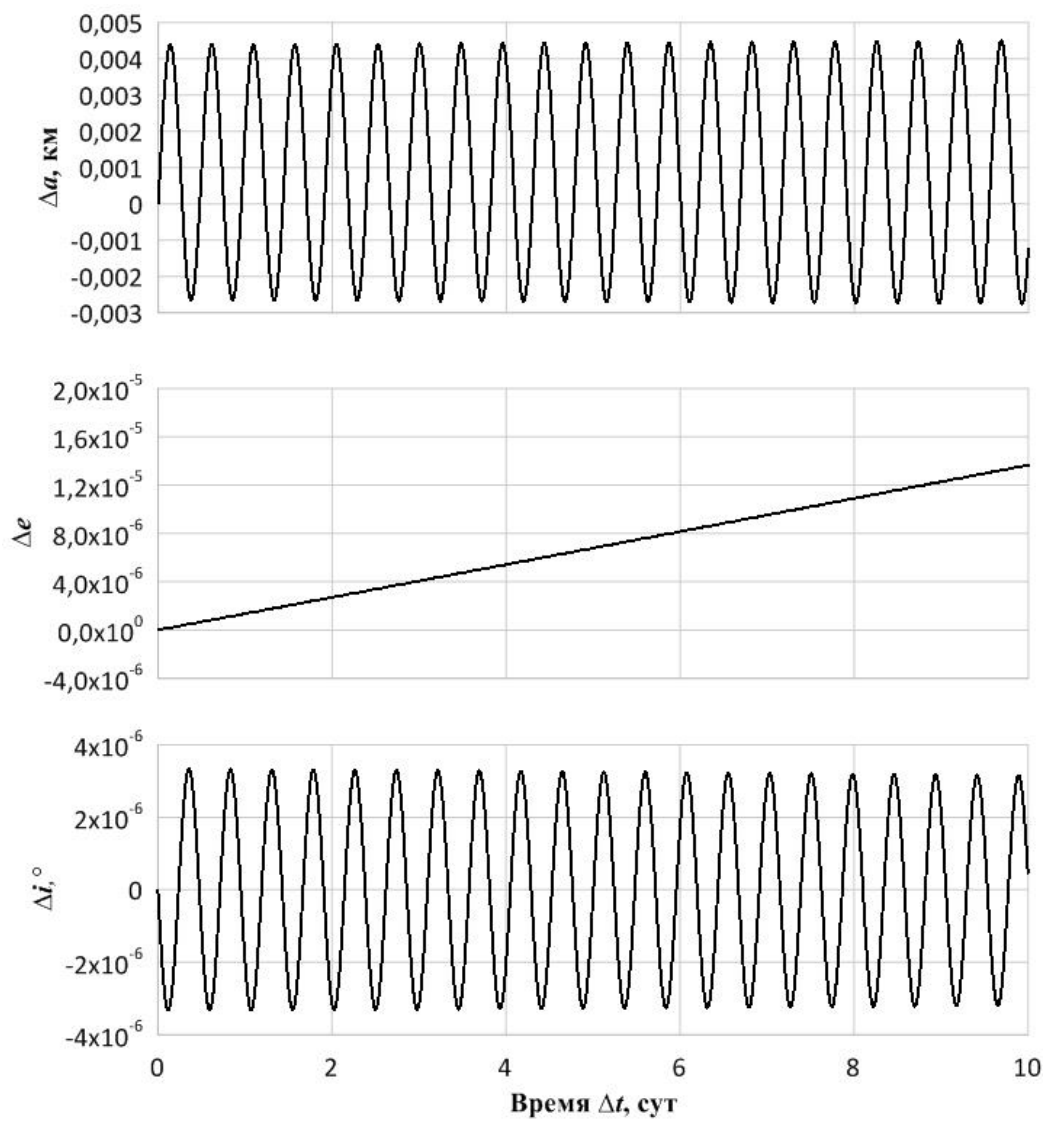


Рисунок 5 — Возмущения от светового давления в кеплеровых элементах КА ГЛОНАСС

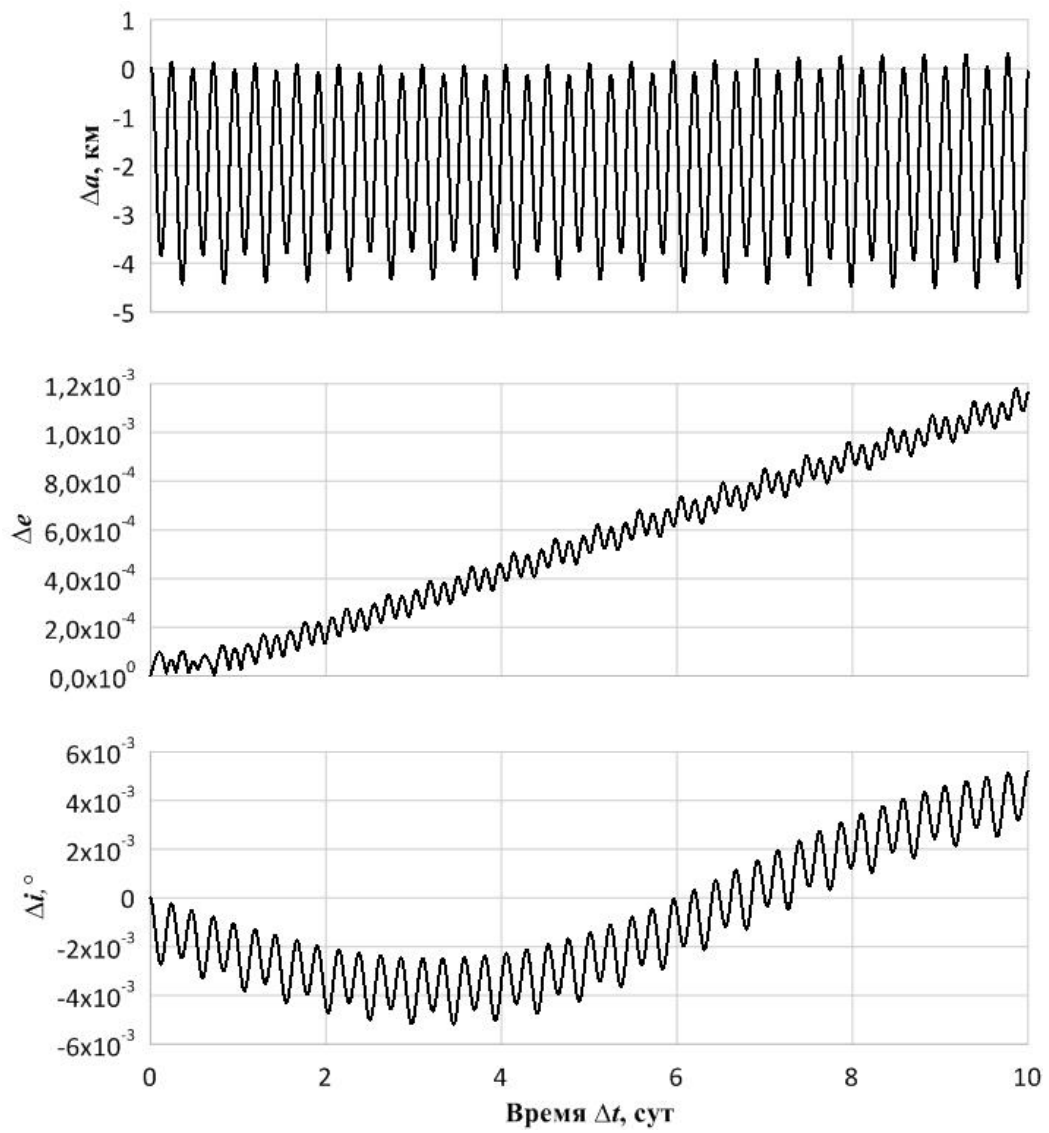


Рисунок 6 — Суммарные возмущения в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в орбитальной зоне ГЛОНАСС с парусностью $\gamma = 1$

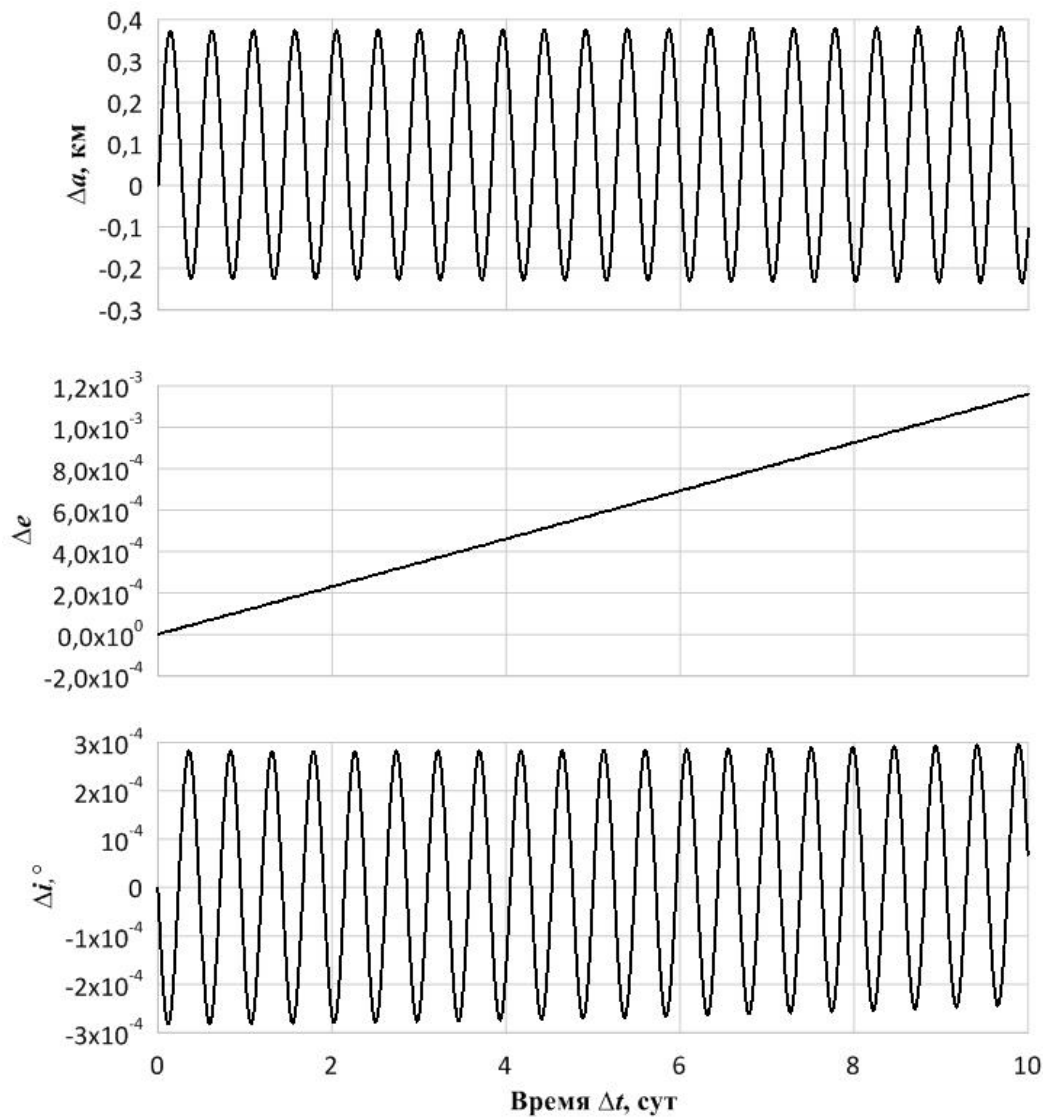


Рисунок 7 — Возмущения от светового давления в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в орбитальной зоне ГЛОНАСС с парусностью $\gamma = 1$

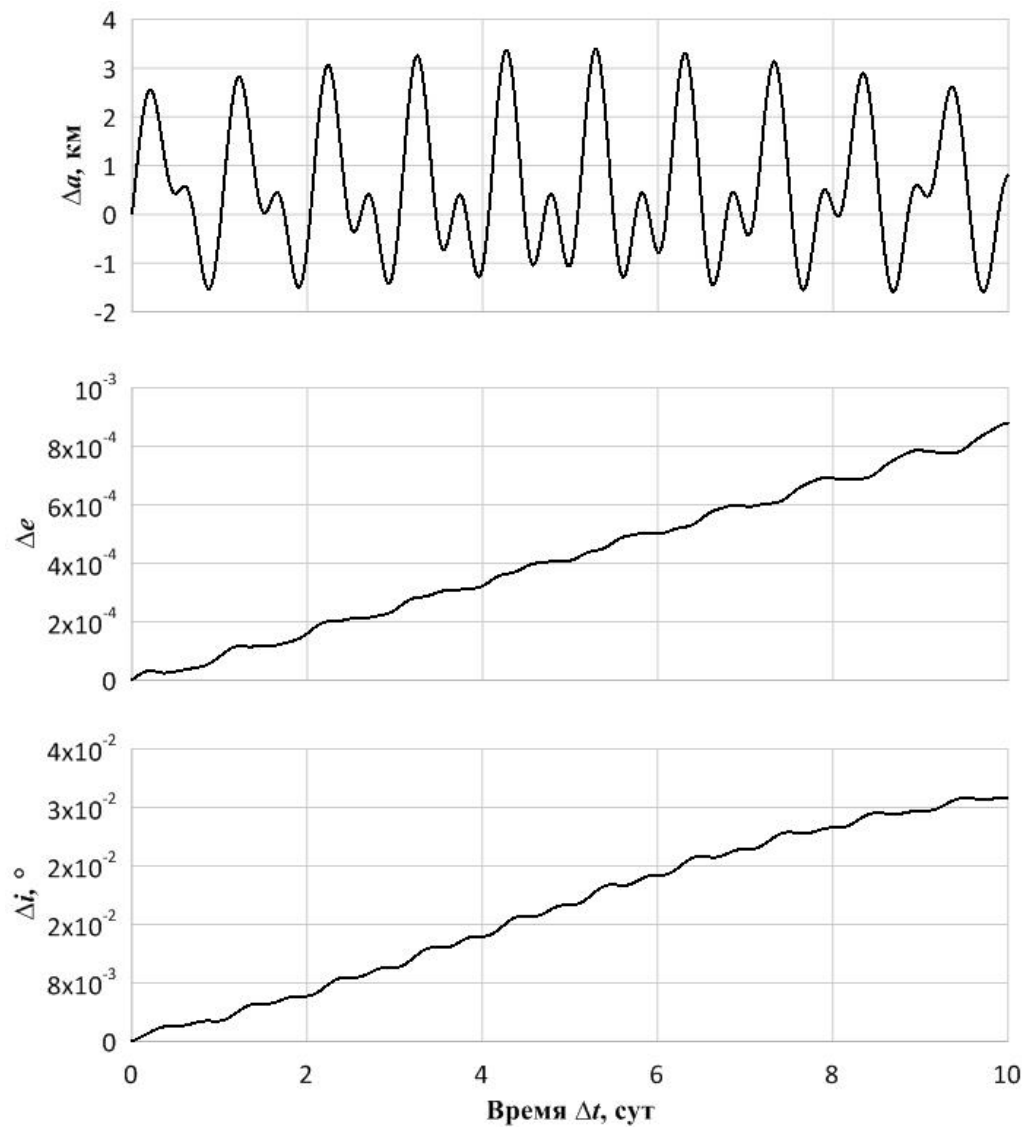


Рисунок 8 — Суммарные возмущения в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в геостационарной орбитальной зоне с парусностью $\gamma = 1$

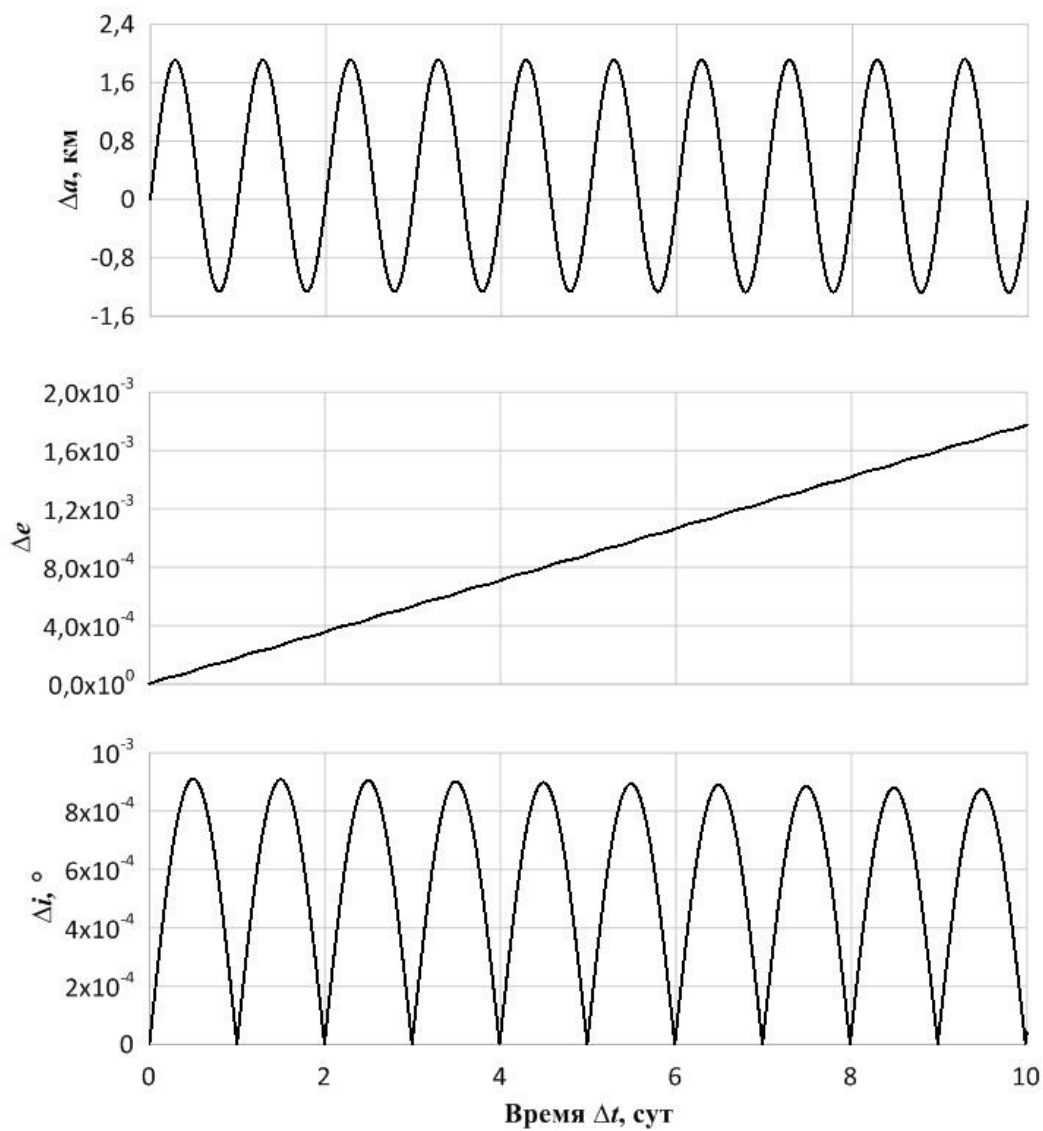


Рисунок 9 — Возмущения от светового давления в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в геостационарной орбитальной зоне с парусностью $\gamma = 1$

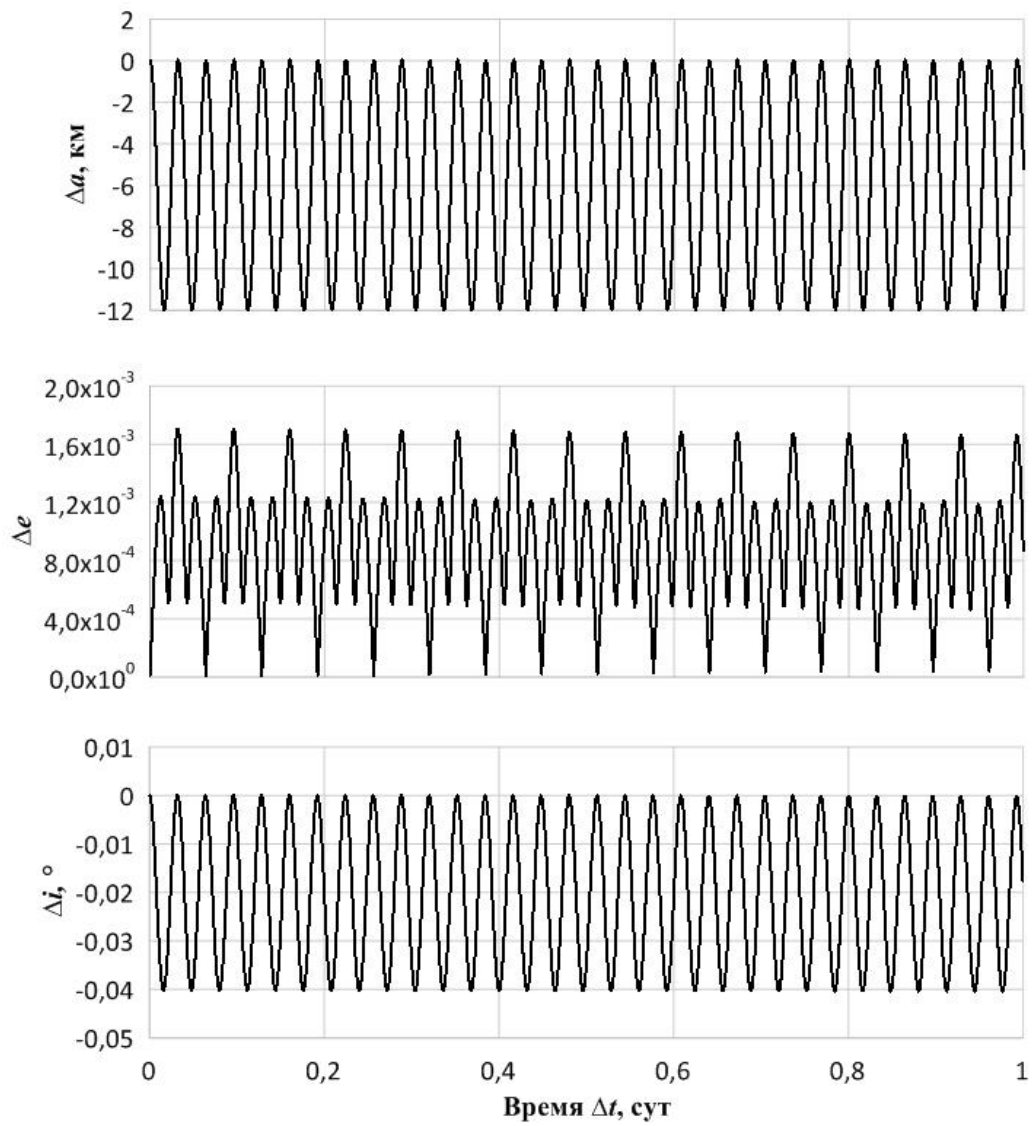


Рисунок 10 — Суммарные возмущения в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в орбитальной зоне МКС с парусностью $\gamma = 1$

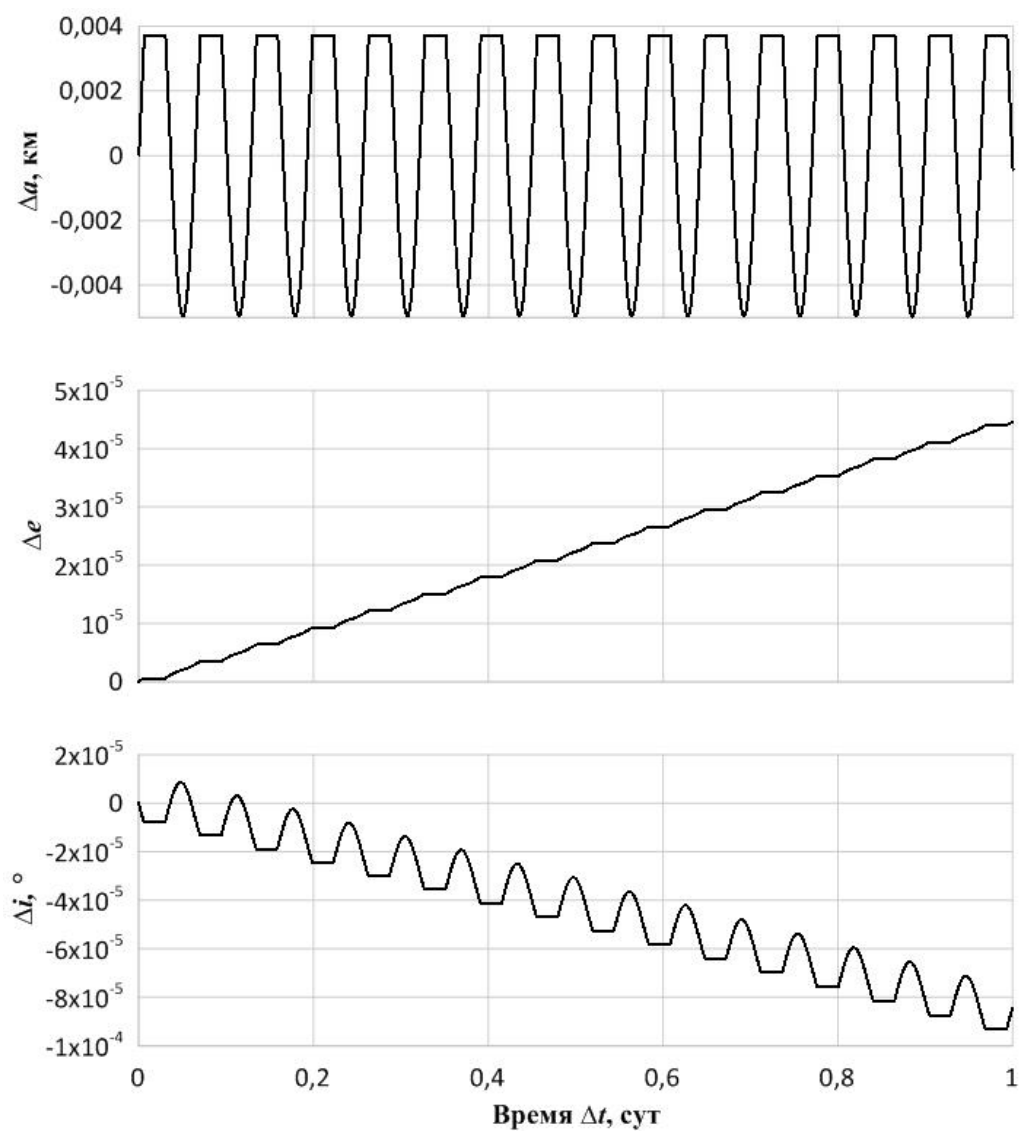


Рисунок 11 — Возмущения от светового давления в кеплеровых элементах фрагмента космического мусора в орбитальной зоне МКС с парусностью $\gamma = 1$

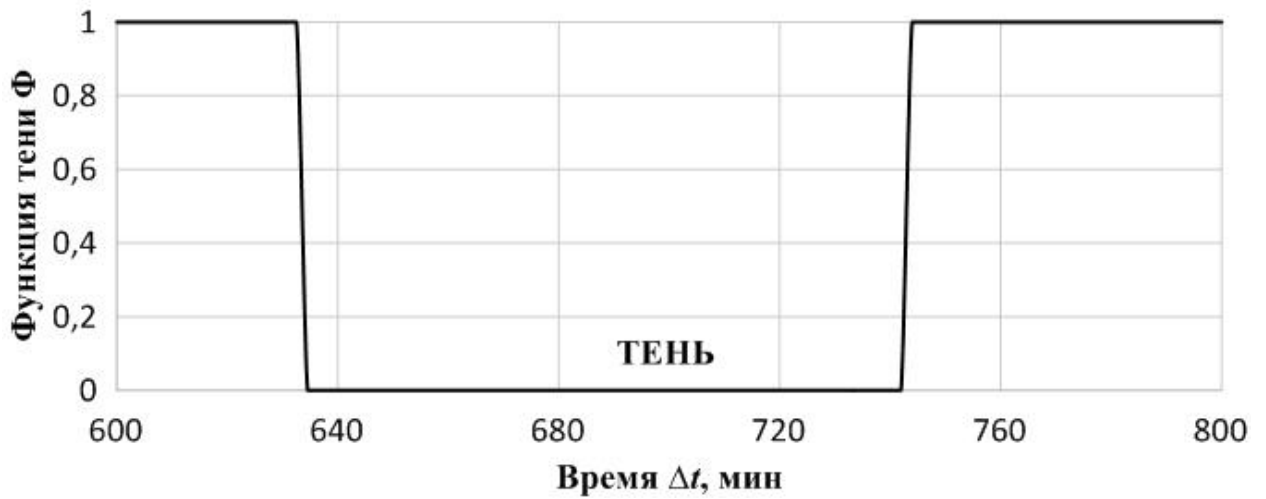


Рисунок 12 — Функция тени для КА ГЛОНАСС (начальная эпоха 21 марта)

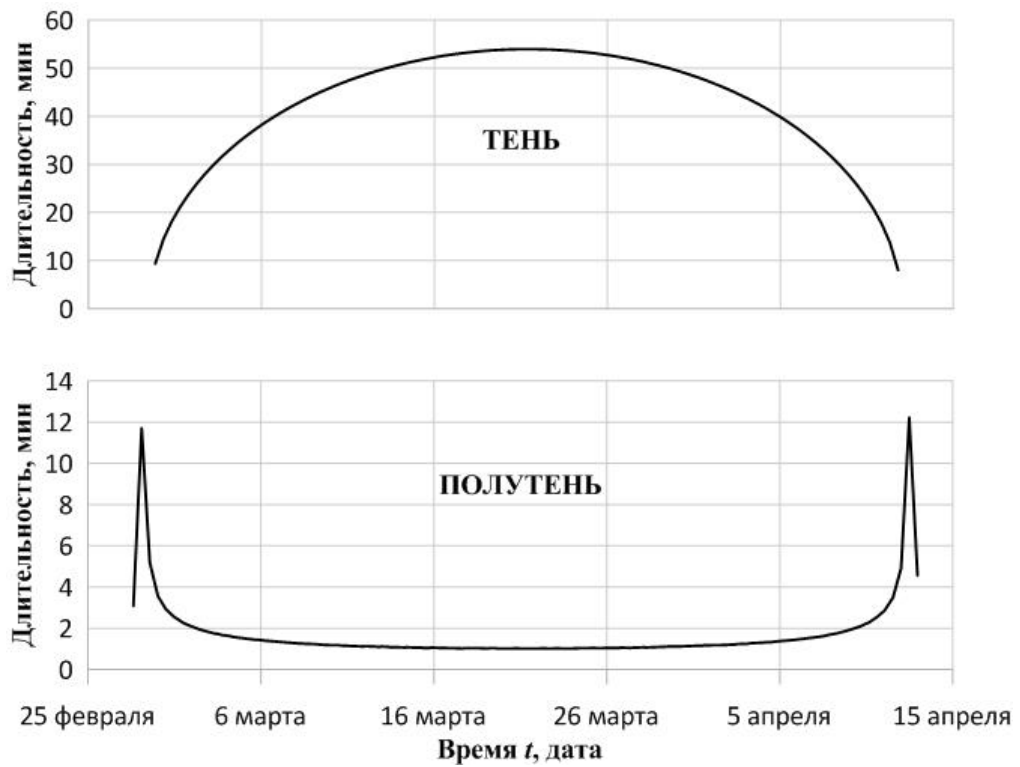


Рисунок 13 — Длительность тени и полутени спутника ГЛОНАСС в период от 25 февраля по 15 апреля

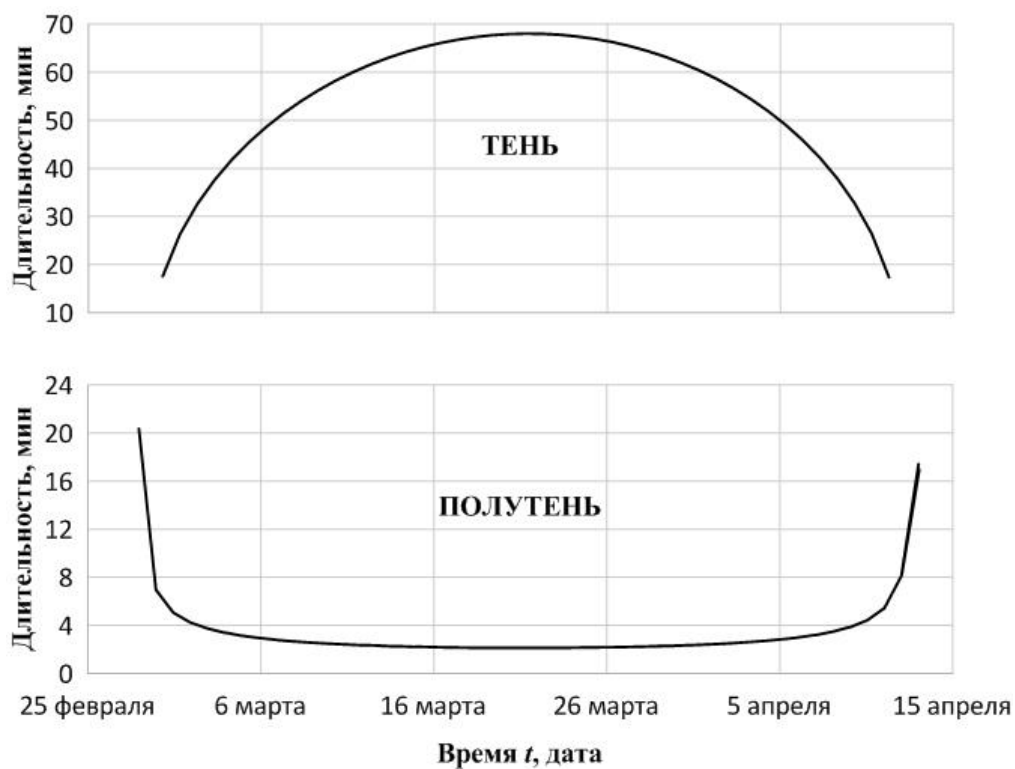


Рисунок 14 — Длительность тени и полутени геостационарного спутника в период от 25 февраля по 15 апреля

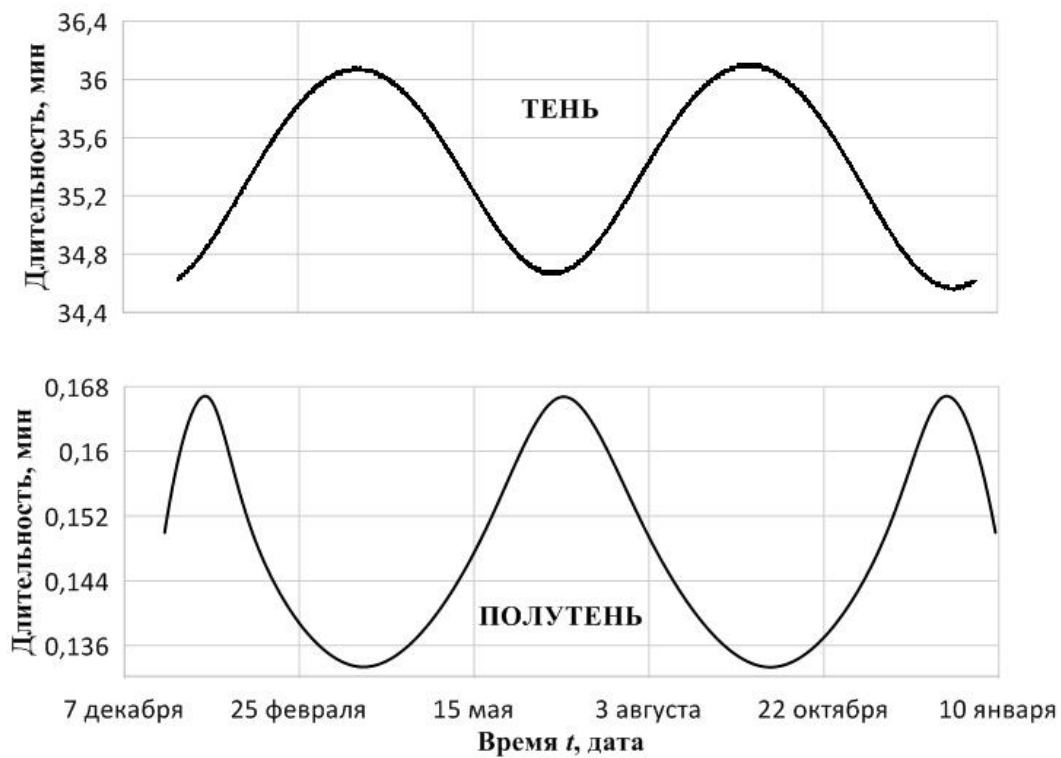


Рисунок 15 — Длительность тени и полутени МКС на годичном интервале времени

Мы оценили эффективность (точность и быстродействие) численного интегрирования спутника зоны ГЛОНАСС с разной парусностью при полной освещенности и при прохождении тени Земли. Ошибка интегрирования ($|\Delta\mathbf{x}|$) оценивалась в векторе положения как максимальная величина разности между расчетным положением и точным на всем интервале интегрирования. В качестве показателя быстродействия рассматривалось количество вычислений функций дифференциальных уравнений (NCF). На рисунке 16 показаны характеристики эффективности численного интегрирования при начальных эпохах 1 января 2021 г. (полная освещенность) и 21 марта 2021 г. (прохождение тени Земли). Они получены по результатам многократных расчетов при варьировании задаваемой величины постоянного шага интегрирования.

Характеристика эффективности в логарифмических шкалах обычно имеет форму клюшки. Ее черенок представляет зависимость методической точности от объема вычислений, который обратно пропорционален величине шага интегрирования. Крутизна черенка обусловлена порядком интегратора: чем выше порядок, тем круче черенок. Крюк характеристики вызван влиянием ошибок округления, которые фактически задают предел наивысшей достижимой точности вычислений.

Из рисунка 15 мы видим, что прохождение тени неблагоприятно влияет на эффективность интегрирования на уровнях субметровой точности. Например, при единичной парусности точность интегрирования с постоянным шагом падает на несколько порядков. Следовательно, необходимо интегрировать такие участки орбиты с уменьшенным шагом.

В разделе 2 мы предложили алгоритм редуцирования шага для разрешения проблемы потери точности при интегрировании теневых участков орбиты. Остается вопрос, во сколько раз необходимо уменьшать шаг интегрирования. Для фрагмента космического мусора зоны ГЛОНАСС с единичной парусностью мы провели серию расчетов с разными делителями шага интегрирования k от 1 до 100. Из рисунка 16 видно, что при увеличении делителя точность повышается и ошибка интегрирования принимает устойчивое значение при $k \rightarrow 100$. Однако оптимальным делителем, который обеспечивает высокую точность при минимальном количестве шагов, в данном случае является $k = 10$.

На рисунках 18–20 показаны характеристики эффективности численного интегрирования для фрагментов космического мусора: при полном освещении (начальная эпоха — 1 января 2021 г.), при прохождении тени (начальная эпоха — 21 марта 2021 г.) с постоянным начальным шагом (const) и с редуцированным (reduce) на полутеневых участках.

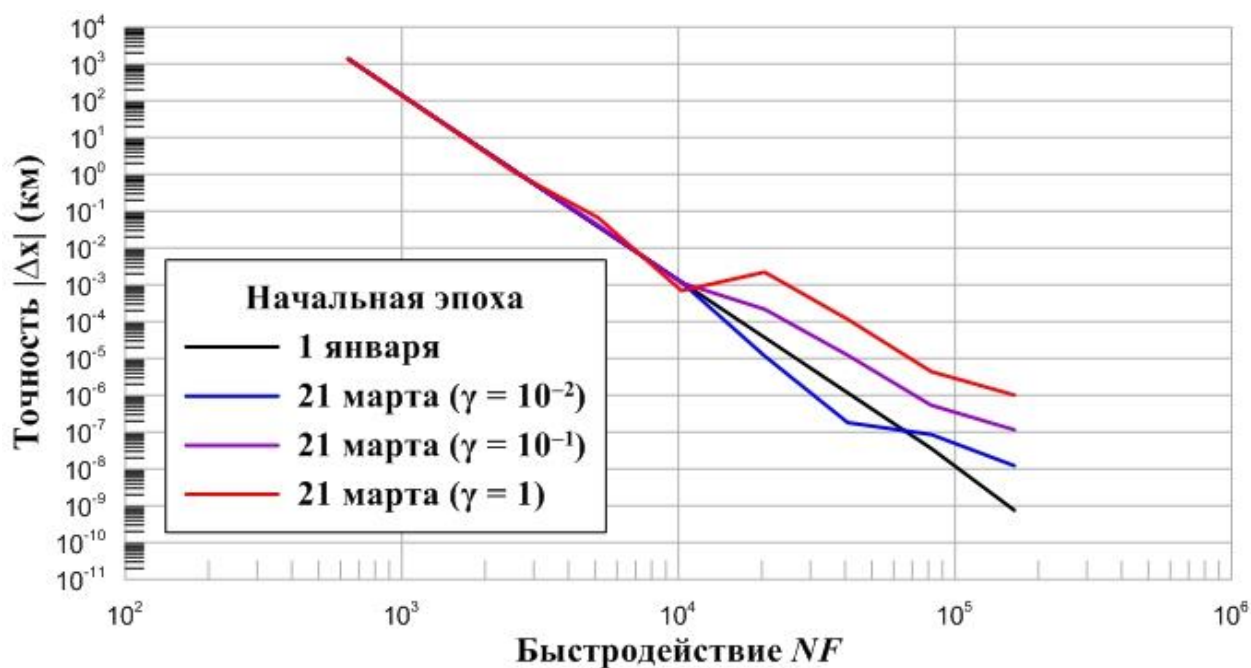


Рисунок 16 — Характеристики численной эффективности для объектов орбитальной зоны ГЛОНАСС с различной парусностью в период полной освещенности (начальная эпоха — 1 января) и в период прохождения тени Земли (начальная эпоха — 21 марта). Интервал моделирования — 10 суток

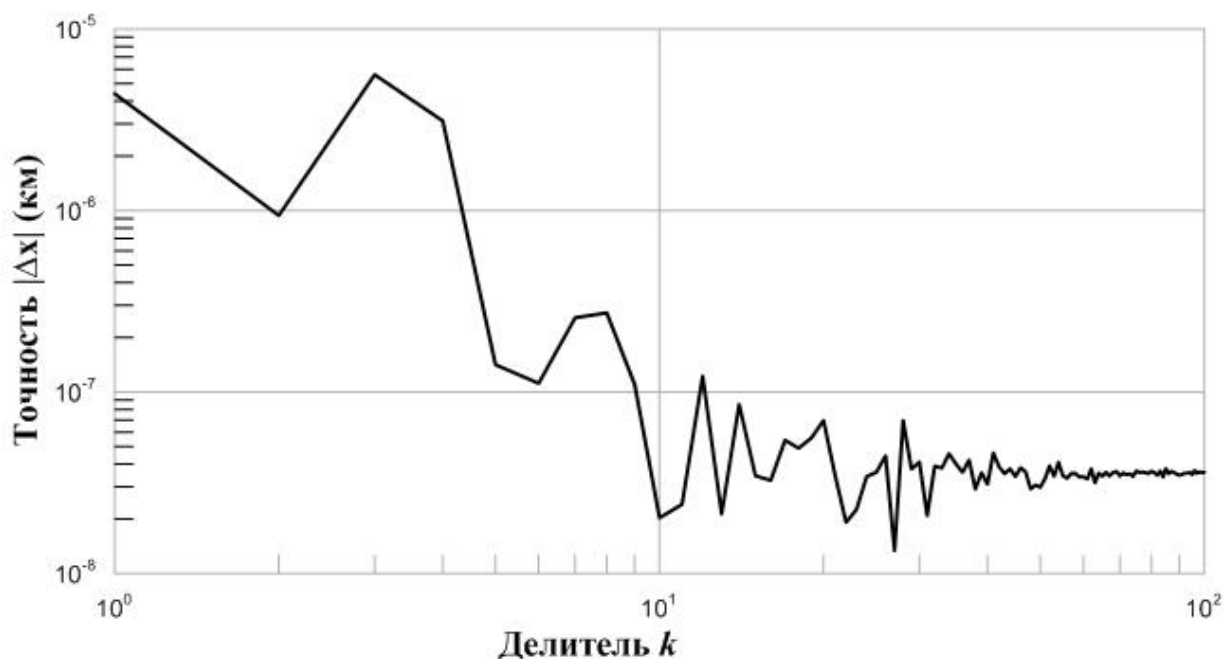


Рисунок 17 — Точность моделирования орбитального движения объекта зоны ГЛОНАСС с парусностью $\gamma = 1$ в зависимости от делителя шага интегрирования при редуцировании. Начальная величина шага — $h = T/4096$. Интервал моделирования — 10 суток

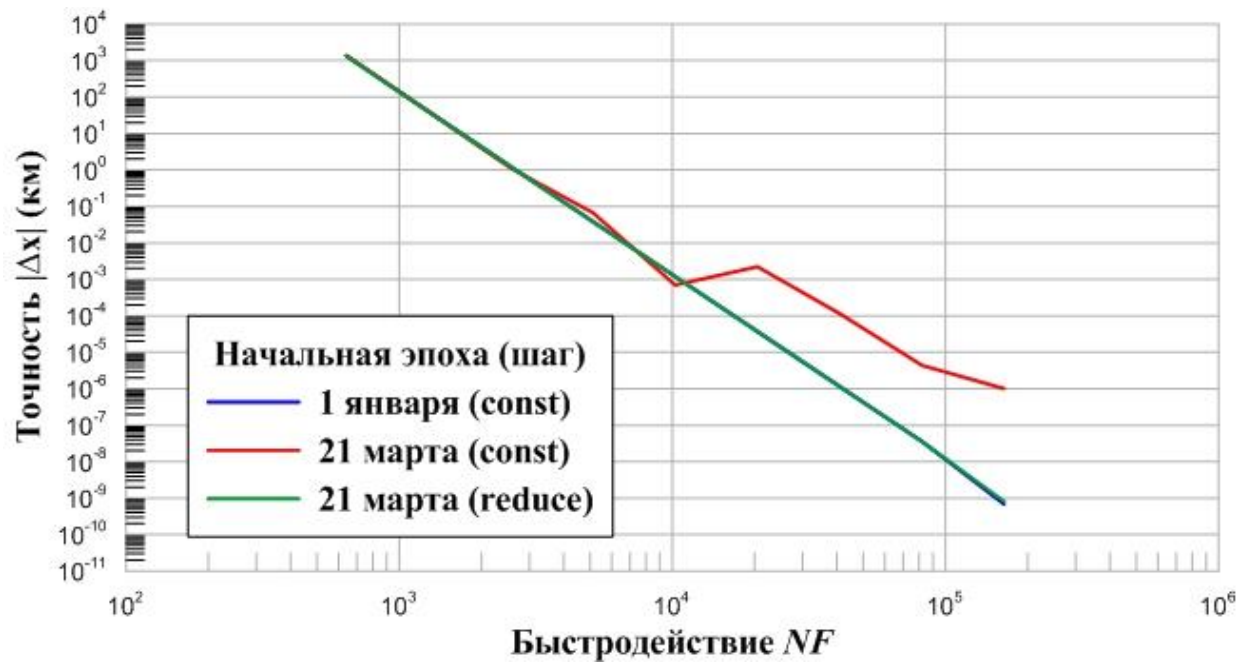


Рисунок 18 — Характеристики численной эффективности для фрагмента космического мусора орбитальной зоны ГЛОНАСС с парусностью $\gamma = 1$ в период полной освещенности (начальная эпоха — 1 января) и в период прохождения тени Земли (начальная эпоха — 21 марта) при постоянном шаге интегрирования (const) и редуцированном (reduce). Интервал моделирования — 10 суток

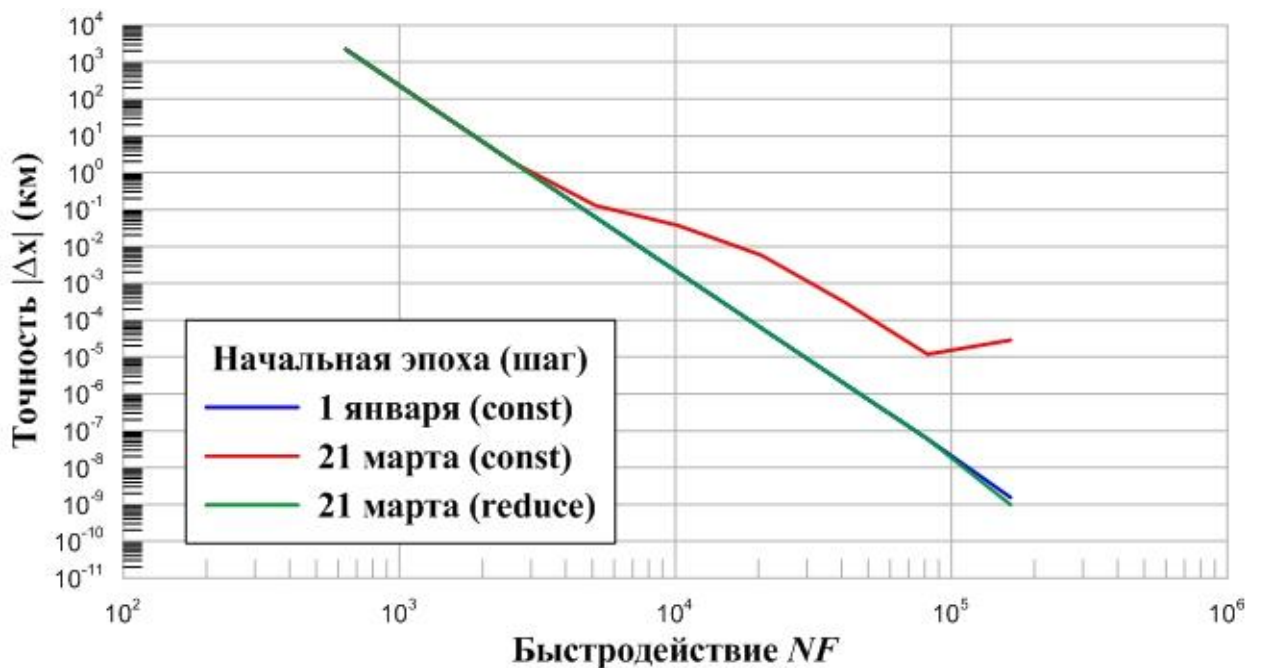


Рисунок 19 — То же, что и на рисунке 18, но для объекта геостационарной зоны

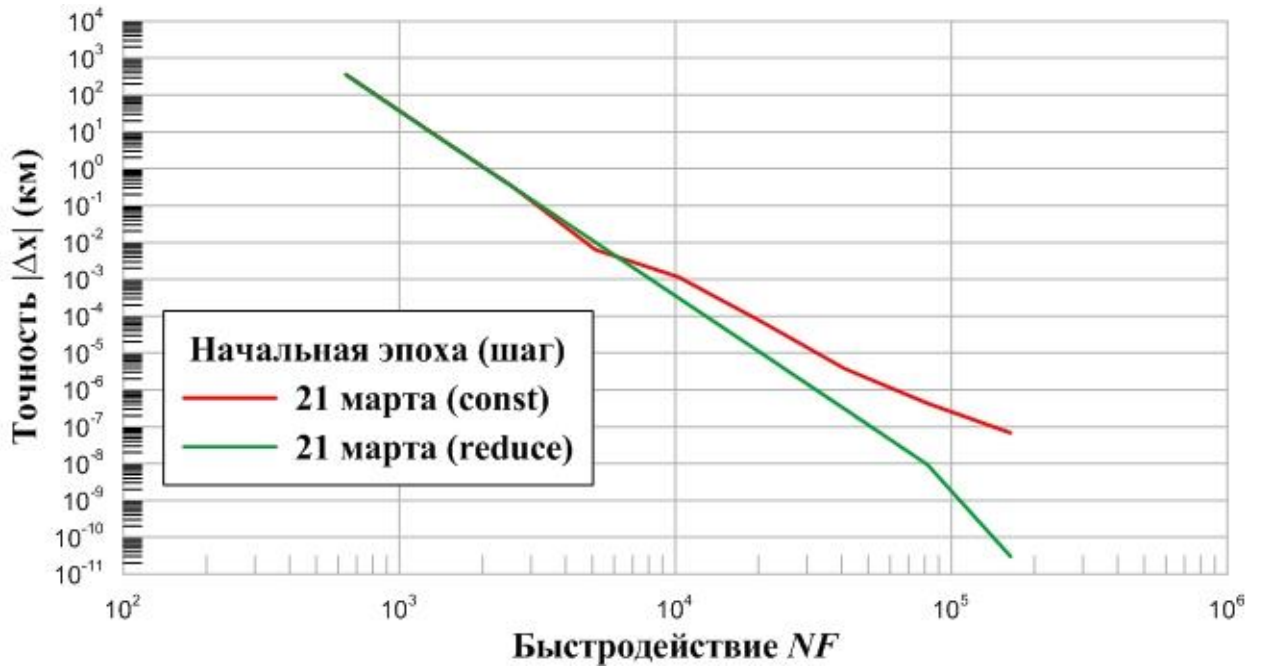


Рисунок 20 — То же, что и на рисунке 18, но для объекта орбитальной зоны МКС

Как видно из рисунков 18 и 19, характеристики при полном освещении с постоянным шагом и при прохождении тени Земли с редуцированным шагом почти совпадают. Следовательно, алгоритм редуцирования шага полностью разрешает проблему потери точности численного моделирования при прохождении тени. Для МКС нет характеристики эффективности при полном освещении. Однако, учитывая, что редуцирование шага интегрирования повышает точность и при этом характеристика эффективности при редуцировании шага указывает на систематическое повышение точности с увеличением объема вычислений NF (рисунок 20), мы также можем утверждать, что проблема потери точности полностью разрешается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе получены следующие результаты.

1. Построена упрощенная численная модель орбитального движения ИСЗ на основе дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, которые интегрируются классическим методом Рунге–Кутты.
2. На основе численного моделирования исследовано влияние светового давления на примере КА ГЛОНАСС, а также трёх фрагментов космического мусора с большой парусностью в орбитальных зонах ГЛОНАСС, ГЕО и МКС.
3. В частности, показано, что возмущения от светового давления в орбитальном движении КА ГЛОНАСС достигают несколько метров. Поэтому при численном моделировании КА ГЛОНАСС для высокоточной навигации влияние светового давления, безусловно, необходимо учитывать.
4. Влияние светового давления в движении фрагментов космического мусора (с большой парусностью) значительно сильнее, нежели в движении КА. Так, возмущения в движении фрагмента с единичной парусностью на геостационарной орбите достигают 2 км, что достаточно много и поэтому световое давление также нужно учитывать при численном моделировании для мониторинга космического мусора. Впрочем, с понижением орбитальной высоты возмущения от светового давления уменьшаются. Например, уже для зоны МКС они достигают величины лишь порядка 5 м.
5. Исследована проблема потери точности моделирования орбит при прохождении спутников через тень Земли.
6. Разработан специальный алгоритм управления шагом интегрирования при вхождении спутника в полутеневые участки орбиты, что решает проблему потери точности.
7. На объектах космического мусора показано, что разработанный алгоритм редуцирования шага полностью решает проблему потери точности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/ LE405 // Interof. Memor. 1998. ИОМ 312. F-98-048. 18 p.
2. Александрова А.Г., Исследование влияния светового давления на устойчивость движения околоземных космических объектов / Александрова А.Г., Бордовицына Т.В // Изв. вузов. Физика. 2019 Т.62.№1. С. 66–71.
3. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. / В.А. Авдюшев Томск : Издательский Дом ТГУ, 2015. 336 с.
4. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Springer, 1993. 539 p.
5. Александрова А.Г., Численное моделирование в задачах динамики околоземных объектов / Александрова А.Г., Бордовицына Т.В., Чувашов И.Н. // Изв. вузов. Физика. 2017. Т. 60. № 1. С. 69–76.
6. Celestrak: NORAD Two-Line Element Sets Current Data — www.celestrak.com (дата обращения: 3.03.2021).
7. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. / Г.Н. Дубошин – М. : Издательство «Наука», 1968. 800 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
program AES;
uses math;
type
  mas3 = array[1..3] of extended;
  mas6 = array[1..6] of extended;
  mas7 = array[1..7] of extended;

const
  g_earth = 398600.4356; // Гравитационная постоянная Земли
  g_moon = 4902.8000; // Гравитационная постоянная Луны
  g_sun = 132712440017.987; // Гравитационная постоянная Солнца
  jj = 0.0010826; // Коэффициент сжатия
  bb = 6378.14; // Радиус Земли
  k = 4.56e-6; // Солнечная постоянная
  teta = 1; // Коэффициент отражения
  massa = 1500; // Масса спутника ГЛОНАСС
  sigma = 17.67; // Площадь миделева сечения спутника ГЛОНАСС
  ncircle = 10; // Количество оборотов
  ae2 = sqrt(149597871.0); // Астрономическая единица в квадрате
  t0 = 2451625.5; // - 21 марта

var
  i, key, ls, nf, nstep, ku: integer;
  x1, x2 : mas3;
  k1, k2, k3, k4, x0, x, mas, mas1, mas2, mas33: mas6;
  hstep, t, tf, h1, a, n, tper, del_r, psi: extended;
  out_new, out_new1, out_new2, out_new3: textfile;

procedure COOR2ELEM(m:extended;x:mas6; var el:mas6);
// Кеплеровы элементы
var
  r, v2, c1, c2, c3, c, g1, g2, g3, g, h, a, e,
  di, sw, cw, su, cu, o, w, u, v, ygol : extended;
begin
  r:=sqrt(sqr(x[1])+sqr(x[2])+sqr(x[3]));
  v2:=sqr(x[4])+sqr(x[5])+sqr(x[6]);
  c1:=x[2]*x[6]-x[3]*x[5];
  c2:=x[3]*x[4]-x[1]*x[6];
  c3:=x[1]*x[5]-x[2]*x[4];
  c:=sqrt(sqr(c1)+sqr(c2)+sqr(c3));
  g1:=-m*x[1]/r+c3*x[5]-c2*x[6];
  g2:=-m*x[2]/r+c1*x[6]-c3*x[4];
  g3:=-m*x[3]/r+c2*x[4]-c1*x[5];
  g:=sqrt(sqr(g1)+sqr(g2)+sqr(g3));
  ygol:=sqrt(sqr(c1)+sqr(c2))/c3;
  h:=v2/2-m/r;
  a:=-m/2/h;
  e:=g/m;
  di := arctan(ygol);
  sw:=(-g1*c1-g2*c2)/c3;
  cw:=(-g1*c2+g2*c1)/c;
  su:=(-x[1]*c1-x[2]*c2)/c3;
  cu:=(-x[1]*c2+x[2]*c1)/c;
  o:=arctan(c1/(-c2));
  if cw = 0 then
    w:=pi/2
  else
    w:=arctan(sw/cw);
  u:=arctan(su/cu);
  v:=u-w;
```



```

if o<0 then
  o:=o+2*pi;
if w<0 then
  w:=w+2*pi;
if v<0 then
  v:=v+2*pi;
el[1]:=c1; el[2]:=c2; el[3]:=c3;
el[4]:=g1; el[5]:=g2; el[6]:=g3; el[7] := o + w + v;
end; {COOR2ELEM}

procedure GEOSUN(t:extended; var x:mas3);
//Положение Солнца
const
  es:array[1..3] of extended = (0.187697338,-0.901092508,-0.3908989650);
  et:array[1..3] of extended = (0.982206403, 0.172203218, 0.0746650669);
  dn=0.0172024238;
  ae=149597871.0;
  t0=2451545.0;
var
  phi : extended;
begin
  phi := dn*(t-t0);
  x[1]:=ae*(cos(phi)*es[1]+sin(phi)*et[1]);
  x[2]:=ae*(cos(phi)*es[2]+sin(phi)*et[2]);
  x[3]:=ae*(cos(phi)*es[3]+sin(phi)*et[3]);
end; {GEOSUN}

procedure GEOMOON(t:extended; var x:mas3);
// Положение Луны
const
  es:array[1..3] of extended = (-0.781828867,-0.662735076,-0.189098618);
  et:array[1..3] of extended = ( 0.684636126,-0.662034129,-0.303143777);
  dn=0.229970839;
  ae=384400.0;
  t0=2451545.0;
var
  phi : extended;
begin
  phi := dn*(t-t0);
  x[1]:=ae*(cos(phi)*es[1]+sin(phi)*et[1]);
  x[2]:=ae*(cos(phi)*es[2]+sin(phi)*et[2]);
  x[3]:=ae*(cos(phi)*es[3]+sin(phi)*et[3]);
end; {GEOMOON}

function SHADOW(xs : mas3; x:mas6): extended;
// Функция тени
const
  erad = 6378.1366;
  srad=695990.0;
var
  dxs : mas3;
  i : integer;
  r, d, scl, phi, gs, ge, ss, fis, fie, ssp : extended;
begin
  for i := 1 to 3 do
    dxs[i] := x[i] - xs[i];
  r := sqrt(sqrt(x[1]) + sqrt(x[2]) + sqrt(x[3]));
  d := sqrt(sqrt(dxs[1]) + sqrt(dxs[2]) + sqrt(dxs[3]));
  scl := dxs[1] * x[1] + dxs[2] * x[2] + dxs[3] * x[3];
  phi := arccos(scl/r/d);
  gs := arcsin(srad/d);

```

```

ge := arcsin(erad/r);
result := 1.0; // Полная освещённость
if phi < (gs +ge)then
begin // Полутень
  if phi > (ge - gs) then
  begin
    ss := pi * sqr(gs);
    fis := 2 * arccos((sqr(phi) + sqr(gs) - sqr(ge)) / (2 * phi * gs));
    fie := 2 * arccos((sqr(phi) + sqr(ge) - sqr(gs)) / (2 * phi * ge));
    ssp := sqr(gs) / 2 * (fis - sin(fis)) + sqr(ge) / 2 * (fie - sin(fie));
    result := 1.0 - ssp / ss;
  end
  else
    result := 0.0;
  end;
end; {SHADOW}

```

```

procedure SUNFORCE(t, my :extended; x_beg:mas6; var p_sun:mas3);
// Притяжение Солнца
var
  x_sun :mas3;
  d3, r_s :extended;
begin
  GEOSUN(t0 + t / 86400, x_sun);
  d3 := power((sqr(x_beg[1] - x_sun[1]) + sqr(x_beg[2] - x_sun[2]) +
sqr(x_beg[3] - x_sun[3])), 3/2);
  r_s := power((sqr(x_sun[1]) + sqr(x_sun[2]) + sqr(x_sun[3])), 3/2);
  p_sun[1] := -my * (x_beg[1] - x_sun[1]) / d3 - my * x_sun[1] / r_s;
  p_sun[2] := -my * (x_beg[2] - x_sun[2]) / d3 - my * x_sun[2] / r_s;
  p_sun[3] := -my * (x_beg[3] - x_sun[3]) / d3 - my * x_sun[3] / r_s;
end; {SUNFORCE}

```

```

procedure MOONFORCE(t, my :extended; x_beg:mas6; var p_moon:mas3);
// Притяжение Луны
var
  x_moon :mas3;
  d3, r_m :extended;
begin
  GEOMOON(t0 + t / 86400, x_moon);
  d3 := power((sqr(x_beg[1] - x_moon[1]) + sqr(x_beg[2] - x_moon[2]) +
sqr(x_beg[3] - x_moon[3])), 3/2);
  r_m := power((sqr(x_moon[1]) + sqr(x_moon[2]) + sqr(x_moon[3])), 3/2);
  p_moon[1] := -my * (x_beg[1] - x_moon[1]) / d3 - my * x_moon[1] / r_m;
  p_moon[2] := -my * (x_beg[2] - x_moon[2]) / d3 - my * x_moon[2] / r_m;
  p_moon[3] := -my * (x_beg[3] - x_moon[3]) / d3 - my * x_moon[3] / r_m;
end; {MOONFORCE}

```

```

procedure OBLATENESS(mas:mas6; var x_zem: mas3);
// Несферичность Земли
var
  module_x :extended;
begin
  module_x := sqrt(sqr(mas[1]) + sqr(mas[2]) + sqr(mas[3]));
  x_zem[1] := - 3 * g_earth* jj * sqr(bb) / power(module_x, 3) *
(mas[3] / power(module_x, 2) * (0 - mas[3]/module_x * mas[1]/module_x) -
((3 * power(mas[3]/module_x, 2) - 1)/2) * mas[1]/sqr(module_x));
  x_zem[2] := - 3 * g_earth * jj * sqr(bb) / power(module_x, 3) *
(mas[3] / power(module_x, 2) * (0 - mas[3]/module_x * mas[2]/module_x) -
((3 * power(mas[3]/module_x, 2) - 1)/2) * mas[2]/sqr(module_x));
  x_zem[3] := - 3 * g_earth * jj * sqr(bb) / power(module_x, 3) *

```

```

    (mas[3] / power(module_x, 2) * (1 - mas[3]/module_x * mas[3]/module_x) -
    ((3 * power(mas[3]/module_x, 2) - 1)/2) * mas[3]/sqr(module_x));
end; {OBLATENESS}

procedure SUNLITE(t:extended;coord_dec:mas6; var p_sunlite:mas3);
// Световое давление
var
    ae, rsun2, rsun, l : extended;
    xs : mas3;
    i : integer;
begin
    GEOSUN(t0 + t / 86400, xs);
    rsun2 := sqr(coord_dec[1] - xs[1]) + sqr(coord_dec[2] - xs[2]) +
    sqr(coord_dec[3] - xs[3]);
    rsun := sqrt(rsun2);
    l := SHADOW(xs, coord_dec) * k * teta * ae2 / rsun2 * sigma / massa * 1e-3;
    psi:=SHADOW(xs, coord_dec);
    for i := 1 to 3 do
        p_sunlite[i] := l * (coord_dec[i] - xs[i]) / rsun;
    end; {SUNLITE}

procedure FUN(t:extended; coord_dec:mas6; var cg:mas6);
// Правые части ОДУ
var
    p_all_forces, xs, p_earth, p_sun, p_moon, p_davl: mas3;
    r2, r3, rsun2, rsun, l: extended;
    i : integer;
begin
    OBLATENESS(coord_dec, p_earth);
    SUNFORCE(t, g_sun, coord_dec, p_sun);
    MOONFORCE(t, g_moon, coord_dec, p_moon);
    SUNLITE(t, coord_dec, p_davl);
    r2 := sqr(coord_dec[1]) + sqr(coord_dec[2]) + sqr(coord_dec[3]);
    r3 := r2 * sqrt(r2);
    for i := 1 to 3 do
        p_all_forces[i] := p_earth[i] + p_moon[i] + p_sun[i] + p_davl[i];
    end;
    cg[1] := coord_dec[4];
    cg[2] := coord_dec[5];
    cg[3] := coord_dec[6];
    cg[4] := -coord_dec[1] * g_earth / r3 + p_all_forces[1];
    cg[5] := -coord_dec[2] * g_earth / r3 + p_all_forces[2];
    cg[6] := -coord_dec[3] * g_earth / r3 + p_all_forces[3];
end; {FUN }

procedure STEPSIZE (t:extended;x0:mas6;k:integer;var hstep:extended);
var
    x1:mas6;
    psi0,psi1:extended;
    xs:mas3;
label
    chk;
begin chk:
    x1[1]:=x0[1]+x0[4]*hstep;
    x1[2]:=x0[2]+x0[5]*hstep;
    x1[3]:=x0[3]+x0[6]*hstep;
    x1[4]:=x0[4];
    x1[5]:=x0[5];
    x1[6]:=x0[6];
    GEOSUN(t0 + t / 86400, xs);
    psi0:=SHADOW(xs, x0);

```

```

psi1:=SHADOW(xs, x1);
if (psi0<>psi1) and (key=0) then
begin
hstep:=hstep/k;
key:=1;
end;
if (psi0=psi1) and (key=1) then
begin
hstep:=hstep*k;
key:=0;
goto chk;
end;
end;{STEPSIZE}

begin
  assignfile(out_new, 'data_decart_new_ten.txt');
  assignfile(out_new1, 't.txt');
  assignfile(out_new2, 'tobr.txt');
  assignfile(out_new3, 'nsl.txt');
  rewrite(out_new);
  rewrite(out_new1);
  rewrite(out_new2);
  rewrite(out_new3);
  x0[1] := 25778.0;
  x0[2] := 0.001;
  x0[3] := 0.0;
  x0[4] := 0.0;
  x0[5] := 1.674282777304280;
  x0[6] := 3.558032014225665;
  h1 := (sqr(x0[4]) + sqr(x0[5]) + sqr(x0[6])) / 2 -
  (g_earth / sqrt(sqr(x0[1]) + sqr(x0[2]) + sqr(x0[3])));
  a := - g_earth / (2 * h1);
  n := sqrt(g_earth / power(a, 3));
  tper := 2 * pi / n;
  nstep := 32;
  writeln('исходные значения: ');
  for i := 1 to 6 do
    write(x0[i], ' ');
  key:=0; ls:=0; ku:=10;
  while nstep <= 8192 do begin
    del_r:=0;
    for i := 1 to 6 do
      mas[i] := x0[i];
    hstep := tper / nstep;
    t := 0; ls:=0;
    tf:=ncircle*tper;
    while true do begin
      FUN(t, mas, k1);
      for i:= 1 to 6 do
        mas1[i] := mas[i] + hstep * k1[i] / 2;
      FUN(t + hstep / 2, mas1, k2);
      for i:= 1 to 6 do
        mas2[i] := mas[i] + hstep * k2[i] / 2;
      FUN(t + hstep / 2, mas2, k3);
      for i:= 1 to 6 do
        mas33[i] := mas[i] + hstep * k3[i];
      FUN(t + hstep, mas33, k4);
      for i:= 1 to 6 do
        mas[i] := mas[i] + hstep / 6 *
        (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]);
      t := t + hstep;
      STEPSIZE(t,mas,ku,hstep);
    end;
  end;
end;

```

```

        writeln(out_new2, t/60, ' ', hstep);
        if ls = 1 then break;
        if (tf-t)/hstep < 1 then begin
            hstep:=tf-t;    ls:=1;
        end;
    end;
    writeln(out_new1, t/86400, ' ', psi:24:16, ' ', tper*10/86400);
    hstep := -(tper / (nstep - 1));
    tf:=0;    ls:=0;
    while true do begin
        FUN(t, mas, k1);
        for i:= 1 to 6 do
            mas1[i] := mas[i] + hstep * k1[i] / 2;
        FUN(t + hstep / 2, mas1, k2);
        for i:= 1 to 6 do
            mas2[i] := mas[i] + hstep * k2[i] / 2;
        FUN(t + hstep / 2, mas2, k3);
        for i:= 1 to 6 do
            mas33[i] := mas[i] + hstep * k3[i];
        FUN(t + hstep, mas33, k4);
        for i:= 1 to 6 do
            mas[i] := mas[i] +
                hstep / 6 * (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]);
        t := t + hstep;
        STEPSIZE(t,mas,ku,hstep);
        if ls = 1 then break;
        if (tf-t)/hstep < 1 then begin
            hstep:=tf-t;    ls:=1;
        end;
    end;
    writeln(out_new1, t/86400, ' ', psi:24:16, ' ', hstep);
    nf:=ncircle * nstep * 2;
    COOR2ELEMK(G_earth, mas, EL);
    WriteLn(output,t/86400, ' ', EL[1] - EL0[1], ' ',
    EL[2]-EL0[2], ' ', EL[3]*180/Pi - EL0[3]*180/pi, ' ',
    EL[4]*180/Pi - EL0[4]*180/Pi, ' ', EL[5]*180/Pi - EL0[5]*180/Pi);
    del_r := sqrt(sqr(x0[1] - mas[1]) + sqr(x0[2] - mas[2]) +
    sqr(x0[3] - mas[3]));
    writeln(out_new, nf, ' ', del_r);
    nstep := nstep * 2;
    end;
    writeln('after int: ');
    for i := 1 to 6 do
        write(mas[i], ' ');
    closefile(out_new);
    closefile(out_new1);
    closefile(out_new2);
    closefile(out_new3);
    readln;
end.

```

Отчет о проверке на заимствования №1



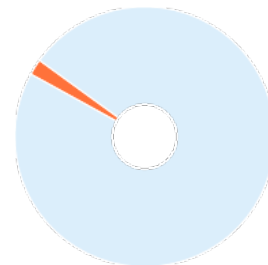
Автор: Михайлова Яна Андреевна
Проверяющий: (yana.mikhaylova.999@mail.ru / ID: 9266878)
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 2
Начало загрузки: 14.06.2021 07:43:54
Длительность загрузки: 00:00:02
Имя исходного файла:
2021_VKR_Mikhaylova_Y_A.pdf
Название документа:
2021_VKR_Mikhaylova_Y_A
Размер текста: 39 кБ
Тип документа: Дипломный проект
Символов в тексте: 39890
Слов в тексте: 5272
Число предложений: 199

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 14.06.2021 07:43:57
Длительность проверки: 00:00:26
Корректировка от 14.06.2021 12:17:53
Комментарии: не указано
Модули поиска: Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ
1,62%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
0%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
98,38%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа.

Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.

Цитирования — для текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты, общепринятые термины, выражения, фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которому шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Актуален на	Модуль поиска
[01]	0,69%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vital:11548/SOURCE01 http://vital.lib.tsu.ru	07 Сен 2020	Интернет
[02]	0,55%	не указано http://dspace.susu.ru	08 Ноя 2018	Интернет
[03]	0,38%	Численное моделирование задач орбитальной динамики ИСЗ с использованием параллельных вычислений http://gaoran.ru	02 Окт 2018	Интернет

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук

/Авдюшев В.А./