

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра астрономии и космической геодезии

Мезенцева Алина Дмитриевна

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ
ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ
ЭФФЕКТИВНОСТИ**
(курсовая работа)

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. _____

Автор работы

Мезенцева А.Д. _____

Томск — 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
1 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ	3
2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ	4
2.1 Метод градиентного спуска	4
2.2 Метод Ньютона	4
2.3 Метод Гаусса–Ньютона	5
2.4 Демпфированный метод Гаусса–Ньютона	5
2.5 Составной метод	6
3 МОДЕЛЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	6
4 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПО ПАРАМЕТРАМ	7
5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДОВ	9
5.1 Постановка численного эксперимента	9
5.2 Анализ численных результатов	10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	17
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	18

ВВЕДЕНИЕ

Одним из этапов численного моделирования орбит является определение модельных параметров из наблюдений, как правило, в рамках задачи наименьших квадратов, решение которой состоит в минимизации некоторой целевой функции, характеризующей близость наблюдений и их модельных представлений. В свою очередь, для минимизации целевой функции обычно прибегают к итерационному методу Гаусса–Ньютона, который, вообще говоря, не всегда эффективен: он либо плохо сходится, либо расходится, и в этом случае необходимо использовать альтернативные методы минимизации.

В данной курсовой работе исследуется эффективность некоторых итерационных методов минимизации применительно к определению слабоэллиптической плоской орбиты при различных составах наблюдений. Помимо метода Гаусса–Ньютона рассматриваются методы (наискорейшего) градиентного спуска, демпфированный Гаусса–Ньютона, а также составной метод, предполагающий поочередное использование методов градиентного спуска и Гаусса–Ньютона.

Для достижения поставленной цели предполагалось выполнить ряд задач: 1) разработать программный комплекс для численного исследования эффективности рассматриваемых методов; 2) выполнить серию численных экспериментов для получения характеристик эффективности итерационных методов; 3) провести анализ численных результатов.

Следует заметить, что для выполнения многочисленных экспериментов моделирование орбитального движения и определение параметров модели выполнялось в рамках задачи двух тел. В контексте данной работы такое ограничение вполне допустимо, а получаемые результаты могут быть обобщены на прикладные задачи, поскольку в действительности общий характер поведения целевой функции относительно параметров при использовании простой орбитальной модели почти такой же, как и с привлечением более сложных моделей, но в то же время зависит главным образом от особенностей состава наблюдений.

1 ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

Обратная задача орбитальной динамики состоит в определении орбитальных параметров из астрометрических наблюдений в рамках выбранной модели. Пусть имеем J наблюдаемых положений \mathbf{p}_i^O в L -мерном пространстве на моменты времени t_i ($i = 1, \dots, J$). Требуется по наблюдениям \mathbf{p}_i^O определить K орбитальных параметров \mathbf{q} модели $\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q})$.

Обычно определение \mathbf{q} сводится к минимизации суммы квадратов невязок, т.е. целевой функции

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^J \|\mathbf{p}_i^O - \mathbf{p}_i^C\|^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$. Поскольку норма в (1) евклидова, то целевую функцию можно переписать в виде

$$S(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C\|^2, \quad (2)$$

где $\mathbf{p}^O = (\mathbf{p}_1^O, \dots, \mathbf{p}_J^O)^T$ и $\mathbf{p}^C = (\mathbf{p}_1^C, \dots, \mathbf{p}_J^C)^T$ — N -мерные векторы измерений и их модельных представлений; $N = JL$. Если наблюдения разнородны или неравноточны, то целесообразно ввести весовую симметричную (как правило, диагональную) матрицу \mathbf{W} размера $N \times N$. Тогда целевую функцию (2) формально можно записать как

$$S(\mathbf{q}) = \|(\mathbf{W}^{1/2})^T(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)\|^2, \quad (3)$$

где $\mathbf{W}^{1/2}$ — такая матрица размера $N \times N$ (скажем, матрица-множитель разложения Холецкого), для которой $\mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{W}^{1/2})^T = \mathbf{W}$. В данной работе согласно постановке задачи считается, что наблюдения однотипны и равноточны, поэтому матрица \mathbf{W} единичная.

Минимум Целевой функции (2) находится из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} = -2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Система уравнений (4) нелинейна, и поэтому на практике для ее решения прибегают к итерационным методам [1, 2, 3], которые будут изложены ниже. Решение системы (4), минимизирующее также целевую функцию, будем обозначать $\bar{\mathbf{q}}$.

2 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

2.1 Метод градиентного спуска

Достаточно простую, но не лучшую итерационную схему для минимизации целевой функции (2) дает метод градиентного спуска или, что то же самое, метод простых итерций по отношению к системе (4). Согласно этой схеме, поправка к каждому приближению \mathbf{q} вычисляется как

$$\Delta\mathbf{q} = -h \left(\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{q}} \right)^T. \quad (5)$$

Здесь h — неопределенный параметр, шаг спуска. Он обычно выбирается так, чтобы минимизировать целевую функцию вдоль градиента $\partial S/\partial\mathbf{q}$ (метод наискорейшего градиентного спуска), что обеспечивает релаксационную последовательность приближений, т.е. когда целевая функция с каждым следующим приближением убывает. Однако даже при оптимальном выборе шага метод на практике очень медленно сходится, в особенности когда поведение целевой функции достаточно сложное относительно определяемых параметров \mathbf{q} (например, в овражных задачах).

2.2 Метод Ньютона

Для решения системы уравнений (4) обычно прибегают к итерационным методам типа Ньютона, где привлекаются вторые производные $\partial^2 S/\partial\mathbf{q}^2$ или их приближения в качестве дополнительной информации, уточняющей локальное поведение целевой функции. Согласно итерационной схеме Ньютона, поправка к текущему приближению \mathbf{q} определяется как

$$\Delta\mathbf{q} = - \left(\frac{\partial^2\mathbf{S}}{\partial\mathbf{q}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{q}} \right)^T, \quad (6)$$

где $\partial^2 S/\partial\mathbf{q}^2$ — матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2\mathbf{S}}{\partial\mathbf{q}^2} = 2 \left(\frac{\partial\mathbf{p}^C}{\partial\mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial\mathbf{p}^C}{\partial\mathbf{q}} - 2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial\mathbf{q}^2}. \quad (7)$$

В схеме (7) начальное приближение орбитальных параметров \mathbf{q} обычно берется из предварительного определения орбиты по нескольким наблюдениям в рамках задачи двух тел.

2.3 Метод Гаусса–Ньютона

Ввиду проблематичности вычисления вторых производных в (7) на практике их опускают и, таким образом, используют упрощенную схему так называемого метода Гаусса–Ньютона, который относится к широкому классу квазиньютоновских методов.

Введем матрицы

$$\mathbf{A}_{N \times K} = \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} \quad \mathbf{B}_{N \times 1} = \mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C.$$

Тогда поправку (6) можно переписать как

$$\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad (8)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ — так называемая нормальная матрица, которая в минимуме $S(\mathbf{q})$ при достаточно малых невязках \mathbf{B} близка к матрице Гессе, а $\mathbf{G} = -\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ ($2\mathbf{G} = \partial S / \partial \mathbf{q}$).

Несмотря на то, что метод Гаусса–Ньютона при достаточно малых невязках обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса вблизи минимума целевой функции, тем не менее область сходимости метода в нелинейных обратных задачах обычно чрезвычайно мала. Для решения этой трудности на практике, как правило, прибегают либо к модифицированным методам Гаусса–Ньютона [2], либо к составным методам.

2.4 Демпфированный метод Гаусса–Ньютона

Демпфирование является одной из модификаций метода Гаусса–Ньютона, которая состоит в уменьшении поправки (8) путем введения так называемого демпфирующего множителя h :

$$\Delta \mathbf{q} = -h \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad \text{где } 0 < h < 1. \quad (9)$$

Примечательно, что при определенном выборе h сходимость итерационного процесса может быть достигнута практически всегда [2]. Однако очевидный недостаток такого подхода — это значительное понижение скорости сходимости, в особенности когда начальное приближение достаточно далеко от минимума целевой функции. Кроме того, следует

заметить, что эффективность метода непосредственно зависит от того, насколько удачно будут выбираться множители h на каждом шаге итерационного процесса.

2.5 Составной метод

С целью достижения быстрой сходимости итерационного процесса можно совместно с методом Гаусса–Ньютона последовательно использовать другие [4]. Рассмотрим составной подход, где помимо метода Гаусса–Ньютона используется метод градиентного спуска:

$$\Delta \mathbf{q} = -\frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}{\mathbf{Q} \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \mathbf{G}, \quad (10)$$

который, в частности, является методом наискорейшего градиентного спуска, если целевая функция относительно параметров представляет собой квадратичную форму. Метод градиентного спуска, в отличие от Гаусса–Ньютона, может быть эффективным в области, далекой от минимума целевой функции, тогда как преимущество второго над первым проявляется именно в окрестности минимума.

На начальном этапе применяется схема градиентного спуска, когда она имеет высокую скорость сходимости к минимуму. Когда скорость падает, подключается схема Гаусса–Ньютона. Переход от одной итерационной схемы к другой осуществляется в момент, когда значения целевой функции (2) начинают слабо меняться либо когда ее значения оказываются достаточно малыми.

Составной подход способен существенно повысить эффективность итерационного процесса, в особенности когда поведение целевой функции сложное, а начальное приближение грубое. В частности, он может быть весьма полезен в овражных задачах. Одну из таких задач мы рассмотрим ниже.

3 МОДЕЛЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Формально численную модель движения небесного тела \mathbf{p}^C в плоскости в декартовых координат $\mathbf{p} = (x, y)$ можно представить в виде

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}) \quad (11)$$

где \mathbf{q} — K -мерный вектор определяемых орбитальных параметров; t — время, определяющие положение тела на орбите. В нашем случае в качестве определяемых параметров \mathbf{q} выступают a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — аргумент перицентра, M_0 — средняя аномалия в начальную эпоху t_0 ($K = 4$).

Параметры модели определяются из известных J положений тела $\mathbf{p}_i^O = (x_i^O, y_i^O)$ ($L = 2$) на моменты времени t_i ($i = 1, \dots, J$) в рамках задачи наименьших квадратов, которая сводится к минимизации по параметрам целевой функции (2).

Положение тела \mathbf{p}^C (11) на заданный момент t определяется по формулам безразмерной ($\mu = 1$) эллиптической ($e < 1$) плоской ($I = 0$) задачи двух тел¹

$$x^C = r \cos(v + \omega), \quad y^C = r \sin(v + \omega), \quad (12)$$

где v — истинная аномалия; r — радиус-вектор. Если ввести орбитальные координаты

$$\xi = r \cos v, \quad \eta = r \sin v; \quad (13)$$

то x^C и y^C (12) можно переписать как

$$x^C = \xi \cos \omega - \eta \sin \omega, \quad y^C = \xi \sin \omega + \eta \cos \omega.$$

В свою очередь, орбитальные координаты выражаются через эксцентрическую аномалию E как

$$\xi = a \cos E - ae, \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (14)$$

Эксцентрическая аномалия E в (14) определяется из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - t_0) + M_0, \quad (15)$$

где $n = a^{-3/2}$ — среднее движение.

4 ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ПО ПАРАМЕТРАМ

Для минимизации по параметрам целевой функции (2) необходимо знать частные производные $\partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{q}$, а именно $\partial x / \partial \mathbf{q}$ и $\partial y / \partial \mathbf{q}$ в соответствующей

¹Здесь μ — гравитационный параметр, а I — наклонение орбиты.

щие моменты времени t_i . В соответствии с принятой орбитальной моделью (11) частные производные на произвольный момент времени t можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial a} &= \frac{\partial \xi}{\partial a} \cos \omega - \frac{\partial \eta}{\partial a} \sin \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial a} &= \frac{\partial \xi}{\partial a} \sin \omega + \frac{\partial \eta}{\partial a} \cos \omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial a} &= \cos E - e - a \sin E \frac{\partial E}{\partial a}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial a} &= \sqrt{1 - e^2} \left(\sin E + a \cos E \frac{\partial E}{\partial a} \right), \\ \frac{\partial E}{\partial a} &= -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^5}} \frac{t - t_0}{1 - e \cos E},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial e} &= \frac{\partial \xi}{\partial e} \cos \omega - \frac{\partial \eta}{\partial e} \sin \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial e} &= \frac{\partial \xi}{\partial e} \sin \omega + \frac{\partial \eta}{\partial e} \cos \omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial e} &= -a \left(\sin E \frac{\partial E}{\partial e} + 1 \right), \\ \frac{\partial \eta}{\partial e} &= \frac{e \sin E}{\sqrt{1 - e^2}} + e \sqrt{1 - e^2} \cos E \frac{\partial E}{\partial e}, \\ \frac{\partial E}{\partial e} &= -\frac{\sin E}{1 - e \cos E},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \omega} &= -a \sin \omega (\cos E - e) - a \sqrt{1 - e^2} \sin E \cos \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} &= a \cos \omega (\cos E - e) - a \sqrt{1 - e^2} \sin E \sin \omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial M_0} &= \frac{\partial \xi}{\partial M_0} \cos \omega - \frac{\partial \eta}{\partial M_0} \sin \omega, \\ \frac{\partial y}{\partial M_0} &= \frac{\partial \xi}{\partial M_0} \sin \omega + \frac{\partial \eta}{\partial M_0} \cos \omega, \\ \frac{\partial \xi}{\partial M_0} &= -a \sin E \frac{\partial E}{\partial M_0}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial M_0} &= a \sqrt{1 - e^2} \cos E \frac{\partial E}{\partial M_0}, \\ \frac{\partial E}{\partial M_0} &= \frac{1}{1 - e \cos E}.\end{aligned}$$

Тогда составленные из частных производных матрица \mathbf{A} и вектор \mathbf{B} примут вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial a} & \frac{\partial x_1}{\partial e} & \frac{\partial x_1}{\partial \omega} & \frac{\partial x_1}{\partial M_0} \\ \frac{\partial y_1}{\partial a} & \frac{\partial y_1}{\partial e} & \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial M_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial a} & \frac{\partial x_N}{\partial e} & \frac{\partial x_N}{\partial \omega} & \frac{\partial x_N}{\partial M_0} \\ \frac{\partial y_N}{\partial a} & \frac{\partial y_N}{\partial e} & \frac{\partial y_N}{\partial \omega} & \frac{\partial y_N}{\partial M_0} \\ \frac{\partial a}{\partial a} & \frac{\partial e}{\partial e} & \frac{\partial \omega}{\partial \omega} & \frac{\partial M_0}{\partial M_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x_1^O - x_1^C \\ y_1^O - y_1^C \\ \vdots \\ x_N^O - x_N^C \\ y_N^O - y_N^C \end{pmatrix}.$$

где $\partial x_i/\partial \mathbf{q}$ и $\partial y_i/\partial \mathbf{q}$ — частные производные $\partial x/\partial \mathbf{q}$ и $\partial y/\partial \mathbf{q}$, вычисляемые на момент времени t_i .

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДОВ

5.1 Постановка численного эксперимента

С целью исследования эффективности представленных выше методов был проведен численный эксперимент. Для этого мы составили программу на языке Фортран 90, которая с использованием методов позволяла определять орбитальные параметры $\mathbf{q} = (a, e, \omega, M_0)$ по наблюдениям координат (x^O, y^O) в рамках кеплеровской орбитальной модели.

По модельным наблюдениям определялась кеплеровская орбита с параметрами $a = 1$, $e = 0.1$, $\omega = 45^\circ$ и $M_0 = 0$ при различных начальных приближениях. Наблюдения моделировались на основе формул задачи двух тел с точными значениями орбитальных параметров. Рассматривались четыре обратных задачи с принципиально разными распределениями наблюдений. В первой задаче моделировались 10 наблюдений за короткий период времени $\Delta T = 2\pi/10$ на короткой орбитальной дуге (см. поведение целевой функции относительно a и e и относительно ω и M_0 на рис. 1). Во второй задаче мы также имели 10 наблюдений, но распределенных на длинной дуге за один орбитальный период: $\Delta T = 2\pi$ (рис. 2). В третьей задаче моделировались 100 наблюдений, равномерно распределенных за период $\Delta T = 20\pi$ (супер длинная дуга) (рис. 3). Наконец, в четвертой мы рассмотрели 20 наблюдений, рассредоточенных на

концах длительного временного интервала $\Delta T = 200\pi$ (100 оборотов), по 10 наблюдений в каждой группе на дугах $\Delta T = 2\pi/10$. Поведение целевой функции для этой задачи показано на рис. 4, из которого видно, что целевая функция сильно овражная и, кроме того, имеет место множество почти равнозначных минимумов вблизи абсолютного, который соответствует истинным значениям параметров. В данной работе мы не рассматривали проблему неоднозначного определения орбит [4], и поэтому выбирали только такие начальные приближения, которые бы обеспечивали сходимость методов к абсолютному минимуму.

Для численного поиска истинных значений орбитальных параметров, в которых целевая функция достигается абсолютного минимума, рассматривались два состава начальных приближений. Первый условно назовем хорошим. Ему соответствуют следующие орбитальные параметры: $a = 1.001$, $e = 0.101$, $\omega = 45.057^\circ$, $M_0 = 0.001$. Второй состав начальных приближений более грубый. Назовем его плохим. Для него орбитальные параметры были $a = 0.997$, $e = 0.2$, $\omega = 45^\circ$, $M_0 = 0$. Их мы выбрали таким образом, чтобы последовательность приближений метода Гаусса–Ньютона не была сходящейся. Эти начальные параметры использовались только для четвертой задачи. Отправляясь от выбранных начальных приближений, мы выполняли численную минимизацию целевой функции методами Гаусса–Ньютона и градиентного спуска, а также составным методом. Итерационный процесс для каждой задаче завершался по достижении значения целевой функции 10^{-9} . В случае составного подхода момент перехода от схемы градиентного спуска к схеме Гаусса–Ньютона осуществлялся, когда целевая функция принимала значение, равное 10^{-1} . Эффективность каждого метода оценивалась по числу выполненных до сходимости шагов NS .

5.2 Анализ численных результатов

Эффективность методов для хороших начальных приближений приведена в табл. 1. Видно, что итерационный процесс для составного метода и Гаусса–Ньютона сходится за наименьшее количество итераций. Заметим, что быстродействие составного метода немного выше в задачах 3, 4, где поведение целевой функции относительно параметров достаточно

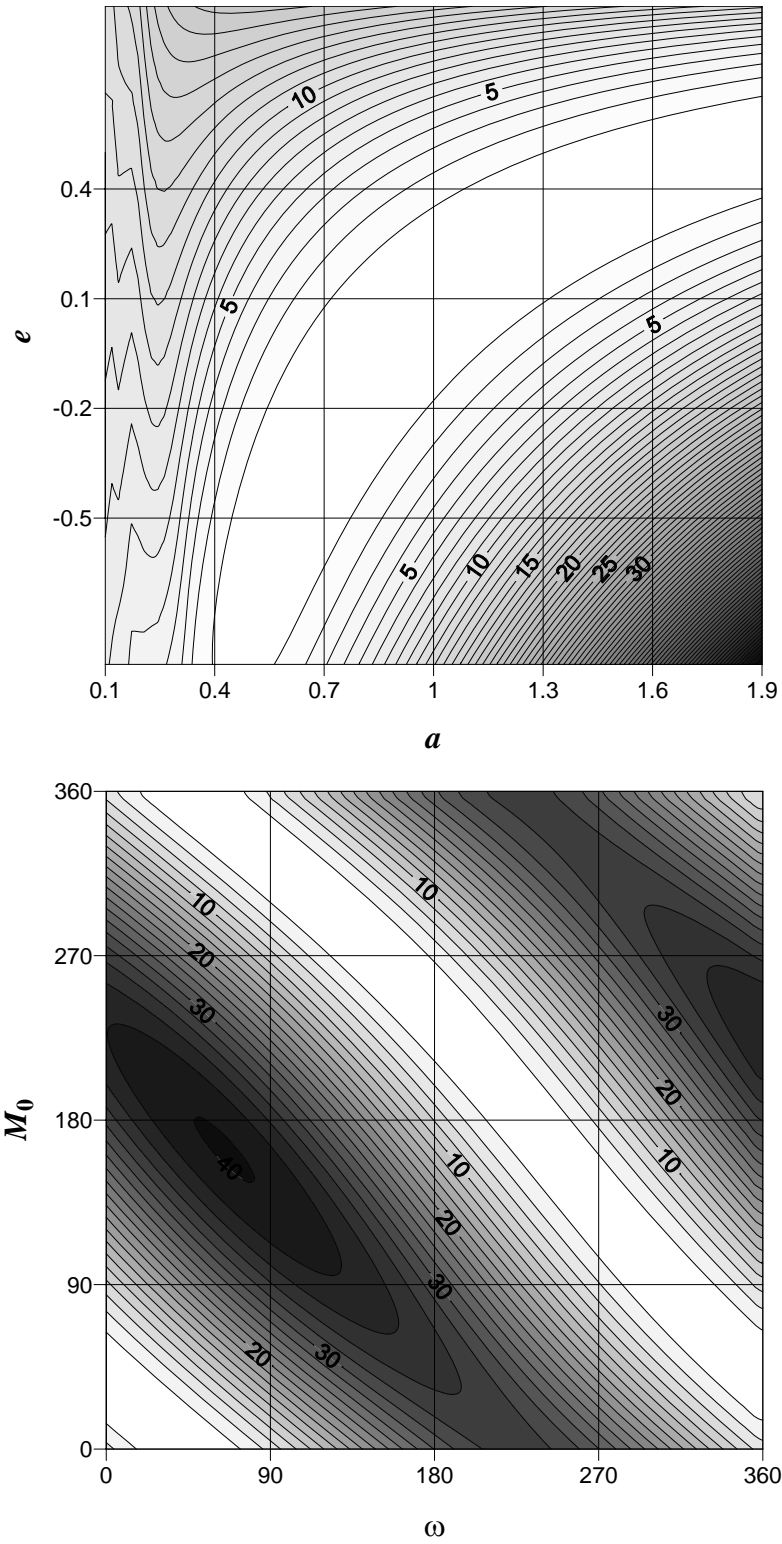


Рис. 1: Зависимость целевой функции от параметров для задачи 1

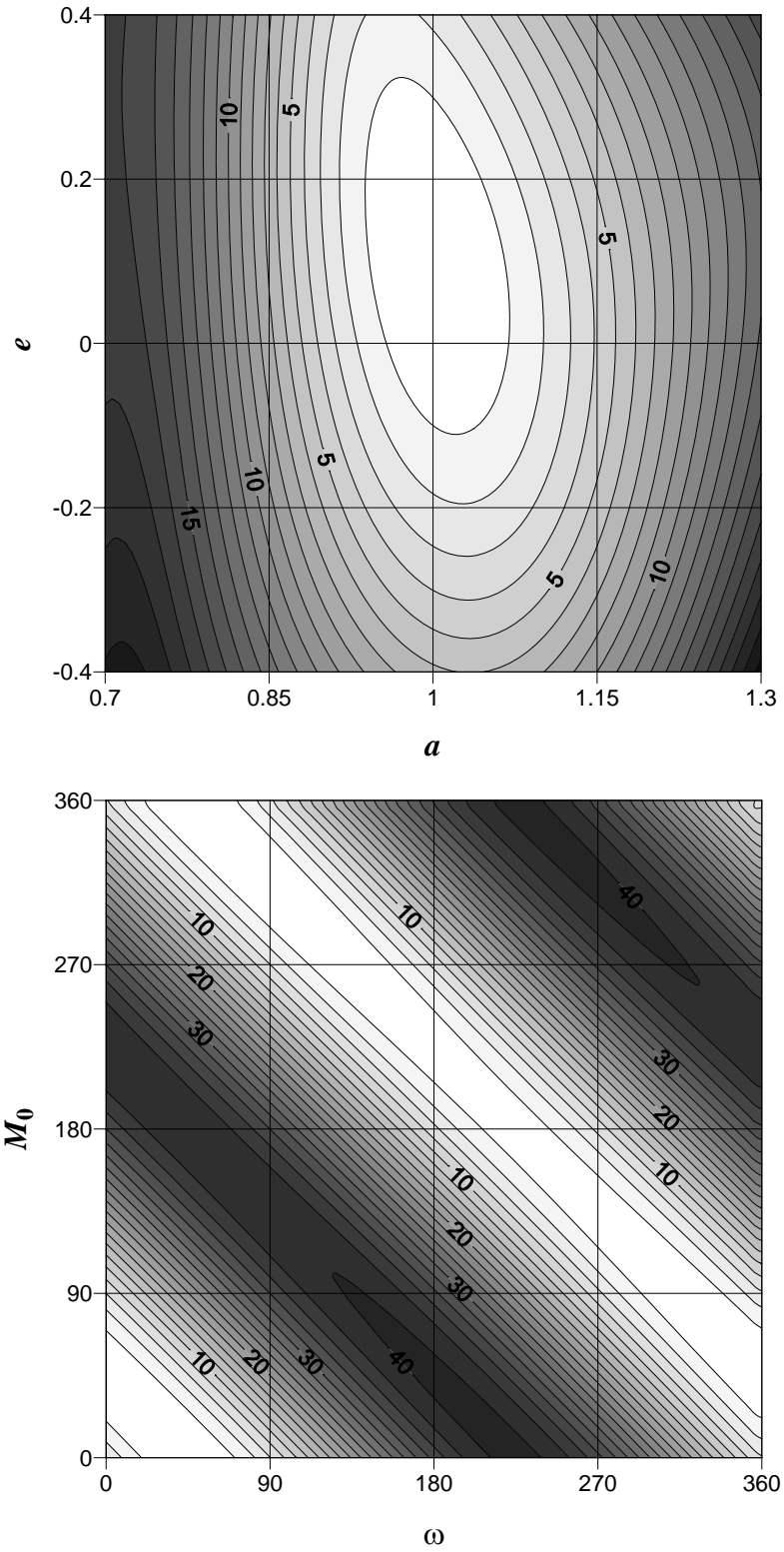


Рис. 2: Зависимость целевой функции от параметров для задачи 2

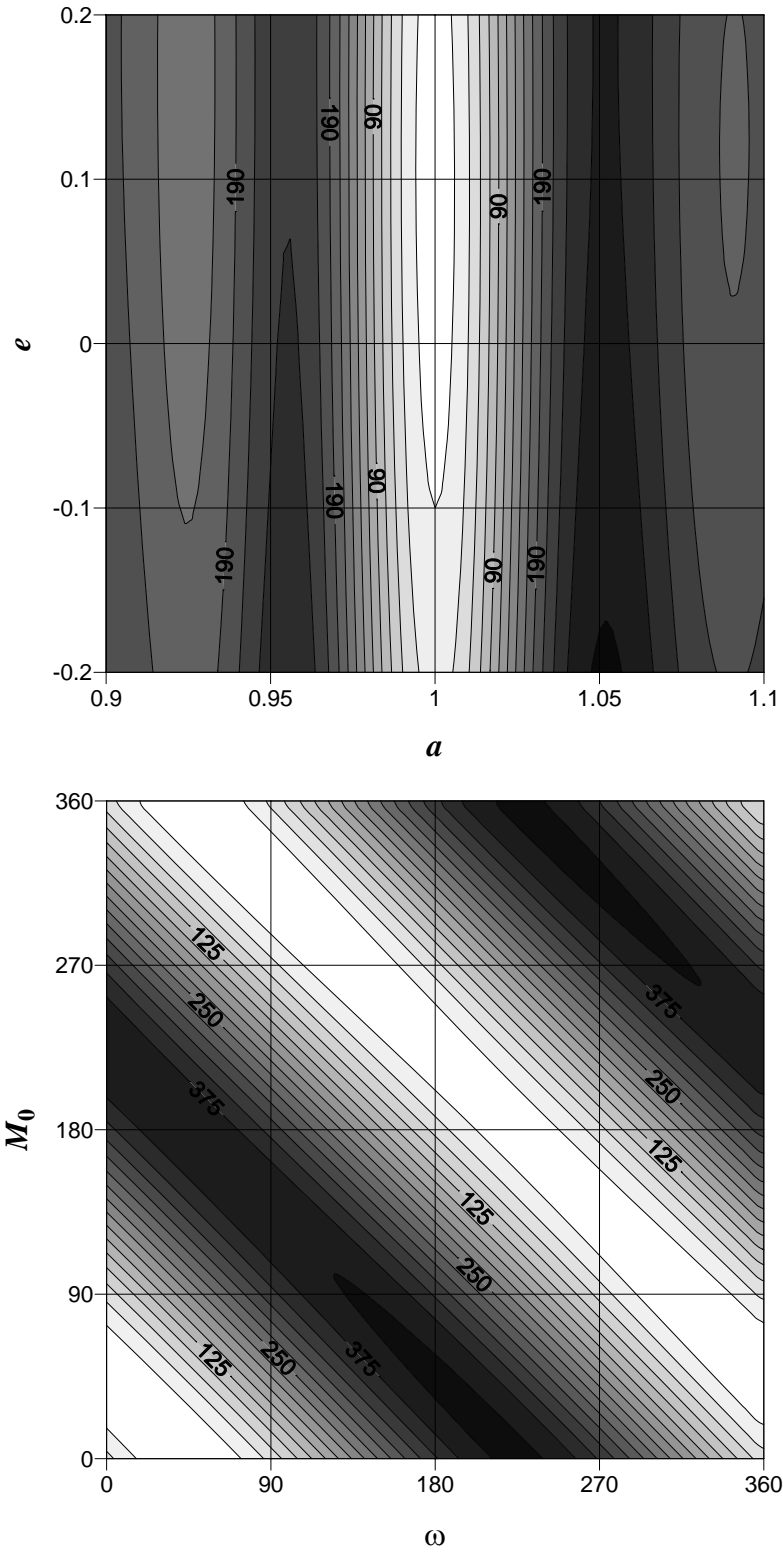


Рис. 3: Зависимость целевой функции от параметров для задачи 3

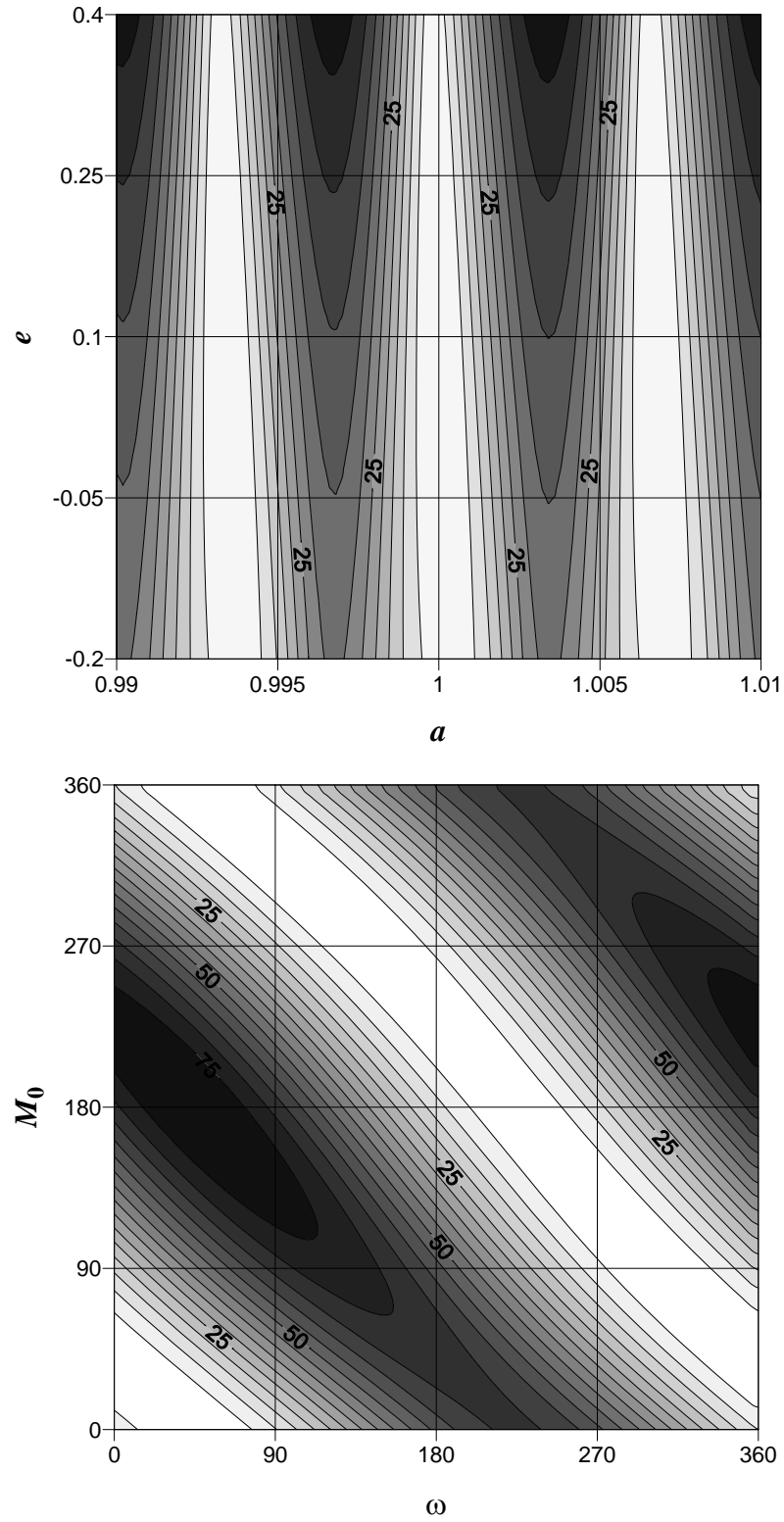


Рис. 4: Зависимость целевой функции от параметров для задачи 4

Таблица 1: Эффективность методов (хорошие начальные приближения)

Метод	<i>NS</i>			
	Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
Гаусса–Ньютона	13	7	5	11
Градиентного спуска	6215	1792	223443	более 300000
Составной	13	7	6	8

Таблица 2: Эффективность методов (плохие начальные приближения)

Метод	<i>NS</i>
Гаусса–Ньютона	Не сходится
Гаусса–Ньютона ($h = 10^{-1}$)	240
Градиентного спуска	Не сходится
Составной	14

сложное. Как отмечалось выше, метод градиентного спуска на начальном этапе, когда приближения удалены от минимума, работает лучше метода Гаусса–Ньютона, что и объясняет более высокое быстродействие составного метода. В первых же двух задачах в виду простого поведения целевой функции в составном методе работает главным образом схема Гаусса–Ньютона, поэтому применение метода градиентного спуска не приводит к повышению эффективности составного метода. Метод же градиентного спуска имеет очень низкую скорость сходимости, следовательно, его нецелесообразно использовать для решения подобного рода обратных задач. Отметим также, что демпфирование для метода Гаусса–Ньютона не применялось, эта модификация понижала быстродействие метода.

Колоссальную эффективность продемонстрировал составной метод в задаче 4 при плохих начальных приближениях: сходимость итерационного процесса достигается уже после 14 итераций (табл. 2, рис. 5). В то же время ни метод Гаусса–Ньютона, ни градиентного спуска не дают решения: метод Гаусса–Ньютона расходится, а градиентного спуска закликивается на дне оврага целевой функции. Несмотря на то что демпфирование приводит к сходимости итерационной схемы Гаусса–Ньютона,

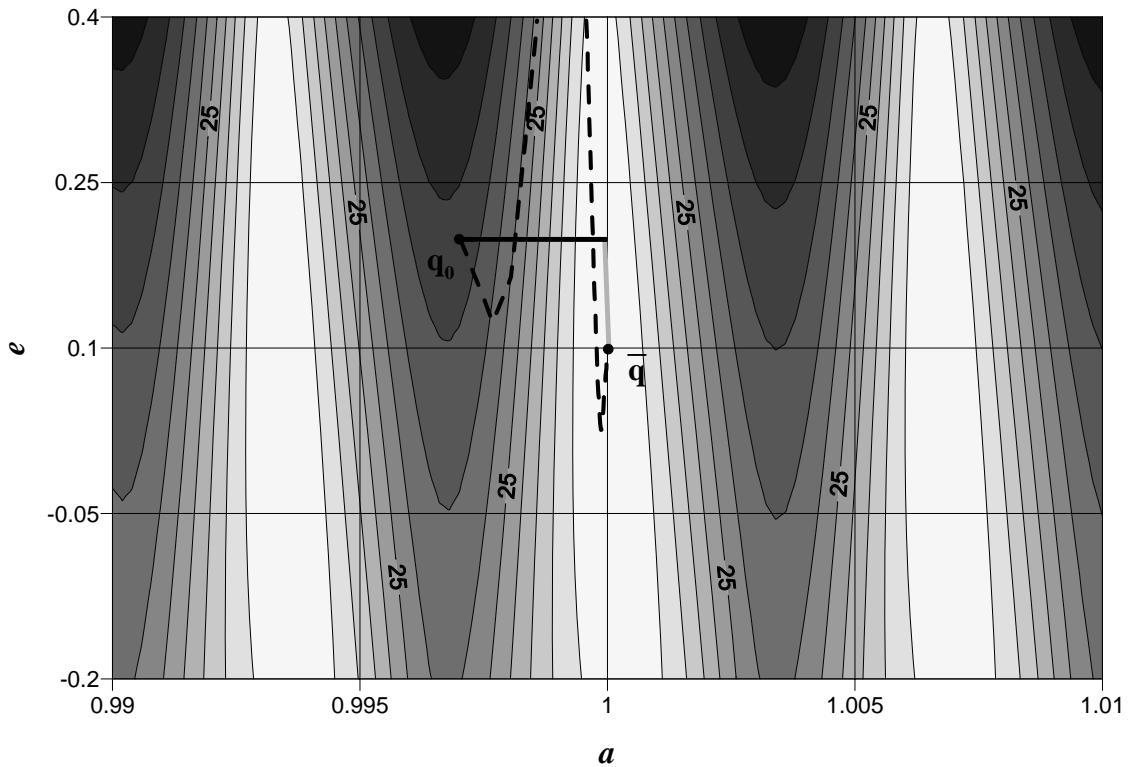


Рис. 5: Сходимость демпфированного метода Гаусса–Ньютона, градиентного спуска и составного метода. Штрихпунктирной линией обозначена схема демпфированного метода Гаусса–Ньютона, сплошной черной — градиентного спуска, сплошной серой — составного

ее скорость все же достаточно низкая, более чем на порядок ниже, нежели для составной схемы.

Из рис. 5 видно, что приближения для демпфированного метода вначале удаляются от минимума и только затем начинают сходиться в направлении к нему. Метод градиентного спуска и составной метод вначале, очевидно, сходятся по одной траектории. Однако после попадания в овраг приближения составного метода за счет подключения схемы Гаусса–Ньютона продолжают сходиться к минимуму, тогда как приближения градиентного спуска зацикливаются на дне оврага.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения курсовой работы были получены следующие результаты.

1. Программно реализованы итерационные методы решения обратной задачи орбитальной динамики, а именно методы Гаусса–Ньютона, градиентного спуска и составной метод.
2. Исследована численная эффективность методов для четырех обратных задач с принципиально разными распределениями наблюдений для хороших и грубых начальных приближений.
3. Составной метод продемонстрировал наивысшую эффективность в численном поиске решения обратной задачи даже в случае сложного поведения целевой функции относительно параметров при грубых начальных приближениях: при использовании составного метода итерационный процесс выполняется за наименьшее количество итерации и имеет наибольшую область сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М.М. Райт, — М.: Мир, 1985. — 509 с.
- [2] Ortega J. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables / J. Ortega, W. Reinboldt. — Philadelphia: Academic Press, 2000. — 572 с.
- [3] Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming / D.M. Himmelblau. — Austin: the University of Texas, 1972.
- [4] Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит / В. А. Авдюшев. — Томск: Изд-во НТЛ, 2010. — 282 с.