

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский  
Томский государственный университет»  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

УДК 521.3

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК  
зав. каф. астрономии и  
космической геодезии.  
д. ф.-м. н. Авдюшев В.А. \_\_\_\_\_  
« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 г.

**Есипов Павел Александрович**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ТОЧНОСТИ  
ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ  
АСТЕРОИДОВ ОТ КОЛИЧЕСТВА НАБЛЮДЕНИЙ И  
ДЛИНЫ МЕРНОГО ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА**

Квалификационная работа на соискание степени магистра  
по направлению подготовки  
03.04.02 — Физика

Научный руководитель  
д. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_ Авдюшев В.А.

Автор работы

\_\_\_\_\_ Есипов П. А.

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>2</b>
<b>1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ</b>	<b>4</b>
<b>2 ИНТЕГРАТОР ЭВЕРХАРТА</b>	<b>5</b>
2.1 Основные формулы . . . . .	5
2.2 Интегрирование на шаге . . . . .	7
2.3 Оценивание локальной точности и алгоритм выбора шага .	8
<b>3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ</b>	<b>10</b>
3.1 Обратная задача орбитальной динамики . . . . .	10
3.2 Модельные представления наблюдений . . . . .	11
3.3 Изохронные производные . . . . .	13
3.4 Методы решения обратной задачи . . . . .	13
3.5 Точность определяемых орбитальных параметров . . . . .	14
<b>4 АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ</b>	<b>15</b>
<b>5 ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ</b>	<b>16</b>
<b>6 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ</b>	<b>18</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>22</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>23</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из методов исследования орбит является математическое моделирование. Математическая модель орбитального движения представляет собой совокупность уравнений, связывающих между собой параметры, которые непосредственно характеризуют динамическое состояние объекта на орбите. Таким образом, исследовательский процесс сводится к решению конкретной математической задачи, а именно к решению соответствующих уравнений. В современной постановке почти все такие задачи не имеют точных решений, поэтому при моделировании используются либо приближенные аналитические, либо численные методы.

В последнее время главным образом за счет интенсивного развития компьютерных технологий для исследования орбит все чаще прибегают к численным методам. Процесс реализации математической модели численным методом на компьютере называется численным моделированием. Следовательно, численная модель представляет собой связку, по меньшей мере, трех компонент: математической модели, численного метода и компьютера. Современная математическая модель орбиты основывается на достаточно сложных дифференциальных уравнениях небесной механики, которые не интегрируются аналитически. Для их решения прибегают к приближенным численным методам интегрирования, и весь этот процесс реализуется на подручном компьютере.

Численное моделирование является мощным средством для исследования орбит небесных тел, и оно стало уже почти традиционным в современной практике. Между тем построение добротной численной орбитальной модели — процесс весьма трудоемкий, на что от разработчика могут потребоваться весьма широкие и углубленные знания не только небесной механики, но и самых различных разделов математики, а также годы кропотливой работы по их программной реализации и последующему тестированию.

Одним из основных и важных этапов численного моделирования орбит является определение модельных параметров из наблюдений, для чего, как правило, применяют метод наименьших квадратов, суть которого состоит в минимизации целевой функции, представляющей собой сумму квадратов разностей (невязок) между наблюдениями (измерениями) и

их модельными представлениями. Очевидно, чем точнее определяются орбитальные параметры небесного тела, тем точнее можно выполнять прогноз его движения. Между тем точность определяемых параметров зависит не только от точности наблюдений, но также от их количества и от временного (мерного) интервала, на котором они распределены.

Главной целью квалификационной работы как раз являлось исследование зависимости точности определяемых орбитальных параметров астероидов от количества наблюдений и длины мерного временного интервала. Для достижения поставленной цели предполагалось выполнить следующие задачи: 1) построить численную модель орбитального движения, программно реализованную на процедурном языке Фортран 90; 2) выполнить тестирование разработанного программного комплекса на примере астероида Апофис; 3) провести численный эксперимент по исследованию зависимости точности определяемых параметров от количества наблюдений и длины мерного временного интервала на примере некоторых астероидов главного пояса; 4) выполнить анализ полученных численных результатов.

# 1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Будем рассматривать движение небесного тела, объекта с пренебрежимо малой массой, в поле тяготения Солнца под действием гравитационных сил больших планет, Плутона и Луны в гелиоцентрической геоэквиаториальной прямоугольной системе координат, отнесенной на стандартную эпоху J2000. Тогда дифференциальные уравнения орбитального движения будут иметь вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \mathcal{P}(t, \mathbf{x}),$$

или

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = \mathcal{P} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \sum_{P=1}^{10} \mu_P \left( \frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3} \right), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  и  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$  — гелиоцентрический вектор положения и скорости тела соответственно;  $t$  — физическое время;  $\mu = K^2$  — гравитационный параметр Солнца;  $K^2$  — гауссова постоянная;  $\mathbf{x}_P$  — гелиоцентрический вектор положения  $P$ -го возмущающего тела;  $\mu_P$  — его гравитационный параметр. Индексы  $P = 1-8$  соответствуют большим планетам (см. табл. 1.1);  $P = 9$  — Плутону, а  $P = 10$  — Луне. Координаты возмущающих тел  $\mathbf{x}_P$ , необходимые для вычисления значений возмущающих ускорений, определялись из эфемериды DE405 [7]. Дифференциальные уравнения движения (1.1) интегрировались численно методом Эверхарта, который описывается в следующем разделе.

Табл. 1.1: Массы возмущающих тел

$P$	Объект	$M/M_P$	$P$	Объект	$M/M_P$
1	Меркурий	6023600	6	Сатурн	3497.898
2	Венера	408523.71	7	Уран	22902.98
3	Земля	328900.5614	8	Нептун	19412.24
4	Марс	3098708	9	Плутон	135200000
5	Юпитер	1047.3486	10	Луна	26739799,82613

## 2 ИНТЕГРАТОР ЭВЕРХАРТА

В 1973 г. Э. Эверхарт предложил интегратор [2], разработанный им специально для численного исследования орбит, и продемонстрировал его высокую эффективность в задачах кометной динамики. По-видимому, обнаружив в дальнейшем принадлежность своего интегратора к семейству интеграторов типа Бутчера, Эверхарт акцентировал внимание на оригинально реализованном им алгоритме интегрирования и обобщил его для численного решения любых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков [3, 4]. Тем самым ему удалось расширить область применения своего интегратора, который тем не менее остается одним из самых популярных именно в решении задач небесной механики.

### 2.1 Основные формулы

Предположим, на шаге  $h$  мы решаем задачу Коши

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0).$$

Представим приближенно правую часть уравнений  $\mathbf{f}$  в виде канонического многочлена степени  $s - 1$ :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_\tau/h = \mathbf{f} \approx \mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^s \mathbf{a}_j \tau^{j-1}, \quad (2.1)$$

где коэффициенты  $\mathbf{a}$  пока не определены. Интегрируя (2.1) по  $\tau$ , получаем приближенное решение

$$\mathbf{x}(t_0 + h\tau) \approx \mathbf{g}(t_0 + h\tau) = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \frac{\mathbf{a}_j}{j} \tau^j. \quad (2.2)$$

Перепишем канонический многочлен (2.1) в виде интерполяционного многочлена Ньютона на сетке  $c_1, \dots, c_s$ :

$$\mathbf{f} \approx \mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \sum_{j=2}^s \boldsymbol{\alpha}_j \prod_{m=1}^{j-1} (\tau - c_m). \quad (2.3)$$

Равенство правой части уравнения и многочлена в (2.3) имеет место в узловых точках  $c_i$ , называемых точками коллокации, поэтому из соотношений

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0 + hc_1, \mathbf{g}(t_0 + hc_1)) = \boldsymbol{\alpha}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{g}(t_0 + hc_i)) = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{y}_i) = \\ &= \boldsymbol{\alpha}_1 + \sum_{j=2}^i \boldsymbol{\alpha}_j \prod_{m=1}^{j-1} (c_i - c_m) \quad (i = 2, \dots, s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

последовательно получаем конечные разности  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_1 &= \mathbf{k}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 &= (\mathbf{k}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1)/(c_2 - c_1), \\ \boldsymbol{\alpha}_3 &= ((\mathbf{k}_3 - \boldsymbol{\alpha}_1)/(c_3 - c_1) - \boldsymbol{\alpha}_2)/(c_3 - c_2), \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

В свою очередь, сравнивая коэффициенты многочленов (2.1) и (2.3) при одинаковых степенях  $\tau$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + (-c_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (c_1c_2)\boldsymbol{\alpha}_3 + \dots + (-1)^{s-1}(c_1 \dots c_{s-1})\boldsymbol{\alpha}_s, \\ \mathbf{a}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 + (-c_1 - c_2)\boldsymbol{\alpha}_3 + \dots, \\ &\dots \\ \mathbf{a}_s &= \boldsymbol{\alpha}_s. \end{aligned}$$

Эти соотношения, а также обратный переход от  $\mathbf{a}$  к  $\boldsymbol{\alpha}$  можно представить как

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=j}^s c_{ij} \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \sum_{i=j}^s d_{ij} \mathbf{a}_i \quad (j = 1, \dots, s). \quad (2.6)$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  и  $d_{ij}$  являются числами Стирлинга, которые вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{ii} &= d_{ii} = 1, \quad c_{i0} = d_{i0} = 0 \quad (i > 0), \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - c_{i-1}c_{i-1,j}, \quad d_{ij} = d_{i-1,j-1} - c_j d_{i-1,j} \quad (i > j > 0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2 Интегрирование на шаге

Величины  $\boldsymbol{\alpha}$  (2.5) определяются по  $\mathbf{k}$  (2.4), которые, в свою очередь, вычисляются по приближенным решениям в точках коллокации  $\mathbf{y}_i$ . Согласно (2.2), эти решения будем задавать как

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}(t_0 + hc_i) = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \frac{\mathbf{a}_j}{j} c_i^j \quad (i = 1, \dots, s). \quad (2.8)$$

Формулы (2.8) представляют собой неявные уравнения относительно  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{a}(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}(\mathbf{y})))),$$

поэтому они решаются итерационным способом. Для этого применяется метод простых итераций в модификации Зейделя.

Для получения начальных приближений  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  на следующем шаге  $\bar{h}$  используется информация о коэффициентах  $\mathbf{a}$  на текущем шаге  $h$ . Безразмерная независимая переменная следующего шага будет  $\bar{\tau} = (t - t_1)/\bar{h}$ , где  $t_1 = t_0 + h$ . Отсюда

$$\tau = r\bar{\tau} + 1, \quad (2.9)$$

где  $r = \bar{h}/h$ . Согласно (2.1),

$$\sum_{j=1}^s \mathbf{a}_j \tau^{j-1} = \sum_{j=1}^s \bar{\mathbf{a}}_j \bar{\tau}^{j-1}. \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) в (2.10) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\bar{\tau}$ , получаем

$$\bar{\mathbf{a}}_j = r^{j-1} \sum_{i=j}^s e_{ij} \mathbf{a}_i \quad (j = 1, \dots, s), \quad (2.11)$$

где  $e_{ij}$  — числа арифметического треугольника, вычисляемые по рекуррентным формулам

$$e_{ii} = e_{i1} = 1, \quad e_{ij} = e_{i-1,j-1} + e_{i-1,j} \quad (i > j > 1). \quad (2.12)$$

Кроме того, оценка  $\bar{\mathbf{a}}$  уточняется путем внесения поправки  $\Delta \mathbf{a}$ , получаемой как разность между значениями  $\mathbf{a}$  после итераций и оценкой  $\bar{\mathbf{a}}$  на



текущем шаге  $h$ . Далее пользуясь соотношениями (2.6) для перехода от  $\mathbf{a}$  к  $\boldsymbol{\alpha}$ , находим начальное приближение  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ .

Каждая итерация выполняется следующим образом. Сначала определяется решение  $\mathbf{y}_1$ , из которого по первой формуле (2.5) находится значение  $\boldsymbol{\alpha}_1$ , а затем по первой группе соотношений (2.6) уточняется  $\mathbf{a}_1$ . Далее определяется  $\mathbf{y}_2$ , по которому улучшается  $\boldsymbol{\alpha}_2$  и соответственно  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , и так до  $\mathbf{y}_s$ . Как правило, для получения достаточно хороших приближений необходимо всего лишь 2 итерации, очень редко — 3.

Как только величины  $\boldsymbol{\alpha}$  получены, приближенное решение на шаге  $h$  ( $\tau = 1$ ) будет

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \frac{\mathbf{a}_j}{j}. \quad (2.13)$$

В начале интегрирования, на первом шаге, итерационный процесс буквально запускается с нуля, т.е. в качестве  $\bar{\mathbf{a}}$  и  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  выбирают нулевые значения. Если начальный шаг достаточно большой, чтобы обеспечить заданную локальную точность, то его следует уменьшить. При оптимально выбранном шаге высокая точность приближений достигается уже на 4-й итерации.

В оригинальной версии интегратора Эверхарта используется левое разбиение Гаусса–Радо, а не Гаусса–Лежандра, поэтому аппроксимирующая схема имеет порядок  $p = 2s - 1$ . По-видимому, автор нашел это разбиение более удобным, поскольку оно не требует перевычислений коэффициентов в первой точке коллокации при решении нелинейных уравнений (2.8). Действительно, ведь в этом случае  $c_1 = 0$  и  $\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$ .

### 2.3 Оценивание локальной точности и алгоритм выбора шага

В интеграторе Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в (2.13). Пусть  $\|\mathbf{e}\|_{tol}$  — заданная точность. Потребуем, чтобы на следующем шаге выполнялось равенство

$$\frac{\bar{h}}{s} \|\bar{\mathbf{a}}_s\| (= \|\mathbf{e}\|_{cal}) = \|\mathbf{e}\|_{tol}.$$

Отсюда, используя последнее соотношение (2.11) ( $j = s$ ), получаем оценку

$$\bar{h} = hr = h \left( \frac{s \|\mathbf{e}\|_{tol}}{h \|\mathbf{a}_s\|} \right)^{1/s}. \quad (2.14)$$

Очевидно, при разбиениях Гаусса недостаток такой оценки состоит в том, что шаг по ней выбирается фактически как для решения порядка  $s - 1$ , поэтому, вообще говоря, она не обеспечивает сохранение требуемой локальной точности.

Во избежание слишком больших (и малых) локальных ошибок, на  $r$  следует наложить ограничение

$$\frac{1}{\sigma} < r^s < \sigma. \quad (2.15)$$

Для того чтобы величина последнего члена в (2.13) была ограничена в пределах одного порядка, значение  $\sigma$  должно быть равно  $\sqrt{10}$ . Это следует из того факта, что

$$\bar{h} \|\bar{\mathbf{a}}_s\| \sim r^s.$$

Выполнение обоих неравенств проверяется лишь в начале интегрирования при выборе стартового шага: если (2.15) не выполняется, то интегрирование повторяется с новым шагом  $\bar{h} = hr$  и так далее, пока не выполнится условие (2.15). Обычно для получения стартового шага требуется не более 4 итераций. В дальнейшем для ограничения  $r$  проверяется только правое неравенство: если неравенство не выполняется, то  $r$  принимает значение правого предела.

Начальное приближение стартового шага получается из оценки, подобной (2.14), для  $s = 2$ :

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{2h \|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1\|}}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + h, \mathbf{x}_0 + h\mathbf{k}_1), \quad (2.16)$$

где  $h$  — малая величина. Если  $h$  настолько мала, что в компьютерной арифметике  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ , она увеличивается в 10 раз, и оценка повторяется снова.

### 3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ИЗ НАБЛЮДЕНИЙ

Одним из основных этапов моделирования является определение орбитальных параметров из наблюдений, т.е. решение обратной задачи орбитальной динамики. Параметры определяются из наблюдений небесного тела, как правило, в рамках задачи наименьших квадратов, что позволяет из семейства орбит, описываемых математической моделью, выделить единственную, которая наилучшим образом соответствует реальному движению исследуемого объекта.

#### 3.1 Обратная задача орбитальной динамики

Обратная задача орбитальной динамики состоит в определении орбитальных параметров из астрометрических наблюдений в рамках выбранной модели.

Формально модель движения  $\mathbf{p}^C$  в пространстве угловых координат  $\mathbf{p} = (\alpha, \delta)^T$  ( $\alpha$  — прямое восхождение,  $\delta$  — склонение) можно представить в виде

$$\mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{q})) \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор орбитальных параметров;  $t$  — эфемеридное время;  $\mathbf{x}$  — гелиоцентрический вектор положения тела, а  $\mathbf{T}$  — преобразование перехода от  $\mathbf{x}$  к  $\mathbf{p}$ . В качестве определяемых параметров  $\mathbf{q}$  выступали компоненты вектора состояния динамической системы  $\mathbf{x}_0$  и  $\dot{\mathbf{x}}_0$  на начальный момент  $t_0$ .

Пусть имеем  $J$  наблюдаемых положений  $\mathbf{p}_i^O$  в  $L$ -мерном пространстве на моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, \dots, J$ ). Требуется по наблюдениям  $\mathbf{p}_i^O$  определить  $K$  орбитальных параметров  $\mathbf{q}$  модели  $\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q})$ .

Обычно определение  $\mathbf{q}$  сводится к минимизации суммы квадратов невязок, т.е. целевой функции

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^J \|\mathbf{p}_i^O - \mathbf{p}_i^C\|^2, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$ . Поскольку норма в (3.2) евклидова, то целевую функцию можно переписать в виде

$$S(\mathbf{q}) = \|\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C\|^2, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{p}^O = (\mathbf{p}_1^O, \dots, \mathbf{p}_J^O)^T$  и  $\mathbf{p}^C = (\mathbf{p}_1^C, \dots, \mathbf{p}_J^C)^T$  —  $N$ -мерные векторы измерений и их модельных представлений;  $N = JL$ . Если наблюдения разнородны или неравноточны, то целесообразно ввести весовую симметричную (как правило, диагональную) матрицу  $\mathbf{W}$  размера  $N \times N$ . Тогда целевую функцию (3.3) формально можно записать как

$$S(\mathbf{q}) = \|(\mathbf{W}^{1/2})^T(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)\|^2, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{W}^{1/2}$  — такая матрица размера  $N \times N$  (скажем, матрица-множитель разложения Холецкого), для которой  $\mathbf{W}^{1/2}(\mathbf{W}^{1/2})^T = \mathbf{W}$ . Фактически весовая матрица подбирается таким образом, чтобы линейно преобразованные наблюдения  $(\mathbf{W}^{1/2})^T \mathbf{p}^O$  становились равноточными. Например, при обработке астрометрических наблюдений ( $L = 2$ ) в сферических координатах  $\alpha^O$  (прямое восхождение) и  $\delta^O$  (склонение), полученных с равноточных телескопов, обычно используют весовую матрицу  $\mathbf{W} = \text{diag}(w_1, \dots, w_{2J})$ , где  $w_{2i-1} = \cos^2 \delta_i^O$  и  $w_{2i} = 1$  ( $i = 1, \dots, J$ ): известно, что с увеличением склонения  $\delta^O$  дисперсия ошибок измерения для  $\alpha^O$  обратно пропорциональна  $\cos^2 \delta^O$ , для чего и вводятся соответствующие компенсирующие веса.

Минимум функции (3.4) находится из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = -2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Система уравнений (3.5) нелинейна, и поэтому на практике для ее решения прибегают к итерационным методам, которые будут изложены ниже. Решение системы (3.5), соответствующее минимуму целевой функции, обозначим  $\hat{\mathbf{q}}$ .

### 3.2 Модельные представления наблюдений

Приведем теперь основные формулы для модельного представления наблюдений в угловых координатах  $\alpha$  и  $\delta$ .

Координатное преобразование  $\mathbf{T}$  можно представить как последовательность преобразований

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\alpha, \delta} \circ \mathbf{T}_{top} \circ \mathbf{T}_{geo}, \quad (3.6)$$

о где  $\mathbf{T}_{geo}$  и  $\mathbf{T}_{top}$  — переходы соответственно от координатной системы  $\mathbf{x}$  к геоцентрической, отнесенной на стандартную эпоху, скажем, J2000.0, и от гео- к топоцентрической системе;  $\mathbf{T}_{\alpha,\delta}$  — получение угловых координат относительно наблюдателя. Преобразование перехода к топоцентру формально можно записать в виде

$$\mathbf{T}_{top} \circ \mathbf{T}_{geo}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{EO} - \mathbf{x}_{TE} = \mathbf{x}_T, \quad (3.7)$$

где  $\mathbf{x}_{EO}$  — положение Земли в пространстве  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{x}_{TE}$  — геоцентрическое положение наблюдателя, вычисляемое по его сферическим координатам: геоцентрическому расстоянию  $b$ , широте  $\varphi$  и местному звездному времени  $s$ , как

$$x_{TE1} = b \cos \varphi \cos s, \quad x_{TE2} = b \cos \varphi \sin s, \quad x_{TE3} = b \sin \varphi,$$

$$s = \lambda + 2\pi \text{UT1} + 2\pi(24110^s \cdot 54841 + 8640184^s \cdot 812866T + 0^s \cdot 093104T^2 - 6^s \cdot 2 \cdot 10^{-6}T^3)/86400^s. \quad (3.8)$$

Здесь  $\lambda$  — долгота наблюдателя;  $T$  — юлианские столетия от стандартной эпохи J2000.0:  $T = (\text{UT1} - 2451545)/36525$ ,  $\text{UT1}$  — среднее солнечное время в сутках. Наконец, угловые координаты получаются по формулам

$$\alpha^C = \arctg \frac{x_{T2}}{x_{T1}}, \quad \delta^C = \arcsin \frac{x_{T3}}{|\mathbf{x}_T|}.$$

Наземные наблюдения  $\mathbf{p}_i^O = (\alpha_i^O, \delta_i^O)^T$ , как правило, отнесены к моментам  $t_i^O$  всемирного координированного времени (аппроксимация  $\text{UT1}$ ), поэтому при использовании численной модели (3.1) требуется предварительный переход к эфемеридному времени  $t_i^*$ . Кроме того, для получения видимых положений небесного тела  $\mathbf{p}_i^C = (\alpha_i^C, \delta_i^C)^T$  относительно земного наблюдателя необходимо также учитывать эффект запаздывания света, который выражается посредством уравнения

$$t_i = t_i^* - |\mathbf{x}_{TO}(t_i^*) - \mathbf{x}(t_i)|/c, \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{x}_{TO}(t_i^*)$  — положение топоцентра в пространстве  $\mathbf{x}$  на момент эфемеридного времени  $t_i^*$ ;  $c$  — скорость света. Уравнение (3.9) решается методом простых итераций, что предполагает многократное численное интегрирование орбиты (обычно 2–3 итерации) для получения  $\mathbf{x}(t_i)$  на каждое новое приближение эфемеридного времени. В качестве начального

приближения выбирается  $t_i = t_i^*$ . Кстати, именно полученный в результате решения уравнения вектор положения  $\mathbf{x}$  должен использоваться в формулах перехода (3.7).

### 3.3 Изохронные производные

Решение уравнений (3.5) предполагает вычисление так называемых изохронных производных  $\partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$ . Их можно представить как

$$\left. \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t_i} = \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t_i} \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{t_i}. \quad (3.10)$$

Здесь размеры матриц в левой части  $L \times K$ , а в правой  $L \times 3$  и  $3 \times K$  соответственно. При обработке астрометрических наблюдений ( $L = 2$ ) производные  $\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{x}$  определяются аналитически из дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \rho^C d\alpha^C \cos \delta^C &= -dx_1 \sin \alpha^C + dx_2 \cos \alpha^C, \\ \rho^C d\delta^C &= -dx_1 \cos \alpha^C \sin \delta^C - dx_2 \sin \alpha^C \sin \delta^C + dx_3 \cos \delta^C, \end{aligned}$$

тогда как производные  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  в соответствии с (1.1) находятся численно из дифференциальных уравнений в вариациях

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.11)$$

с начальными условиями

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)_0 = \mathbf{E}, \quad \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_0} \right)_0 = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)_0 = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_0} \right)_0 = \mathbf{E}.$$

Здесь  $\mathbf{T} = (\alpha^C, \delta^C)^T$ ,  $\rho^C = |\mathbf{x}_T|$  — топоцентрическое расстояние космического объекта;  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размера  $3 \times 3$ . Уравнения (3.11) интегрируются численно совместно с уравнениями движения. Таким образом, при моделировании интегрируется система 42-го порядка.

### 3.4 Методы решения обратной задачи

Для решения системы уравнений (3.5) чаще всего прибегают к итерационным методам типа Ньютона [8], где привлекаются вторые производные

$\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$  или их приближения в качестве дополнительной информации, уточняющей локальное поведение целевой функции.

Согласно итерационной схеме Ньютона, поправка к текущему приближению  $\mathbf{q}$  определяется как

$$\Delta \mathbf{q} = - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} \right)^{-1} \left( \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad (3.12)$$

где  $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$  — матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} = 2 \left( \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} - 2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \mathbf{W} \frac{\partial^2 \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}^2}. \quad (3.13)$$

Ввиду проблематичности вычисления вторых производных в (3.13) на практике их опускают и, таким образом, используют упрощенную схему так называемого метода Гаусса–Ньютона, который относится к широкому классу квазиньютоновских методов. Мы также применяли эту схему для минимизации целевой функции.

Введем матрицы

$$\mathbf{A}_{N \times K} = (\mathbf{W}^{1/2})^T \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_{N \times 1} = (\mathbf{W}^{1/2})^T (\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C). \quad (3.14)$$

Тогда модифицированную поправку метода Ньютона (3.12) можно переписать как

$$\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad (3.15)$$

где  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  — нормальная матрица, которая в минимуме целевой функции  $S(\mathbf{q})$  при достаточно малых невязках  $\mathbf{B}$  близка к деленной на два матрице Гессе, а  $\mathbf{G} = -\mathbf{A}^T \mathbf{B}$  — деленный на два градиент функции  $S$  по  $\mathbf{q}$ .

### 3.5 Точность определяемых орбитальных параметров

Ошибки определяемых орбитальных параметров, как правило, оцениваются из дисперсий (диагональных элементов) ковариационной матрицы

$$\mathbf{C} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{Q}^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = S(\hat{\mathbf{q}}) / (2N - 6),$$

где  $\hat{\mathbf{q}}$  — вектор оценок параметров, доставляющий минимум целевой функции  $S(\mathbf{q})$ . Тогда параметрические ошибки можно оценить как

$$\Delta q_i = \sqrt{c_{ii}} \quad (i = 1, \dots, K).$$

#### 4 АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ И ЕГО ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Численная модель астероидного движения реализована программно на процедурном языке Фортран в арифметике с двойной точностью. Опишем структуру разработанного программного комплекса.

В начале задаются положение  $\mathbf{x}_0$  и скорость  $\dot{\mathbf{x}}_0$  объекта на начальную эпоху  $t_0$ , а также считываются наблюдательные данные: время UTC, угловые координаты  $\alpha$  и  $\delta$  и код обсерватории, вносится поправка ко времени UTC для перехода к эфемеридному времени ET.

Затем на каждый из моментов времени наблюдения путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения (1.1) вычисляется гелиоцентрическое положение  $\mathbf{x}$  исследуемого тела, для чего используется интегратор Эверхарта 12-го порядка с задаваемой локальной точностью  $10^{-10}$  а.е.

После определения положения  $\mathbf{x}$  выполняется переход от прямоугольных координат  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  к угловым  $\alpha$  и  $\delta$  (3.6) с учетом эффекта запаздывания света (3.9). Попутно определяются изохорные производные (см. разд. 3.3), вычисляются невязки (O–C) и оценивается дисперсия ошибок наблюдений  $\hat{\sigma}^2 = S(\hat{\mathbf{q}})/(2N - 6)$ .

Наконец, оцениваем величину ошибки в векторе положения  $\Delta\mathbf{x}$ , а также некий параметр  $\Sigma$ :

$$|\Delta\mathbf{x}| = \sqrt{c_{11} + c_{22} + c_{33}}, \quad \Sigma = \sqrt{N}|\Delta\mathbf{x}|/\hat{\sigma}^2. \quad (4.1)$$



## 5 ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОЙ МОДЕЛИ

Численная модель орбитального движения тестировалась на примере астероида Апофис. Его орбитальные элементы представлены в табл. 5.1. Здесь  $a$  — большая полуось;  $e$  — эксцентриситет;  $i$  — наклонение к плоскости эклиптики;  $\Omega$  — долгота восходящего узла;  $\omega$  — аргумент перицентра;  $M$  — средняя аномалия.

Табл. 5.1: Орбитальные элементы Апофиса

Элемент	Значение	Элемент	Значение
$a$	0.9 а.е.	$\Omega$	204.4°
$e$	0.19	$\omega$	126.4°
$i$	3.3°	$M$	202.5°

Наблюдения Апофиса, которые мы использовали, взяты с сайта Центра малых планет (MPC) ([www.minorplanetcenter.net](http://www.minorplanetcenter.net)). Они распределены на десятилетнем временном интервале, от 15.03.2004 г. до 26.02.2014 г. (рис. 5.1). За этот период получено  $N = 4138$  ПЗС-наблюдений.

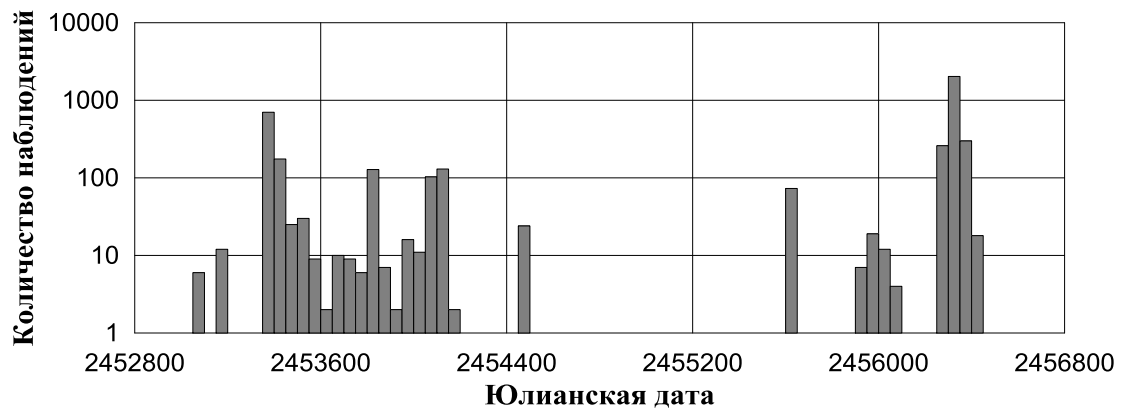


Рис. 5.1: Распределение наблюдений

Начальные приближения параметров  $\mathbf{q}$  получены из орбитальных элементов, опубликованных также на сайте MPC. Итерационный процесс определения орбиты Апофиса сошелся очень быстро, всего за 4 итерации. Изменение величины  $\sigma = \sqrt{S(\mathbf{q})/2N}$ , характеризующей согласие результатов модели и наблюдений, представлено в табл. 5.2, из которой видно, что процесс минимизации целевой функции действительно

выполняется. Между тем малая величина  $\sigma$  порядка  $0.4''$  говорит о хорошем согласии моделируемой орбиты и используемых наблюдательных данных.

Табл. 5.2: Улучшение орбиты

Итерация	1	2	3	4
$\sigma$ (")	1.930	0.450	0.398	0.397

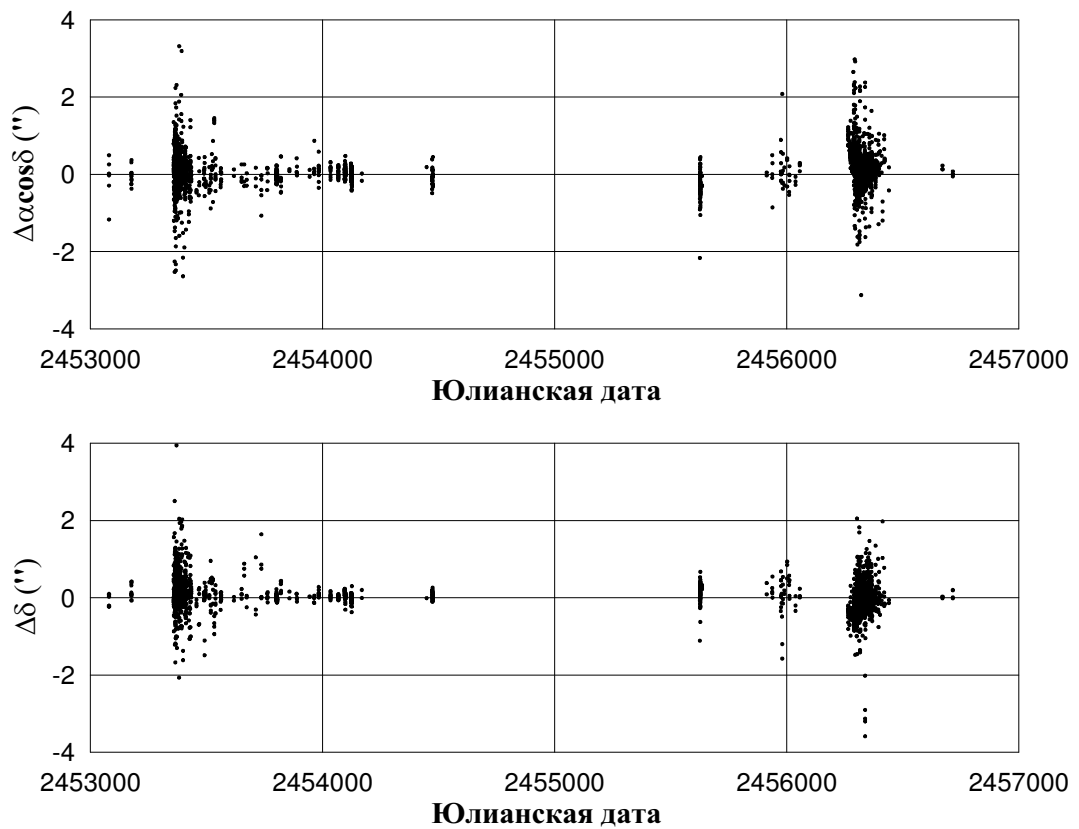


Рис. 5.2: Невязки O–C орбитальной модели

На рис. 5.2 представлены невязки для величин  $\alpha$  и  $\delta$ , для каждого наблюдения после определения орбиты. Как видно из рисунка, разброс величин невязок в разные периоды наблюдений различен и составляет от десятых долей секунды орбитальной дуги до 4 секунд. В общем из малых невязок, сопоставимых с ошибками наземных наблюдений, можно считать, что численная модель описывает наблюдения вполне адекватно.

## 6 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования зависимости точности определения параметров орбиты небесного тела от состава наблюдений, было проведен численный эксперимент на примере пяти объектов главного пояса (табл. 6.1; табл. 6.2).

Табл. 6.1: Орбитальные элементы в эклиптической системе координат

Элемент	Церера	Старр	Веста	Леннон	Паллада
$a$	2.8 а.е.	2.2 а.е.	2.8 а.е.	2.4 а.е.	2.8 а.е.
$e$	0.08	0.17	0.09	0.09	0.23
$i$	10.6°	3.2°	7.2°	5.7°	34.8°
$\Omega$	80.4°	122.9°	103.9°	288.6°	173.1°
$\omega$	2.8°	197.2°	151.1°	302.8°	309.9°
$M$	27.5°	155.9°	129.5°	340.2°	206.3°

Табл. 6.2: Составы наблюдений и среднеквадратические ошибки

Объект	$N$	Период наблюдений	$\hat{\sigma}$ (")
Церера	7361	26.01.1802–28.04.2015	0.60
Старр	1986	29.05.1957–18.04.2016	0.46
Веста	7736	29.01.1821–09.02.2016	0.68
Леннон	1530	02.01.2011–12.04.2016	0.43
Паллада	8503	09.05.1821–22.04.2016	0.58

Для всех объектов в качестве начальных приближений использовались орбитальные параметры, полученные с сайта Центра малых планет. Начальные эпохи, на которые приведены орбитальные элементы табл. 6.1, для каждого из тел представлены в табл. 6.3. Они соответствуют приблизительно конечным моментам периодов наблюдений (табл. 6.2).

Для исследования зависимости точности определяемых параметров  $|\Delta \mathbf{x}|$  от количества наблюдений  $N$  и длины мерного интервала  $\Delta t$  необходимо было построить характеристики  $\Sigma$  в зависимости  $\Delta t$ . Для построения характеристики для каждого объекта сначала использовались

Табл. 6.3: Начальные эпохи

$P$	Объект	Начальный момент
1	Церера	13.01.2016
2	Старр	13.01.2016
3	Веста	13.01.2016
4	Леннон	31.07.2016
5	Паллада	31.07.2016

наблюдения расположенные на интервале приблизительно в  $1/5$  оборота. Затем массив наблюдений дополнялся засчет более старых наблюдений: для пяти следующих повторений массив наблюдений увеличивался на  $1/5$  оборота; тогда как для последующих десяти повторений массив увеличивался на 1 год; затем массив дополнялся наблюдениями за каждые следующие 10 лет.

При каждом увеличении массива вычислялся параметр  $\Sigma$  (4.1). Таким образом, были получены характеристики  $\Sigma-\Delta t$  (рис. 6.1–6.5). Как видно из всех характеристик, для мерных интервалов в пределах одного оборота (распределения наблюдений) точность определяемых параметров существенно зависит от длины мерного интервала и его увеличение позволяет повышать точность. При дальнейшем увеличении мерного интервала характеристика становится почти постоянной. Это означает, что точность фактически зависит только от количества используемых наблюдений  $N$  и повышается пропорционально  $\sqrt{N}$ .

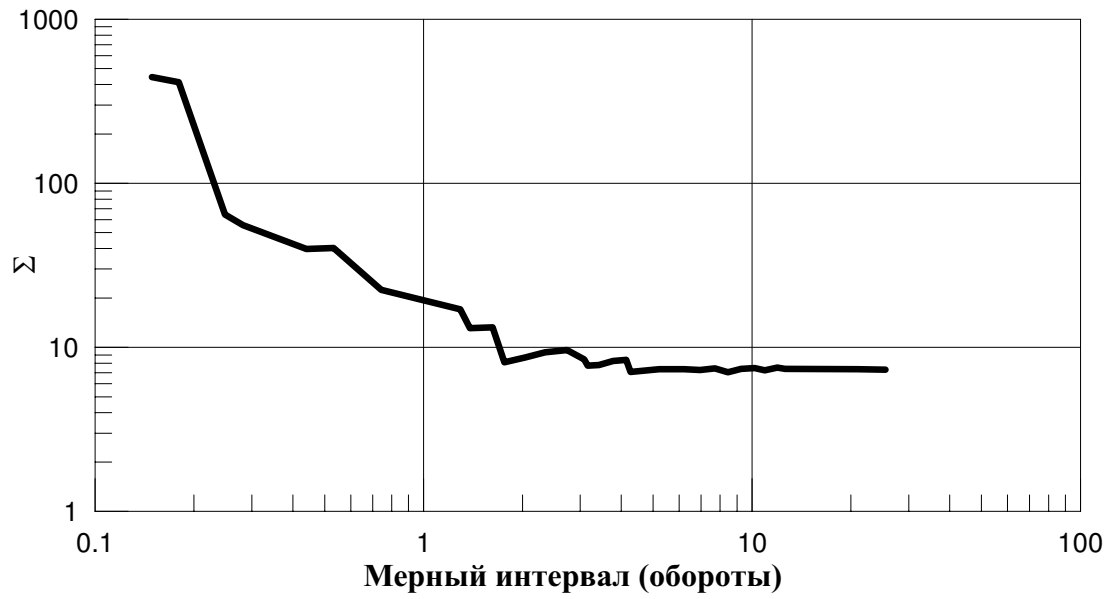


Рис. 6.1: Зависимость величины  $\Sigma$  от длины мерного интервала для Цереры

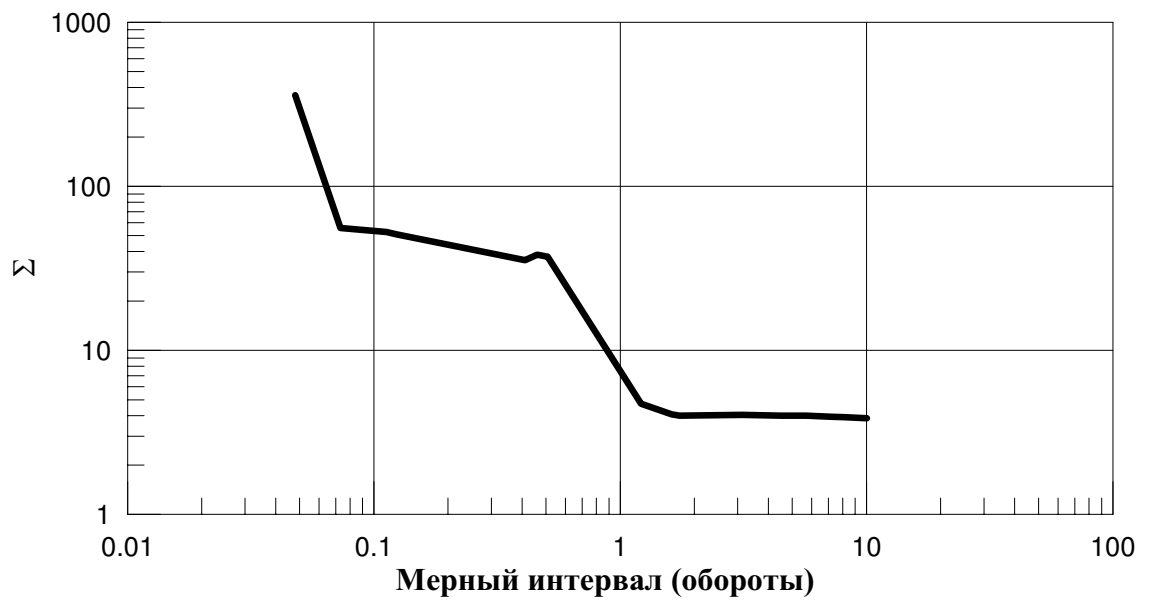


Рис. 6.2: То же, что и на рис. 6.1, но для Старра

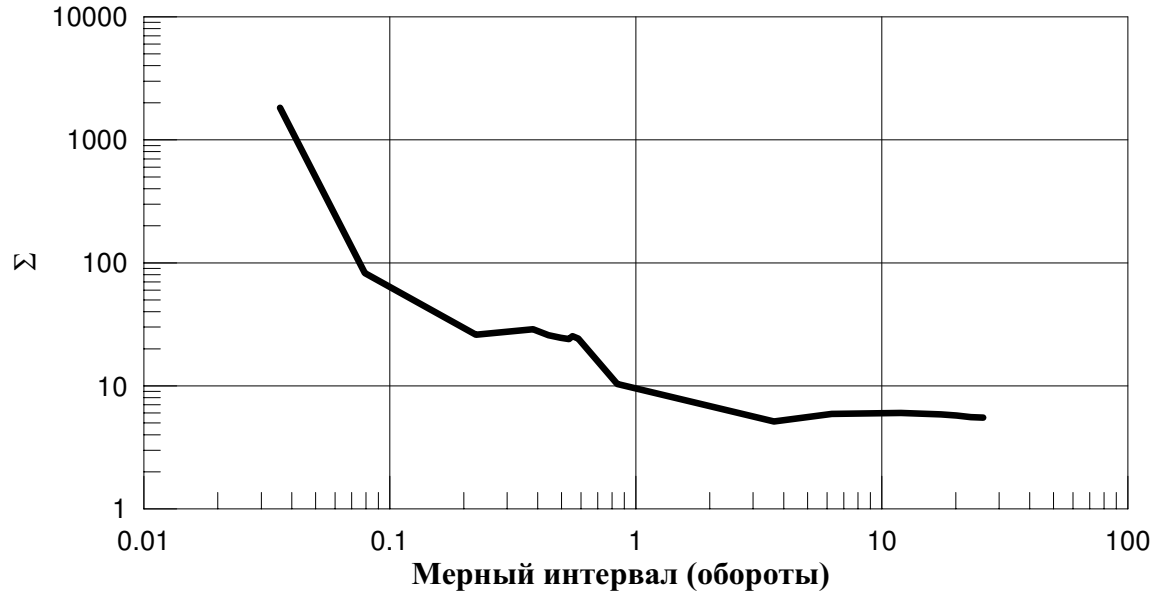


Рис. 6.3: То же, что и на рис. 6.1, но для Весты

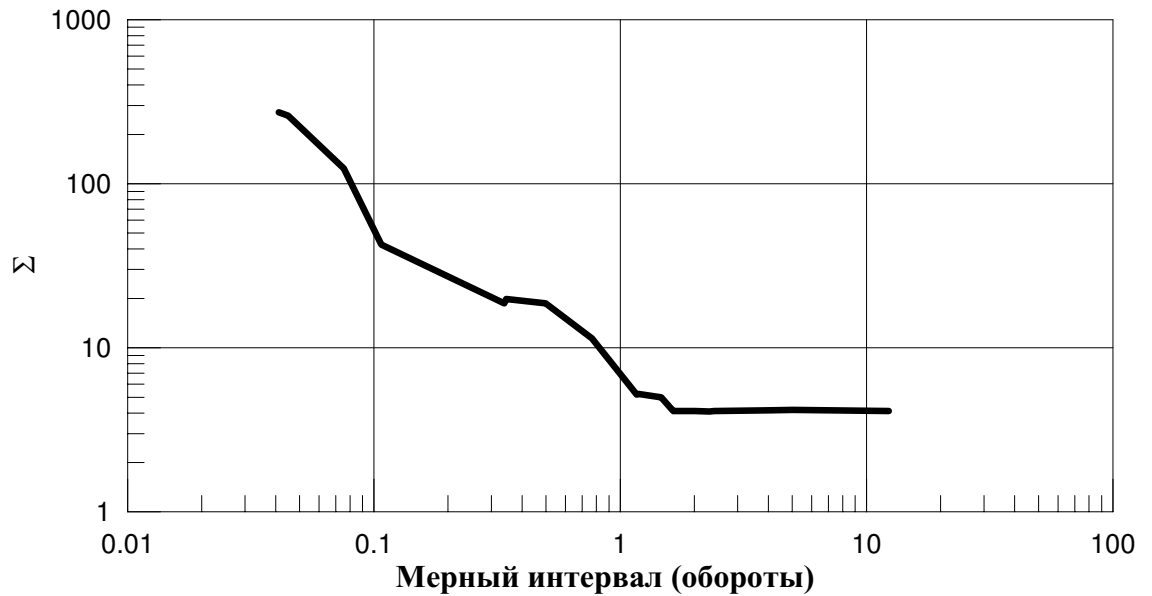


Рис. 6.4: То же, что и на рис. 6.1, но для Леннона

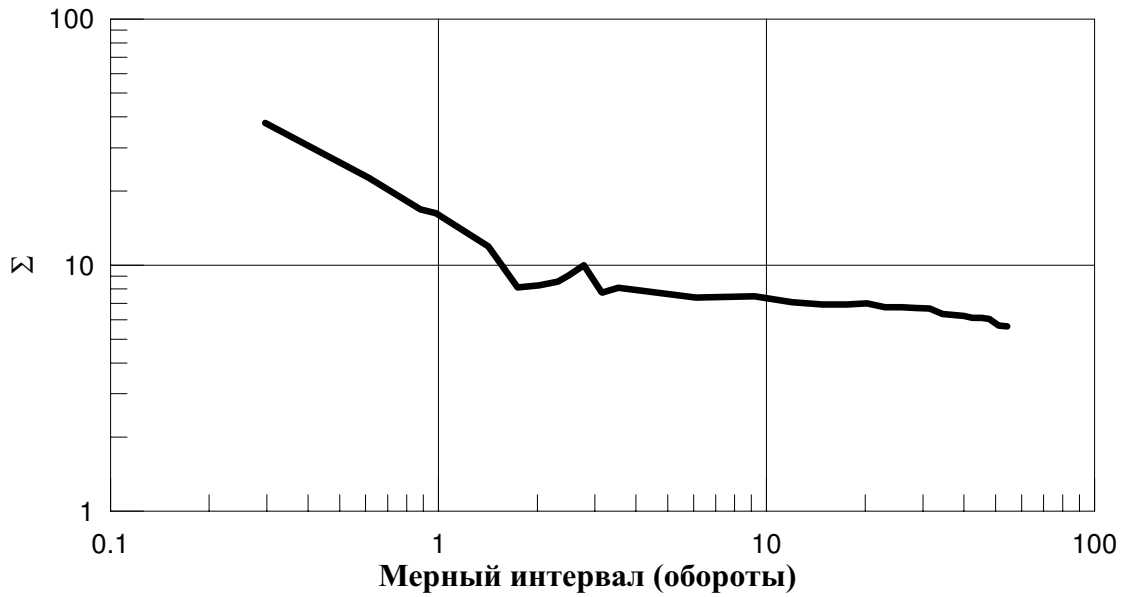


Рис. 6.5: То же, что и на рис. 6.1, но для Паллады

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В итоге выполненной работы были получены следующие результаты.

1. Разработана численная модель астероидного движения, реализованная на алгоритмическом языке Фортран.
2. Тестирование модели на примере астероида Апофис показало, что модель вполне адекватна для представления астероидного движения.
3. Проведено исследование зависимости точности определяемых параметров от количества наблюдений и длины мерного интервала.
4. Экспериментально показано, что для мерных интервалов в пределах одного оборота точность определяемых параметров существенно зависит от длины мерного интервала и его увеличение повышает точность. Для мерных интервалов более одного оборота точность зависит, главным образом, только от количества используемых наблюдений  $N$  и повышается пропорционально  $\sqrt{N}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 284 с.
- [2] Everhart E. A New Method for Integrating Orbits // Bulletin of the American Astronomical Society. 1973. Vol. 5. P. 389.
- [3] Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech. 1974. Vol. 10. P. 35–55.
- [4] Everhart E. An Efficient Integrator That Uses Gauss–Radau Spacings // Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11–15, 1984 / ed. by A. Carusi and G. B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library, 1985. Vol. 115. P. 185–202.
- [5] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems. Springer, 1993. 539 p.
- [6] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва: Изд-во «Наука», 1968.
- [7] Брумберг В.А., Глебова Н.И., Лукашова М.В., Малков А.А., Питьева Е.В., Румянцева Л.И., Свешников М.Л., Фурсенко М.А. Расширенное объяснение к «Астрономическому ежегоднику» // Труды ИПА РАН. СПб.: ИПА РАН. 2004. Вып.10. 488 с.
- [8] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985. 509 с.



Заключение от 08 июня 2016 г.

об оригинальности магистерской диссертации

студента группы 507 кафедры астрономии и космической геодезии

Физического факультета ТГУ

Есипова Павла Александровича

Была проведена проверка магистерской диссертации Есипова Павла Александровича «ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ОРБИТАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ АСТЕРОИДОВ ОТ КОЛИЧЕСТВА НАБЛЮДЕНИЙ И ДЛИНЫ МЕРНОГО ВРЕМЕННОГО ИНТЕРВАЛА» по направлению 03.04.02 – «Физика». Документ проверен системой «Антиплагиат» Модули поиска:РГБ, диссертации, Elibrary, Интернет (Антиплагиат), Университетская библиотека онлайн, Модуль поиска ЭБС «Лань», Томский государственный университет, Кольцо вузов.

Проверка показала, что доля оригинального текста в дипломной работе составляет 83.48%, а 16.52% присутствует в источниках, приведенных ниже.

**Текстовые статистики:**

**Индекс читаемости:** обычный  
**Неизвестные слова:** в пределах нормы  
**Макс. длина слова:** в пределах нормы  
**Большие слова:** в пределах нормы

<input checked="" type="checkbox"/>	Источник	Ссылка на источник	Коллекция/модуль поиска	Доля в отчёте	Доля в тексте
<input checked="" type="checkbox"/>	[1] <a href="#">Авдюшев, Виктор Анат...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100400000/rsl01004741000/rsl01004741...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100400000/rsl01004741000/rsl01004741...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	10.89%	10.89%
<input checked="" type="checkbox"/>	[2] <a href="#">Баньщикова, Мария Ал...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100400000/rsl01004315000/rsl01004315...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100400000/rsl01004315000/rsl01004315...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0.59%	10.09%
<input checked="" type="checkbox"/>	[3] <a href="#">Численное интегриров...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=23325901">http://elibrary.ru/item.asp?id=23325901</a>	Научные статьи Elibrary	0.89%	6.51%
<input checked="" type="checkbox"/>	[4] <a href="#">Александрова, Анна Г...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005516000/rsl01005516...">http://dlib.rsl.ru/rsl01005000000/rsl01005516000/rsl01005516...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	6.31%
<input checked="" type="checkbox"/>	[5] <a href="#">Интегратор Гаусса-Эв...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=15207196">http://elibrary.ru/item.asp?id=15207196</a>	Научные статьи Elibrary	0.05%	5.49%
<input checked="" type="checkbox"/>	[6] <a href="#">ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ БЛ...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=11032616">http://elibrary.ru/item.asp?id=11032616</a>	Научные статьи Elibrary	0.02%	2.79%
<input checked="" type="checkbox"/>	[7] <a href="#">ИТЕРАЦИОННЫ Е МЕТОДЫ ...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=17252262">http://elibrary.ru/item.asp?id=17252262</a>	Научные статьи Elibrary	1.07%	2.14%

<input checked="" type="checkbox"/>	[8] <a href="#">КИНЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛ...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=16045096">http://elibrary.ru/item.asp?id=16045096</a>	Научные статьи Elibrary	0.33%	1.26%
<input checked="" type="checkbox"/>	[9] <a href="#">Рамоданов, Сергей Ми...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004582000/rsl01004582...">http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004582000/rsl01004582...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.91%
<input checked="" type="checkbox"/>	[10] <a href="#">Килин, Александр Але...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004309000/rsl01004309...">http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004309000/rsl01004309...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.91%
<input checked="" type="checkbox"/>	[11] <a href="#">Чазов, Вадим Викторо...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006741000/rsl01006741...">http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006741000/rsl01006741...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0.47%	0.65%
<input checked="" type="checkbox"/>	[12] <a href="#">Полный текст (14/14)</a>	<a href="http://istina.msu.ru/media/courses/coursesteaching/73a/b3d/58...">http://istina.msu.ru/media/courses/coursesteaching/73a/b3d/58...</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.65%
<input checked="" type="checkbox"/>	[13] <a href="#">Программные пакеты, ...</a>	<a href="http://www.skachatreferat.ru/referaty/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%...">http://www.skachatreferat.ru/referaty/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D0%...</a>	Интернет (Антиплагиат)	0.59%	0.59%
<input checked="" type="checkbox"/>	[14] <a href="#">Long-termevolution ...</a>	<a href="http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0607530.pdf#2">http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0607530.pdf#2</a>	Интернет (Антиплагиат)	0.01%	0.59%
<input checked="" type="checkbox"/>	[15] <a href="#">Галушина, Татьяна Юр...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002902000/rsl01002902...">http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002902000/rsl01002902...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.51%
<input checked="" type="checkbox"/>	[16] <a href="#">Солнце и Солнечная с...</a>	<a href="http://otherreferats.allbest.ru/air/00151173_0.html">http://otherreferats.allbest.ru/air/00151173_0.html</a>	Интернет (Антиплагиат)	0.49%	0.49%
<input checked="" type="checkbox"/>	[17] <a href="#">47409</a>	<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=47409">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=47409</a>	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.48%
<input checked="" type="checkbox"/>	[18] <a href="#">Шефер, Владимир Алек...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002625000/rsl01002625...">http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002625000/rsl01002625...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.46%
<input checked="" type="checkbox"/>	[19] <a href="#">Ссылка для скачивани...</a>	<a href="http://idg.chph.ras.ru/data_files/%D0%A1%D0%B1%D0%BE%D1%80%D...">http://idg.chph.ras.ru/data_files/%D0%A1%D0%B1%D0%BE%D1%80%D...</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.46%
<input checked="" type="checkbox"/>	[20] <a href="#">222671</a>	<a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=222671">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=222671</a>	Университетская библиотека онлайн	0%	0.43%
<input checked="" type="checkbox"/>	[21] <a href="#">Галеев, Олег Рафаило...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004142000/rsl01004142...">http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004142000/rsl01004142...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.43%
<input checked="" type="checkbox"/>	[22] <a href="#">Состоялось заседание...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=23181542">http://elibrary.ru/item.asp?id=23181542</a>	Научные статьи Elibrary	0.42%	0.42%
<input checked="" type="checkbox"/>	[23] <a href="#">68291</a>	<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68291">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=68291</a>	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.42%
<input checked="" type="checkbox"/>	[24] <a href="#">Моиссева</a>		Томский гос. Университет	0%	0.42%
<input checked="" type="checkbox"/>	[25] <a href="#">Кантер, Алексей Анат...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01000000000/rsl01000204000/rsl01000204...">http://dlib.rsl.ru/rsl01000000000/rsl01000204000/rsl01000204...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.41%
<input checked="" type="checkbox"/>	[26] <a href="#">Батхина, Наталья Вла...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002933000/rsl01002933...">http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002933000/rsl01002933...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.4%
<input checked="" type="checkbox"/>	[27] <a href="#">Сюсина, Ольга Михайл...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006580000/rsl01006580...">http://dlib.rsl.ru/rsl01006000000/rsl01006580000/rsl01006580...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0.2%	0.38%

<input checked="" type="checkbox"/>	[28] <a href="#">Использовани е эволюц...</a>		Кольцо вузов	0.14%	0.38%
<input checked="" type="checkbox"/>	[29] <a href="#">241078</a>	<a href="http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=241078">http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&amp;id=241078</a>	Университетская библиотека онлайн	0%	0.34%
<input checked="" type="checkbox"/>	[30] <a href="#">Яковенко, Елена Евге...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000321000/rsl01000321...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000321000/rsl01000321...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.3%
<input checked="" type="checkbox"/>	[31] <a href="#">МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПР...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=11480235">http://elibrary.ru/item.asp?id=11480235</a>	Научные статьи Elibrary	0%	0.3%
<input checked="" type="checkbox"/>	[32] <a href="#">ВАК-2004</a>	<a href="http://agora.guru.ru/display.php?PHPSESSID=fv6urttlanvamosbl...">http://agora.guru.ru/display.php?PHPSESSID=fv6urttlanvamosbl...</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.3%
<input checked="" type="checkbox"/>	[33] <a href="#">автореферат Акрестин...</a>		Томский гос. Университет	0%	0.25%
<input checked="" type="checkbox"/>	[34] <a href="#">251134</a>	<a href="http://e.lanbook.com/journal/issue.php?p_f_journal=2260&amp;p_f_...">http://e.lanbook.com/journal/issue.php?p_f_journal=2260&amp;p_f_...</a>	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.24%
<input checked="" type="checkbox"/>	[35] <a href="#">Кознов, В. В. диссер...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000148000/rsl01000148...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000148000/rsl01000148...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.23%
<input checked="" type="checkbox"/>	[36] <a href="#">Питьева, Елена Влади...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002882000/rsl01002882...">http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002882000/rsl01002882...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.23%
<input checked="" type="checkbox"/>	[37] <a href="#">2309</a>	<a href="http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2309">http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2309</a>	Модуль поиска ЭБС "Лань"	0%	0.23%
<input checked="" type="checkbox"/>	[38] <a href="#">МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИ...</a>	<a href="http://elibrary.ru/item.asp?id=9955698">http://elibrary.ru/item.asp?id=9955698</a>	Научные статьи Elibrary	0.23%	0.23%
<input checked="" type="checkbox"/>	[39] <a href="#">усюкевич АР/ АВТОРЕФЕ...</a>		Томский гос. Университет	0%	0.23%
<input checked="" type="checkbox"/>	[40] <a href="#">Васильев, Михаил Вас...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000262000/rsl01000262...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000262000/rsl01000262...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.2%
<input checked="" type="checkbox"/>	[41] <a href="#">Бирюков, Евгений Евг...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004044000/rsl01004044...">http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004044000/rsl01004044...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.18%
<input checked="" type="checkbox"/>	[42] <a href="#">Продолжение исследований...</a>	<a href="http://sd4.uchebalegko.ru/docs/94000/index-6178.html">http://sd4.uchebalegko.ru/docs/94000/index-6178.html</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.18%
<input checked="" type="checkbox"/>	[43] <a href="#">Источник 43</a>	<a href="http://www.ccas.ru/papers/pointer2001/Index2001.zip">http://www.ccas.ru/papers/pointer2001/Index2001.zip</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.18%
<input checked="" type="checkbox"/>	[44] <a href="#">Автореферат</a>	<a href="http://oldvak.ed.gov.ru/common/img/uploaded/files/vak/announ...">http://oldvak.ed.gov.ru/common/img/uploaded/files/vak/announ...</a>	Интернет (Антиплагиат)	0%	0.15%
<input checked="" type="checkbox"/>	[45] <a href="#">Шапорев, Сергей Дмит...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000218000/rsl01000218...">http://dlib.rsl.ru/rsl0100000000/rsl01000218000/rsl01000218...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0%	0.14%
<input checked="" type="checkbox"/>	[46] <a href="#">Титова, Наталья Нико...</a>	<a href="http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002618000/rsl01002618...">http://dlib.rsl.ru/rsl01002000000/rsl01002618000/rsl01002618...</a>	Диссертации и авторефераты РГБ	0.12%	0.13%

Оригинальные блоки: 83.48%

Заимствованные блоки: 16.52%

Заимствование из "белых" источников: 0%

Итоговая оценка оригинальности: **83.48%**

Анализ указанных источников показал, что выявленные текстовые совпадения представляют собой незначительные по объёму высказывания в виде корректно оформленных цитат или общепринятой терминологии, используемой в рамках научного направления, соответствующего тематике выпускной работы.

Выполнил проверку и составил заключение,  
ответственный за работу с системой «Антиплагиат»  
08.06.2016

Есипов П. А.