УДК 519.6::521.3

В.А. АВДЮШЕВ, А.Д. МЕЗЕНЦЕВА

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ МОДУЛЕЙ И ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИ ОБРАБОТКЕ ИЗМЕРЕНИЙ С ОШИБКАМИ РАЗЛИЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ[1]

В работе представлены результаты эксперимента по исследованию эффективности методов наименьших квадратов и модулей применительно к линейным и нелинейным обратным задачам с различными составами измерений и распределениями измерительных ошибок. Показано, что для некоторых распределений ошибок метод наименьших модулей более эффективен, нежели метод наименьших квадратов, однако не столь существенно, чтобы говорить о безусловном превосходстве первого над вторым, учитывая при этом более сложную алгоритмизацию метода наименьших модулей.

Введение

Одним из основных этапов численного моделирования явлений или процессов является определение модельных параметров из наблюдений, для чего, как правило, применяют метод наименьших квадратов. Суть метода состоит в минимизации целевой функции, представляющей собой сумму квадратов разностей (невязок) между наблюдениями (измерениями) и их модельными представлениями. Метод наименьших квадратов эквивалентен методу максимального правдоподобия, если случайные ошибки измерений распределены по нормальному закону. Именно в этом случае метод наиболее эффективен. Однако если вероятностное распределение ошибок существенно отличается от нормального, то эффективность метода оказывается под сомнением, и тогда целесообразно обратиться к альтернативным методам оценивания модельных параметров.

В данной работе в качестве такой альтернативы рассматривается редко используемый на практике метод наименьших модулей, идея которого, в отличие от метода наименьших квадратов, состоит в минимизации (взвешенной) суммы модулей невязок. Метод обеспечивает максимум функции правдоподобия, т.е. он наиболее эффективен, если ошибки измерений распределены по закону Лапласа. Цель работы как раз состоит в том, чтобы экспериментально исследовать эффективность метода наименьших модулей в сравнении с эффективностью метода наименьших квадратов при различных распределениях ошибок измерений применительно к линейным и нелинейным (динамическим) моделям.

1. Методы наименьших квадратов и модулей

Обратная задача динамики состоит в определении динамических параметров исследуемого объекта из его наблюдений в рамках выбранной динамической модели.

Пусть имеем J наблюденных положений объекта $\mathbf{p}_i^O$ в L-мерном пространстве на моменты времени t_i $(i = 1,\ldots,J)$. Требуется из наблюдений $\mathbf{p}_i^O$ определить K параметров $\mathbf{q}$ модели $\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t,\mathbf{q})$.

Метод наименьших квадратов является наиболее распространенным для решения обратных задач. Согласно методу, определение $\mathbf{q}$ сводится к минимизации суммы квадратов невязок, т.е. целевой функции

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{J} \| \mathbf{p}_i^O - \mathbf{p}_i^C \|^2, \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i,\mathbf{q})$. Поскольку норма в (1) евклидова, то целевую функцию можно переписать в виде

$$S(\mathbf{q}) = \| \mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C \|^2, \qquad (2)$$

где $\mathbf{p}^O = (\mathbf{p}_1^O,\ldots,\mathbf{p}_J^O)^T$ и $\mathbf{p}^C = (\mathbf{p}_1^C,\ldots,\mathbf{p}_J^C)^T$ — N-мерные векторы измерений и их модельных представлений; $N = JL$. Если наблюдения разнородны или неравноточны, то целесообразно вве-

[1] Работа выполнена по заданию № 2.4024.2011 Министерства образования и науки Российской Федерации.

сти весовую симметричную (как правило, диагональную) матрицу $\mathbf{W}$ размера $N \times N$. Тогда целевую функцию (2) формально можно записать как

$$S(\mathbf{q}) = \| (\mathbf{W}^{1/2})^T (\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C) \|^2, \quad (3)$$

где $\mathbf{W}^{1/2}$ — такая матрица размера $N \times N$ (скажем, матрица-множитель разложения Холецкого), для которой $\mathbf{W}^{1/2} (\mathbf{W}^{1/2})^T = \mathbf{W}$.

Минимум целевой функции (2) находится из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = -2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Система уравнений (4) нелинейна, поэтому на практике для ее решения прибегают к итерационным методам [1,2,3]. Решение системы (4), минимизирующее также целевую функцию, будем обозначать $\hat{\mathbf{q}}$.

Между тем существует принципиально иной, хотя и не так часто используемый способ определения динамических параметров из наблюдений, а именно основанный на принципе наименьших модулей. Примечательной особенностью этого способа является то, что если ошибки наблюдений распределены заметно не по нормальному закону, то оценки $\hat{\mathbf{q}}$ метода наименьших модулей будут эффективнее оценок метода наименьших квадратов, т.е. можно ожидать более высокую точность определяемых параметров.

Целевая функция метода наименьших модулей имеет вид

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} |p_i^O - p_i^C|.$$

В то же время нетрудно видеть, что формально ее можно привести к целевой функции взвешенного метода наименьших квадратов (3) с диагональной весовой матрицей $\mathbf{W}$, где в качестве весов будут выступать обратные величины невязок $w_i = 1/|p_i^O - p_i^C|$, т.е.

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{N} w_i (p_i^O - p_i^C)^2. \quad (5)$$

Таким образом, для минимизации (5) могут применяться те же итерационные методы, что и для (3). Однако ввиду зависимости весов от параметров $\mathbf{q}$ минимизация выполняется поэтапно, а именно, на каждом следующем этапе используется весовая матрица, определяемая по оценкам параметров (точнее, по невязкам) предыдущего этапа, которые рассматриваются как постоянные, а очередные приближенные оценки находятся в результате итерационной минимизации целевой функции взвешенного метода наименьших квадратов, и так до сходимости оценок по достижении требуемой точности. При этом на первом этапе принимается единичная весовая матрица. Очевидно, реализация такого подхода может быть существенно более трудоемкой, нежели в случае решения обратной задачи методом наименьших квадратов.

2. Эффективность метода наименьших модулей для арифметического среднего

Для исследования эффективности метода наименьших модулей предварительно нами была рассмотрена простая линейная модель

$$p^C = q.$$

В данном случае целевая функция (1) метода наименьших квадратов принимает вид

$$S(q) = \sum_{i=1}^{N} (p_i^O - p_i^C)^2 = \sum_{i=1}^{N} (p_i^O - q)^2. \quad (7)$$

Здесь $p_i^O = \overline{p}_i^O + \delta p_i^O = \overline{q} + \delta p_i^O$, в свою очередь, $\overline{p}_i^O = \overline{q}$ — это i-ое измерение без ошибки; δp_i^O — ошибка i-го измерения, а $\overline{q}$ — истинное значение параметра. Без потери общности в качестве $\overline{q}$ примем значение, равное нулю. В этом случае целевая функция (7) перепишется как

$$S(q) = \sum_{i=1}^{N} (\delta p_i^O - q)^2.$$

Тогда из необходимого условия экстремума имеем оценку для метода наименьших квадратов

$$\hat{q}^S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta p_i^O. \tag{8}$$

Как видно, она представляет собой среднее арифметическое ошибок измерений.

В соответствии с реализацией метода наименьших модулей, как поэтапного решения метода наименьших квадратов, итерационная схема для него будет иметь вид

$$\hat{q}_{k+1}^M = \frac{\sum_{i=1}^{N} (w_i)_{k+1} \delta p_i^O}{\sum_{i=1}^{N} (w_i)_{k+1}}, \tag{9}$$

где $(w_i)_{k+1} = 1/|\delta p_i^O - \hat{q}_k^M|$. Здесь в качестве начального приближения $\hat{q}_0^M$ целесообразно выбрать оценку наименьших квадратов $\hat{q}^S$ (8), когда веса единичные.

Эффективность метода наименьших модулей рассматривалась на примере шести законов распределения случайных ошибок δp_i^O, а именно для равномерного распределения (U), нормального (N), квадратично-нормального (N^2), Коши (C), Стьюдента (S) (для степени свободы, равной двум), а также Лапласа (L). Моделирование этих распределений реализовано программно на языке Фортран 90.

Предположим, что случайная величина u распределена равномерно на отрезке [0,1]. Тогда распределение U моделировалось как

$$\mathrm{U} = -1 + 2u.$$

При этом для генерирования u использовался стандартный датчик псевдослучайных равномерно распределенных чисел Фортрана 90.

В свою очередь, стандартная нормально распределенная величина x (N) выражается через две независимые равномерно распределенные величины u_1 и u_2 с использованием одной из формул Бокса–Мюллера:

$$x = \mathrm{N} = \cos(2\pi u_1)\sqrt{-2\ln u_2} \quad \text{либо} \quad x = \mathrm{N} = \sin(2\pi u_1)\sqrt{-2\ln u_2}.$$

Другие распределения моделировались посредством нормально распределенных величин x_i:

$$\mathrm{N}^2 = x_1 |x_1|, \quad \mathrm{C} = \frac{x_1}{x_2}, \quad \mathrm{S} = \frac{x_1}{\sqrt{(x_2^2 + x_3^2)/2}}, \quad \mathrm{L} = x_1 x_2 - x_3 x_4.$$

Следует заметить, что, согласно теории, метод наименьших квадратов дает наиболее эффективные оценки параметров (в линейном случае) именно при нормально распределенных ошибках измерений, тогда как метод наименьших модулей — при лапласовском распределении.

Отметим особенности двух распределений: квадратично-нормального (N^2) и Коши (C). В первом основная вероятностная масса случайных величин сосредоточена около нуля, во всяком случае, ее концентрация существенно выше, чем у нормального распределения. В то же время высока вероятность значений случайных величин больше трех. Кроме того, известной особенностью распределения Коши является то, что оно не имеет дисперсии, и высока вероятность получения достаточно больших случайных величин, что видно уже из формулы ее моделирования.

Показатель эффективности метода наименьших модулей определялся по формуле

$$æ = \frac{\sigma^S}{\sigma^M}, \tag{10}$$

где σ^S и σ^M — среднеквадратические отклонения оценок метода наименьших квадратов и метода наименьших модулей соответственно. Впрочем, обычно в качестве показателя эффективности рассматривают отношение квадратов среднеквадратических отклонений [4]. Если æ принимает значение больше единицы, то разброс оценок, получаемых для метода наименьших модулей, меньше, чем для метода наименьших квадратов, следовательно, эффективность метода наименьших модулей выше, т.е. можно ожидать более точные оценки.

Рассматривалось четыре выборки наблюдений различного объема N, содержащих 10, 100, 1000 и 10000 измерений. При этом среднеквадратические отклонения оценок относительно $\overline{q} = 0$ определялись в результате выполнения $m = 10000$ экспериментов:

$$(\sigma^{S,M})^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{q}_i^{S,M})^2,$$

где $\hat{q}_i^{S,M}$ — оценка соответствующего метода для i-го эксперимента. Полученные результаты приведены в табл. 1.

Табл. 1. Эффективность метода наименьших модулей для различных законов распределения ошибок измерений

N	æ					
	U	N	N^2	C	S	L
10	0.75	0.91	1.84	93.46	2.01	1.15
100	0.63	0.83	5.94	245.45	4.05	1.31
1000	0.59	0.81	19.92	280.11	3.84	1.39
10000	0.59	0.80	63.28	523.98	3.53	1.40

Результаты таблицы показывают, что только для равномерного и нормального распределения ошибок измерений более эффективен метод наименьших квадратов, тогда как в остальных случаях — метод наименьших модулей. Кроме того, чрезвычайно высокая эффективность последнего проявляется для квадратично-нормального распределения (N^2) и распределения Коши (C), при этом эффективность повышается с увеличением объема выборки измерений. По-видимому, это связано с упомянутыми выше особенностями распределений: высокой концентрацией случайных величин около нуля для квадратично-нормального распределения и достаточно большими величинами для распределения Коши, с чем успешно справляется метод наименьших модулей, который как взвешенный метод наименьших квадратов учитывает вклад в оценку высокоточных измерений более, нежели низкоточных.

Высокая эффективность метода наименьших квадратов для нормального распределения и метода наименьших модулей для распределения Лапласа очевидна, и это хорошо согласуется с теоретическими результатами. Отметим также, что эффективность методов практически не зависит от наблюдений, и асимптотически (когда $N \to \infty$) сходится к теоретическому значению [4].

Между тем высокая эффективность метода наименьших квадратов для равномерного распределения наводит на мысль, что искусственное ограничение распределения случайных величин, выступающих в качестве измерений, а в данном случае и ошибок, т.е. игнорирование измерений с большими ошибками, может повысить точность оценки метода. Такая процедура фактически соответствует отбраковки измерений, которая, однако, на практике выполняется не по ошибкам измерений, которые неизвестны, а по невязкам, рассматриваемым как оценки ошибок измерений.

Мы провели эксперимент повторно, выполняя отбраковку измерений, т.е. ошибок, величины которых превышали единицу: $|\delta p^O| < 1$. Такое ограничение, очевидно, приводит к значительной фильтрации измерений. Тем не менее оно было принято намеренно, с тем чтобы полученные результаты более выразительно демонстрировали влияние отбраковки на эффективность метода наименьших модулей. Результаты приведены в табл. 2, из которой видно, что процедура отбраковки существенно повышает эффективность метода наименьших квадратов настолько, что она для большинства распределений ошибок измерений (кроме квадратично-нормального распределения N^2) становится выше эффективности метода наименьших модулей, причем показатель æ уменьшается с увеличением объема выборки наблюдений. В случае квадратично-нормального распределения (N^2) метод наименьших квадратов уступает потому, что при отбраковки не устраняется особенность этого распределения, о которой говорилось выше.

Табл. 2. Эффективность метода наименьших модулей для различных законов распределения ошибок измерений с отбраковкой $|\delta p^O| < 1$.

N	æ					
	U	N	N²	C	S	L
10	0.75	0.79	1.19	0.82	0.81	0.86
100	0.63	0.67	2.97	0.71	0.70	0.81
1000	0.59	0.64	10.01	0.68	0.66	0.80
10000	0.59	0.64	32.03	0.67	0.65	0.80

Табл. 3. Эффективность метода наименьших модулей для различных законов распределения ошибок измерений с отбраковкой $|\delta p^O| < 3$.

N	æ					
	U	N	N²	C	S	L
10	0.75	0.83	1.39	0.99	0.96	1.01
100	0.63	0.80	4.06	0.97	0.92	1.10
1000	0.59	0.79	13.34	0.96	0.90	1.14
10000	0.59	0.79	43.85	0.96	0.89	1.14

В табл. 3 также приведены результаты с отбраковкой, но с более щадящим ограничением $|\delta p^O| < 3$, соответствующим известному правилу трех сигм, которое часто применяется на практике. Как видно, с увеличением предельного значения допустимых ошибок эффективность метода наименьших модулей немного повысилась, а в случае лапласовского распределения ошибок даже стала чуть выше эффективности метода наименьших квадратов.

Таким образом, полагая, что полученные результаты будут справедливы и для более сложных и нелинейных моделей, можно прийти к следующим выводам. Поскольку распределения N^2 и C практически не встречаются на практике, а количество измерений редко превышает 1000, причем сами измерения еще до обработки подвергаются процедуре отбраковки, то не стоит ожидать существенного превосходства метода наименьших модулей над методом наименьших квадратов по точности. Учитывая, кроме того, простоту программной реализации метода наименьших квадратов, мы бы не рекомендовали прибегать к его рассматриваемой альтернативе.

Следует также отметить, что даже для простой линейной модели оценка метода наименьших модулей находится итерационным способом (9). Поэтому для ее получения необходимы большие объемы вычислений, нежели для оценки метода наименьших квадратов. На рис. 1 представлено количество итераций, требуемых для сходимости метода наименьших модулей с точностью до 10^{-12} для нормального закона распределения ошибок N. Как видно из рисунка, метод наименьших модулей достаточно трудоемок, и весьма высока вероятность получения оценок лишь за 20–

30 итераций. Для других распределений ошибок трудоемкость итерационного процесса приблизительно такая же.

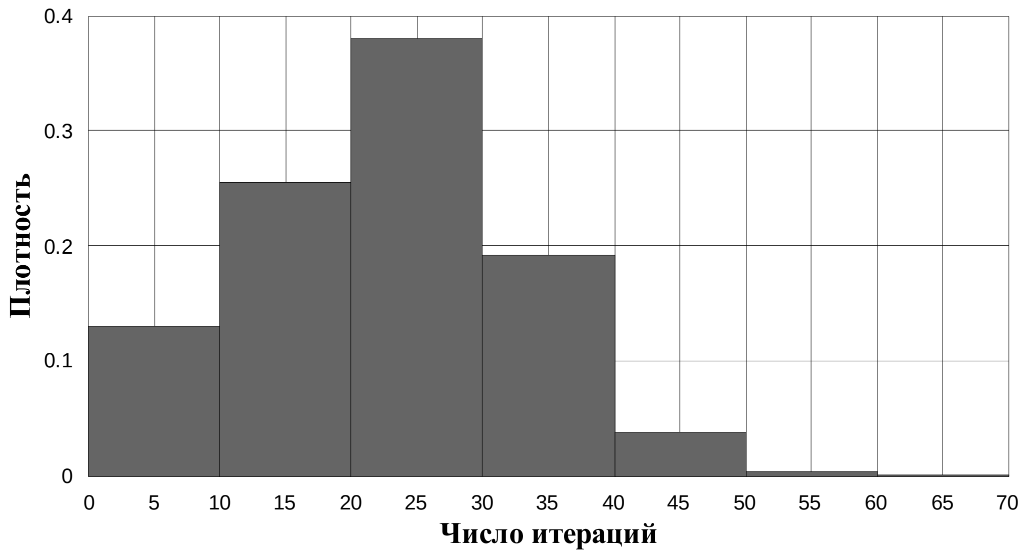

Рис. 1. Количество итераций, требуемых для получения оценок метода наименьших модулей при нормальном распределении ошибок.

Далее рассмотрим эффективность метода наименьших модулей для более сложной нелинейной модели, а именно орбитальной, основанной на формулах плоской задачи двух тел, где в качестве оцениваемых параметров выступают четыре орбитальных элемента.

3. Метод наименьших модулей в обратных задачах орбитальной динамики

Формально численную модель движения небесного тела $\mathbf{p}^C$ в плоскости в декартовых координат $\mathbf{p} = (x, y)$ $(L = 2)$ можно представить в виде

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}), \tag{11}$$

где t — время; $\mathbf{q} = (a, e, \omega, M_0)^T$ — 4-мерный вектор определяемых орбитальных параметров (a — большая полуось, e — эксцентриситет, ω — аргумент перицентра, M_0 — средняя аномалия в начальную эпоху t_0). Параметры модели определяются из известных J положений $\mathbf{p}_i^O = (x_i^O, y_i^O)$ на моменты времени t_i $(i = 1, \ldots, J)$.

Положение $\mathbf{p}^C$ (11) на заданный момент t определяется по формулам безразмерной $(\mu = 1)$ эллиптической ($e < 1$) плоской задачи двух тел

$$x^C = r\cos(\upsilon + \omega), \quad y^C = r\sin(\upsilon + \omega), \tag{12}$$

где υ — истинная аномалия; r — радиус-вектор. Если ввести орбитальные координаты

$$\xi = r\cos\upsilon, \quad \eta = r\sin\upsilon;$$

то x^C и y^C (12) можно переписать как

$$x^C = \xi\cos\omega - \eta\sin\omega, \quad y^C = \xi\sin\omega + \eta\cos\omega.$$

В свою очередь, орбитальные координаты, а также радиус-вектор выражаются через эксцентрическую аномалию E как

$$\xi = a\cos E - ae, \quad \eta = a\sqrt{1 - e^2}\sin E, \quad r = a(1 - e\cos E). \tag{13}$$

Эксцентрическая аномалия E в (13) определяется из уравнения Кеплера

$$E - e\sin E = n(t - t_0) + M_0,$$

где $n = a^{-3/2}$ — среднее движение.

С целью исследования эффективности метода наименьших модулей в обратных задачах орбитальной динамики был проведен численный эксперимент. Для этого мы составили программу на языке Фортран 90, реализующую методы наименьших модулей и квадратов, с использованием итерационной схемы Гаусса–Ньютона, которая позволяла определять орбитальные параметры $\mathbf{q} = (a, e, \omega, M_0)$ по наблюденным (моделируемым) координатам (x_i^O, y_i^O) в рамках кеплеровской орбитальной модели.

По модельным наблюдениям определялась кеплеровская орбита с параметрами $a = 1$, $e = 0.1, \omega = 45^\circ, M_0 = 0$, которые выбирались в качестве начальных приближений для итерационного процесса. Наблюдения моделировались на основе формул задачи двух тел с точными значениями орбитальных параметров на заданные моменты времени. В эти (точные) наблюдения затем вносились ошибки, распределенные по нормальному (N), равномерному (U), квадратично-нормальному (N^2) и лапласовому (L) законам. Ошибки моделировались, как и для арифметического среднего, однако, чтобы обеспечить их малость, они умножались на величину 10^{-8}.

Рассматривались пять обратных задач. В первой задаче моделировались 10 наблюдений за короткий период времени $\Delta t = 2\pi/10\,(\mathbf{10})$. Во второй задаче — 20 наблюдений, рассредоточенных на концах длительного временного интервала $\Delta t = 200\pi$ (100 оборотов), по 10 наблюдений в каждой группе на орбитальных дугах $\Delta t = 2\pi/10\,(\mathbf{10}+\mathbf{10})$. В остальных трех случаях моделировались 100, 1000 и 10000 наблюдений, равномерно распределенных за периоды $\Delta t = 2\pi$, $\Delta t = 20\pi$ и $\Delta t = 200\pi$ соответственно $(\mathbf{100}, \mathbf{1000}, \mathbf{10000})$. Эффективности метода наименьших модулей, как и в случае арифметического среднего, определялась по формуле (10).

На примере арифметического среднего нами было показано, что когда случайные ошибки распределены по нормальному или равномерному законам более эффективным методом является метод наименьших квадратов. Результаты, показывающие эффективность методов для обратных задач орбитальной динамике, для этих распределений приведены в табл. 4 и 5. Хорошо видно, что (для умеренного и большого числа наблюдений) значения оценок, полученных здесь и для арифметического среднего, очень близки.

Так же, как и в случае арифметического среднего, при квадратично-нормальном (N^2) и лапласовом (L) распределениях ошибок измерений эффективность метода наименьших модулей высокая. Однако все же для орбитальной модели она значительно ниже эффективности для арифметического среднего. Так, при распределении Лапласа вообще можно говорить о том, что методы одинаково хороши.

Наконец, заметим, что несмотря на разный разброс параметрических оценок методов, их корреляции очень хорошо согласуются. Это видно из рис. 2. Здесь показано распределение оценок параметров в проекции на плоскость $a - e$ в случае, когда наблюдений покрывают короткую орбитальную дугу, а ошибки наблюдений распределены по нормальному закону. Для других же обратных задач, независимо от распределений ошибок, корреляции параметрических оценок также хорошо согласуются. Кстати, из рис. видно, что разброс оценок для метода наименьших модулей (серый цвет) заметно больше, нежели для метода наименьших квадратов, что подтверждает результаты таб. для соответствующей обратной задачи $(\mathbf{10})$.

Табл. 4. Эффективность метода наименьших модулей в случае распределения ошибок по нормальному закону (N).

Задача	æ			
	a	e	ω	M_0
10	0.79	0.79	0.78	0.78
10+10	0.80	0.80	0.80	0.80
100	0.81	0.80	0.80	0.80
1000	0.80	0.81	0.81	0.81
10000	0.80	0.81	0.81	0.80

Табл. 5. Эффективность метода наименьших модулей в случае распределения ошибок по равномерному закону (U).

Задача	æ			
	a	e	ω	M_0
10	0.69	0.69	0.68	0.68
10+10	0.63	0.63	0.63	0.63
100	0.60	0.58	0.58	0.59
1000	0.58	0.58	0.58	0.58
10000	0.58	0.58	0.58	0.58

Табл. 6. Эффективность метода наименьших модулей в случае распределения ошибок по квадратично-нормальному закону (N^2).

Задача	æ			
	a	e	ω	M_0
10	1.32	1.32	1.32	1.32
10+10	2.15	2.11	2.15	2.15
100	4.01	4.66	4.60	4.39
1000	12.49	12.49	14.30	14.12
10000	18.13	14.11	21.59	21.63

Табл. 7. Эффективность метода наименьших модулей в случае распределения ошибок по закону Лапласа (L).

Задача	æ			
	a	e	ω	M_0
10	0.98	0.98	0.97	0.98
10+10	1.06	1.06	2.15	1.06
100	1.11	1.12	4.60	1.12
1000	1.17	1.17	14.30	1.16
10000	1.18	1.18	21.59	1.18

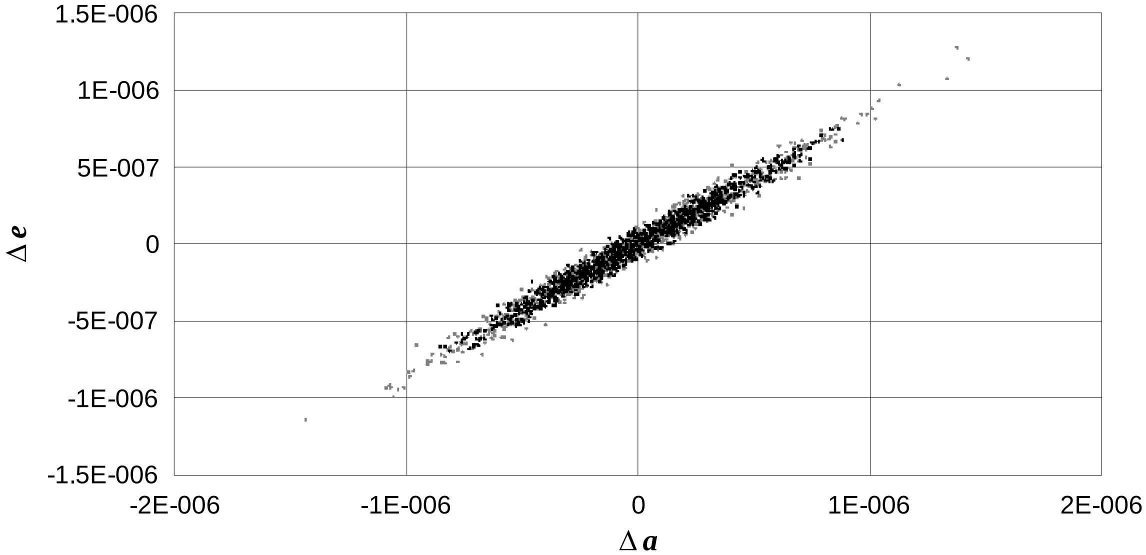

Рис. 2. Распределение оценок на плоскости $a - e$ для нормального закона распределения ошибок наблюдений (черный цвет — метод наименьших квадратов; серый — метод наименьших модулей)

Заключение

Таким образом, показано, что эффективность метода наименьших квадратов в случае тождественной (линейной) модели выше только для равномерного и нормального распределений ошибок из всех рассмотренных. Однако после отбраковки грубых наблюдений эффективность метода наименьших модулей почти во всех случаях (исключая квадратично-нормальное распределение ошибок) падает и становится сравнимой с эффективностью метода наименьших квадратов. Схожая ситуация имеет место в случае орбитальной (нелинейной) модели.

В итоге результаты приводят к следующему заключению. Поскольку квадратично-нормальное распределение практически не встречается на практике, причем сами измерения еще до обработки подвергаются процедуре отбраковки, то не стоит ожидать существенного превосходства метода наименьших модулей над методом наименьших квадратов по точности. Учитывая, кроме того, простоту программной реализации метода наименьших квадратов, мы бы не рекомендовали прибегать к его рассматриваемой альтернативе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гилл Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М.М. Райт, М.: Мир, 1985. 509 с.
2. Ortega J. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables / J. Ortega, W. Reinboldt. Philadelphia: Academic Press, 2000. 572 с.
3. Himmelblau D.M. Applied Nonlinear Programming / D.M. Himmelblau. Austin: the University of Texas. 1972.
4. Мудров В. И. Метод наименьших модулей / В. И. Мудров, В. Л. Кушко. М.: Знание, 1971. 64 с.
5. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит / В. А. Авдюшев. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 282 с.

V.A. AVDYUSHEV, A.D. MEZENTSEVA

LEAST SQUARES AND ABSOLUTE DEVIATIONS METHODS AND THEIR EFFICIENCIES WHEN PROCESSING MEASUREMENTS WITH ERRORS OF DIFFERENT DISTRIBUTIONS

In the paper are discussed the efficiencies of the least squares and absolute deviations methods applied to linear and nonlinear inverse problems with various sets of mesurements and distributions of measurement errors. It is shown that for some error distributions the method of least absolute deviations is more efficient than that of least squares, however, it is not so much to indicate a clear superiority of the former over the latter takin account of more complicated algorithm of the least absolute deviations method.