

УДК: 521.1

В.А. АВДЮШЕВ¹

**МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ
II. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЧИСЛЕННОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ²**

Проводится сравнительный анализ эффективности методов теории специальных возмущений [1] применительно к численному моделированию спутниковых, астероидных и планетных орбит, а также даются рекомендации по их использованию.

Введение

В предыдущей работе [1] мы изложили основополагающие идеи и принципы построения методов теории специальных возмущений, а также обосновали их применение к решению задач небесной механики. В данной работе мы проводим сравнительный анализ эффективности методов применительно к численному моделированию спутниковых, астероидных и планетных орбит, для того чтобы дать четкие рекомендации по использованию методов.

1. Численный эксперимент

Численная эффективность методов теории специальных возмущений (таблица 1) исследовалась применительно к решению задач динамики спутников, астероидов и планет (таблица 2). В таблице 1 ссылки даны на формулы из [1]; G — соответствующие интегрируемым переменным обозначения для характеристик численной эффективности методов на приводимых ниже рисунках; а N — число интегрируемых уравнений. Следует заметить, что в методах Энке [1] опорные решения перевычислялись через каждые 2 оборота. В таблице 2 T , e и i — период, эксцентриситет и наклонение исследуемых орбит соответственно (наклонения для спутников даны относительно экватора центральной планеты, а для астероидов — относительно эклиптики); J — коэффициент второй зональной гармоники планеты, ν — показатель влияния короткопериодических возмущений [1]. В задачах учитывались следующие возмущающие факторы: J — влияние несферичности центрального тела (для спутников), \bullet — притяжение от массивных тел (спутников и планет), \odot — притяжение от Солнца (для спутников). Другие возмущающие факторы не рассматривались ввиду их незначительного влияния на эффективность численного моделирования.

1.1. Объекты. Спутниковое движение представляют 3 естественных спутника Юпитера и Марса (Амальтея, Гималия и Фобос) и 2 искусственных спутников Земли (низколетящий с высотой 300 км и геосинхронный). Динамика естественных спутников рассматривалась на 100-летнем интервале времени: приблизительно столько времени прошло с момента их открытия.

Амальтея и Фобос — близкие спутники, движущиеся вблизи плоскости экватора планеты по почти круговым орбитам. Их орбиты сильно возмущаются несферичностью центральной планеты. Кроме того, спутник Юпитера также испытывает сильное гравитационное влияние от массивных галилеевых спутников. Орбитальные периоды объектов меньше суток и за 100-летний интервал времени они совершают довольно большое число оборотов, более 50000. Поэтому с точки зрения численного интегрирования их динамику следует рассматривать как долгосрочную.

Таблица 1 — Методы теории специальных возмущений

Переменные	G	Ссылка	N	Переменные	G	Ссылка	N		
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$	(t)	\mathbf{x}	(1)	6	$\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{g}, h, \tau$	(s)	sb	(8)	11
$\delta\mathbf{x}, \delta\dot{\mathbf{x}}$	(t)	$\delta\mathbf{x}$	(26)	6	$\mathbf{u}, \mathbf{u}', h, \tau$	(s)	u	(9)	10
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, h$	(t)	st	(17)	7	$\delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}', \delta h, \delta\tau$	(s)	du	(27)	10
$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, h$	(t)	nz	(18)	7	$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t$	(s)	sm	(10)	7
$\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, h$	(t)	cn	(20)	7	$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t$	(E_G)		(11)	7
$\bar{\mathbf{x}}, \dot{\bar{\mathbf{x}}}, h, t$	(\bar{t})	dt	(22)	8	$\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, h, \tau$	(E)	tau	(8)	8
$\mathbf{c}, \mathbf{g}, l$	(t)	gy	(23)	7	$\mathbf{x}_B, \dot{\mathbf{x}}_B$	(t)	br	(34)	6

¹ Томский государственный университет

² Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-02-17043.

Таблица 2 — Небесные объекты и их орбиты

Объект	Центр	T (сут.)	e	i (°)	Интервал (г., об.)	Возмущения		
Спутники								
Амальтея	Юпитер	0.499	0.003	0.3	100	73000	J	$J = 3.4 \cdot 10^{-3}$
Гималия	Юпитер	247.767	0.166	30.2	100	152	J	$v = 41$ (Ио)
Фобос	Марс	0.319	0.015	1.1	100	114500	J	$J = 3.8 \cdot 10^{-4}$
300 км	Земля	0.063	0.000	50.0	0.038	222	J	$J = 1.5 \cdot 10^{-3}$
ГСС	Земля	0.997	0.010	10.0	40	14600	J	$J = 3.7 \cdot 10^{-5}$
Астероиды и планеты								
Фаэтон	Солнце	523.609	0.890	22.2	1433	1000	J	$v = 0.9$ (Меркурий)
Церера	Солнце	1680.907	0.079	10.6	4602	1000	J	$v = 3.9$ (Меркурий)
Меркурий	Солнце	87.969	0.205	7.0	240	1000	J	
Юпитер	Солнце	4339.289	0.048	1.3	11880	1000	J	$v = 9.4$ (Меркурий)

Далекый спутник, Гималия, имеет большой орбитальный период и за 100 лет делает всего 152 оборота. Главный возмущающий фактор — притяжение от Солнца. Хотя интегрирование орбиты Гималии существенно усложняется короткопериодическими возмущениями от галилеевых спутников, что тормозит численный процесс.

Низколетящий искусственный спутник Земли (с высотой 300 км) — это быстрый околоземный объект. Всего за 2 недели он совершает 222 оборота. Именно на этом интервале мы и рассматривали его орбитальное движение: во-первых, нас интересовала целесообразность использования исследуемых методов на таком коротком интервале времени применительно к интегрированию довольно гладкой орбиты; во-вторых, рассматривать движение низких спутников на более длительном временном интервале просто не имеет смысла, поскольку он довольно часто подвергается орбитальной коррекции за уменьшение его высоты вследствие сопротивления атмосферы. При этом ввиду незначительного влияния на эффективность численного интегрирования сопротивление атмосферы мы все же не учитывали.

Геосинхронный объект интересовал нас лишь как представитель наиболее загрязненной области околоземного пространства, как один из многочисленных фрагментов космического мусора. Его динамика моделировалась на 40-летнем временном интервале, фактически соизмеримом с эрой освоения (и загрязнения) космоса.

В астероидных и планетных задачах движение объектов моделировалось на интервале 1000 оборотов. Мы рассмотрели 4 объекта: 2 астероида, Фаэтон и Церера, и 2 планеты, Меркурий и Юпитер. Фаэтон имеет сильно вытянутую орбиту со сложной структурой возмущений. Этот объект мы взяли специально для того, чтобы на его примере продемонстрировать возможности регуляризирующих преобразований. Орбиты Цереры и Юпитера почти круговые. Однако их интегрирование усложнено коротко периодическими возмущениями от планет земной группы, в особенности от Меркурия. При моделировании движения последнего проблемы короткопериодических возмущений не возникает, что мы также намерены показать ниже.

1.2. Метод Эверхарта. Для интегрирования уравнений движения мы использовали широко известный среди небесных механиков метод Эверхарта [2], разработанный автором специально для численного моделирования орбит. Метод Эверхарта — это неявный одношаговый метод типа Рунге–Кутты–Батчера [3], основанный на полиномиальной аппроксимации решения, где для повышения порядка аппроксимации используется разбиение Гаусса–Радо. Так, при разбиении k метод имеет порядок $2k - 1$. Мы выбрали метод 15-го порядка.

Хотя особо следует отметить, что при рекомендуемых автором параметрах интегрирования³, ошибка метода не всегда соответствует выбранному порядку метода. Например, мы столкнулись с

³ Поскольку метод неявный, решение на шаге определяется итерационным способом. Причем начальные приближения для коэффициентов полиномиальной аппроксимации на текущем шаге оцениваются по информации о решении предыдущего шага. Ввиду того, что эти начальные приближения довольно близки к истинным значениям коэффициентов, Эверхарт рекомендует выполнять всего 2 итерации на шаге. Хотя при этом итерационный процесс иногда дает довольно грубые значения коэффициентов, в особенности, если шаг достаточно большой. Поэтому локальная точность оказывается довольно низкой и не соответствует порядку метода.

тем фактом, что при интегрировании методом Эверхарта 15-го порядка почти круговых орбит (в прямоугольных координатах) величина глобальной ошибки интегрирования $|\Delta x|$ в зависимости от шага Δt ведет себя как $|\Delta x| \sim \Delta t^{10}$, т.е. как в методе 10-го порядка. Тем не менее, с рекомендуемыми параметрами требуемая точность решения достигается с наименьшими затратами вычислительного времени [2].

В методе также заложен алгоритм выбора переменного шага. Шаг интегрирования выбирается таким образом, чтобы величина полиномиального члена k порядка не превышала 10^{-L} [2], где параметр L задается пользователем. В связи с этим алгоритм выбора шага, предложенный автором метода, не является оптимальным, поскольку величина шага может оказаться значительно меньше его допустимой величины, соответствующей методу порядка $2k - 1$.

1.3. Характеристики эффективности численного интегрирования. Для оценки точности интегрирования мы варьировали параметр L и по решению с большим параметром оценивали глобальную ошибку решения с меньшим параметром. Быстродействие численного интегрирования оценивалось по числу выполненных шагов. В результате для каждой системы интегрируемых уравнений мы получили зависимости точности интегрирования от быстродействия, по которым анализировали эффективность методов теории специальных возмущений.

Следует заметить, что оценка быстродействия по числу шагов интегрирования здесь вполне обоснована. Конечно, предлагаемые методы усложняют уравнения орбитального движения, что естественно сказывается на времени вычисления их правых частей. Поэтому, казалось бы, каждый шаг интегрирования для разных систем должен быть по-разному трудоемок. Тем не менее, нельзя забывать, что подавляющая часть времени в современных моделях тратится на вычисление возмущающей функции \mathbf{P} , которая без изменения присутствует во всех рассматриваемых нами системах; и все артефакты, появляющиеся в уравнениях после преобразований, просто меркнут на фоне конгломерата \mathbf{P} . Поэтому для оценки быстродействия в нашем анализе эффективности методов достаточно знать лишь число обращений к \mathbf{P} , либо пропорциональное ему число шагов, выполненных за весь процесс интегрирования.

Кроме того, такая характеристика быстродействия замечательна тем, что она не зависит ни от оптимизации численной модели, ни от возможностей компьютерного процессора, поэтому ее использование устраняет факторы, которые влияют на быстродействие численного интегрирования, но в то же время не имеют никакого отношения к нашим методам.

2. Численные результаты. Спутниковые задачи.

Характеристики точность–быстродействие приведены на рисунках 1–11. Для оценки значимости ошибок интегрирования на рисунках пунктирными линиями приведены два уровня: один соответствует величине большой полуоси орбиты (a), второй — приблизительно односекундной угловой ошибке относительно земного наблюдателя ($1''$).

Полученные результаты для спутниковых задач говорят о том, что методы теории специальных возмущений наиболее эффективны и могут быть рекомендованы к применению только для долгосрочного численного моделирования спутниковых орбит с гладкой структурой возмущений (рисунки 1, 4, 6). Впечатляющие результаты получаются при использовании KS-уравнений (\mathbf{u} , $\delta\mathbf{u}$) и уравнений Роя (\mathbf{ry}). Так, при сохранении точности интегрирования с их помощью удастся повысить быстродействие в 3–7 раз. Кроме того, в случае Фобоса метод Энке в KS-переменных ($\delta\mathbf{u}$) за счет ослабления влияния ошибок округления позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 2 порядка.

Высокая эффективность этих уравнений, прежде всего, состоит в том, что они обладают стабилизирующим эффектом. Несмотря на это, использование стабилизированных уравнений (\mathbf{st}) существенно менее эффективно. По-видимому, это объясняется наличием в этих уравнениях искусственно введенных членов (стабилизирующих возмущений), поведение которых связано с ошибками интегрирования, не имеющими никакого отношения к физике задачи. Поэтому данный артефакт, вполне обоснованный с точки зрения стабилизации как средство для борьбы с ляпуновской неустойчивостью, все же имеет побочный эффект, который со временем заметно искажает динамическую картину задачи.

На примере Амальтеи (рисунок 2) мы оценили эффективность различных стабилизирующих преобразований (\mathbf{st} , \mathbf{nz} , \mathbf{cn} , $\delta\mathbf{t}$) [1]. В результате оказалось, что все стабилизирующие подходы кро-

ме канонического (сн) одинаковы хороши. Низкая эффективность канонической стабилизации объясняется в [1].

Далее, как показывают результаты на рисунке 3, при моделировании движения далекого спутника (Гималии) все попытки повысить эффективность численного интегрирования с использованием рассматриваемых методов терпят неудачу вследствие короткопериодических возмущений от галилеевых спутников [1]. Из рисунка также видно, что при отсутствии короткопериодических возмущений (пунктирные линии) эффективность интегрирования существенно повышается, причем характеристики распределяются здесь почти в том же порядке значимости, как и для близких спутников.

Наконец, следует заметить, что с уменьшением временного интервала эффективность методов теории специальных возмущений заметно понижается (рисунок 5). Впрочем, несмотря на это, их применение все еще остается целесообразным.

3. Численные результаты. Астероидные и планетные задачи.

Качество полученных результатов в астероидных и планетных задачах в основном зависит от величины короткопериодических возмущений, вызываемых, главным образом, гравитационным влиянием Меркурия.

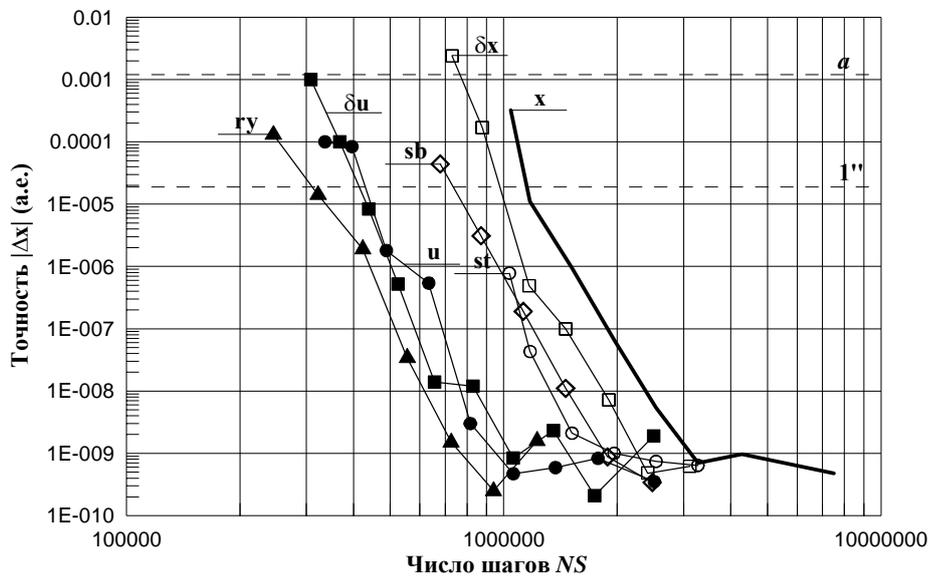


Рис. 1. Амальтея

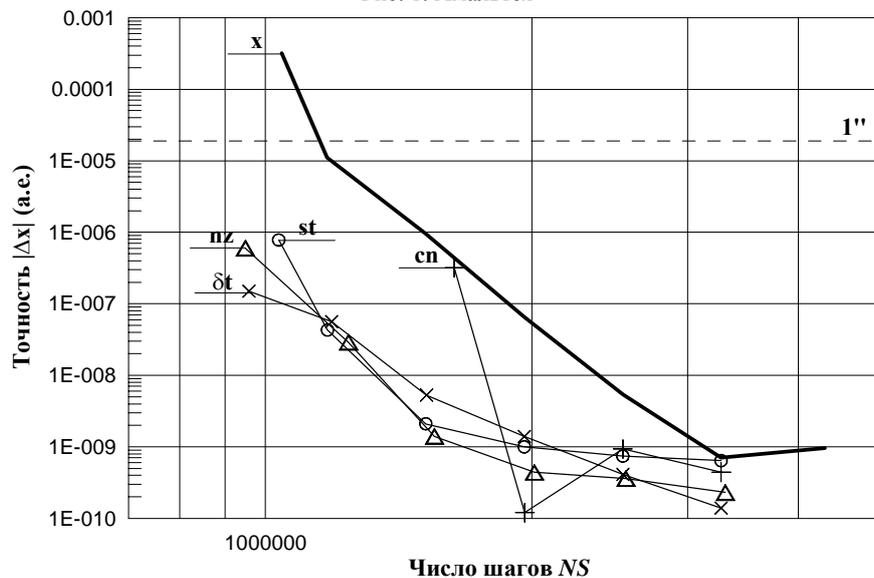


Рис. 2. Амальтея (стабилизирующие преобразования)

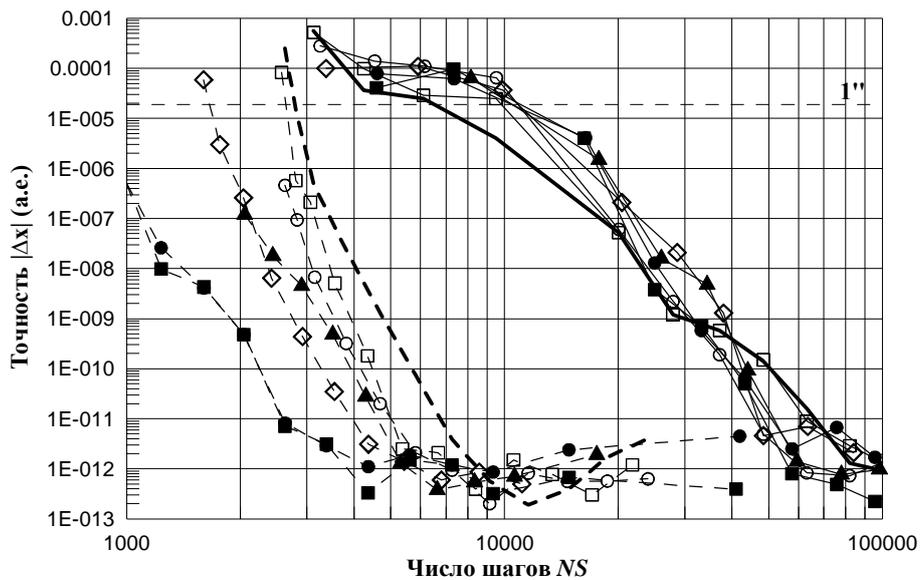


Рис. 3. Гималия

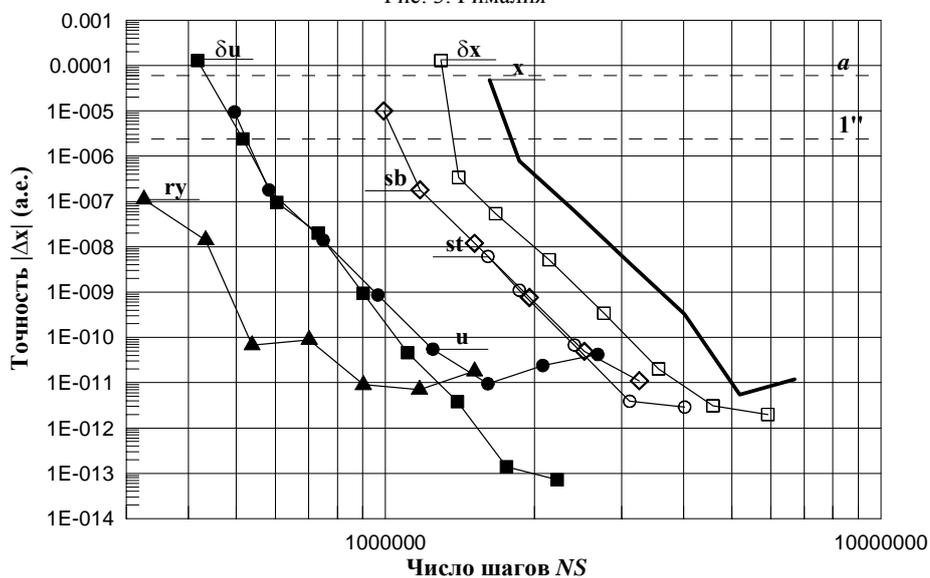


Рис. 4. Фобос

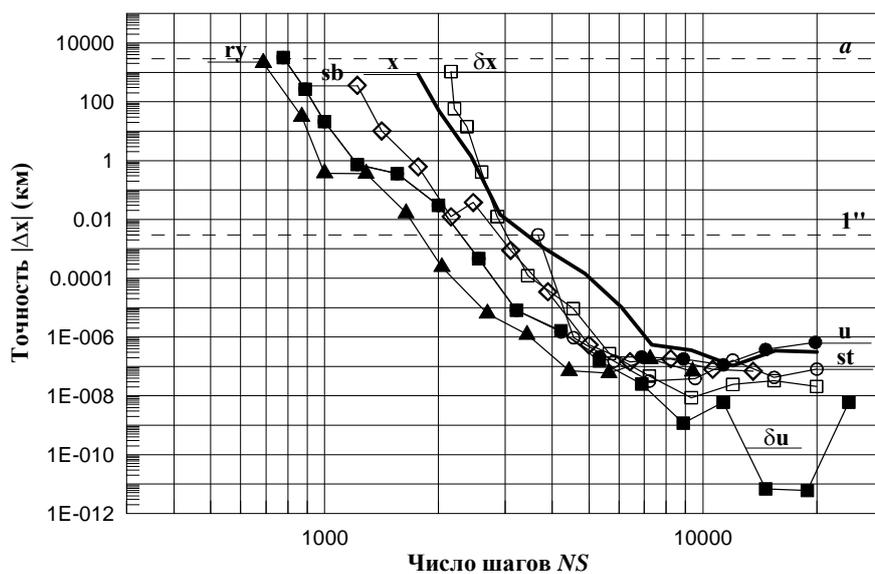


Рис. 5. Трехсоткилометровый ИСЗ

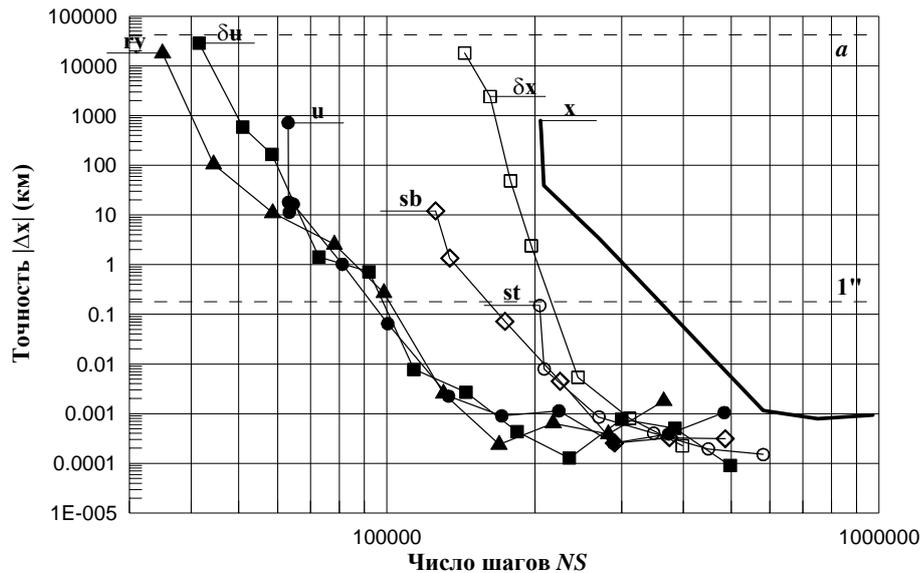


Рис. 6. Геосинхронный ИСЗ

Для астероида Фэтон показатель значимости короткопериодических возмущений ν [1] меньше 1. Поэтому применение методов теории специальных возмущений вполне обосновано, что подтверждают характеристики на рисунке 7. В данном случае наивысшая эффективность численного интегрирования достигается путем использования регуляризирующих преобразований (\mathbf{u} , $\delta\mathbf{u}$, \mathbf{sb}), что является ожидаемым результатом, поскольку Фэтон имеет очень вытянутую орбиту с эксцентриситетом $e = 0.89$.

На примере Фэтона мы также исследовали возможности сглаживающих преобразований (\mathbf{sm}). Результаты приведены на рисунке 8. Здесь характеристики соответствуют следующим независимым переменным: t — время; E , ε , ν и E_G — эксцентрисическая, эллиптическая, истинная и обобщенная эксцентрисическая аномалии соответственно; l — дуга орбиты; $E(\tau)$ — эксцентрисическая аномалия (с интегрируемой переменной τ). Как видно из рисунка, для интегрирования сильноэксцентричных орбит со сложной структурой возмущений как у Фэтона имеет смысл прибегать только к таким сглаживающим преобразованиям, где в качестве независимых переменных выступают эксцентрисическая аномалия и ее аналоги. Повышение эффективности при использовании обобщенной эксцентрисической аномалии объясняется тем, что орбитальная динамика вдоль нее сглаживается не только за эллиптичность орбиты, но и за нерегулярные и довольно большие возмущения со стороны больших планет.

Как показывает практика, потеря точности численного решения связана в основном с большими ошибками в переменной времени за счет ее неравномерного поведения вдоль аномалии. Рисунок 8 показывает, что введение временного элемента τ , который ведет себя линейно в невозмущенном случае, позволяет существенно повысить эффективность численного интегрирования.

Для Цереры и Юпитера показатель ν довольно высок, отсюда использование рассматриваемых методов фактически ничего не дает (рисунки 9, 11). Более того, для Юпитера, например, замечательные в случае Фэтона методы (KS- и SB-регуляризация) (\mathbf{u} , $\delta\mathbf{u}$, \mathbf{sb}) даже ухудшают эффективность численного интегрирования. В то же время следует заметить, что переход к барицентрической координатной системе (\mathbf{br}) в планетной задаче может существенно ослабить влияние короткопериодических возмущений от Меркурия и тем самым повысить точность интегрирования на несколько порядков (рисунок 11), тогда как в астероидной задаче результаты качественно не улучшаются.

В случае Меркурия результаты показывают (рисунок 10), что для численного исследования его динамики исключительно хороши уравнения в KS-переменных (\mathbf{u} , $\delta\mathbf{u}$). Так, при сохранении довольно высокой точности можно повысить быстродействие численного интегрирования почти в 7 раз. Также как и для Фобоса метод Энке ($\delta\mathbf{u}$) позволяет повысить уровень наивысшей точности почти на 2 порядка. Низкая эффективность метода вариации произвольных постоянных, который представляют уравнения Роя (\mathbf{ry}), по-видимому, обусловлена тем, что орбита Меркурия достаточно быстро прецессирует. Это, в свою очередь, приводит к быстрому изменению вектора количества движения \mathbf{c} , который возможно интегрируется с недостаточно высокой точностью.

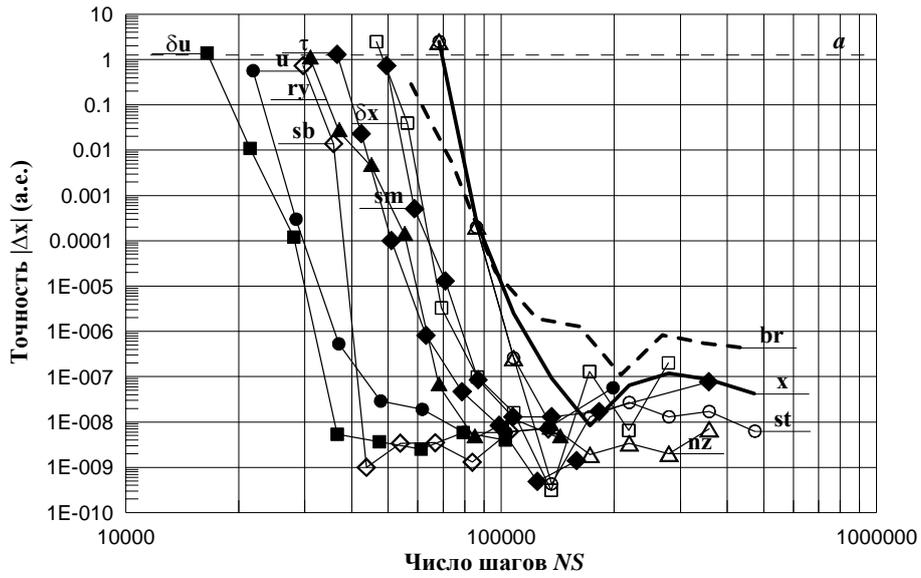


Рис. 7. Фэтон

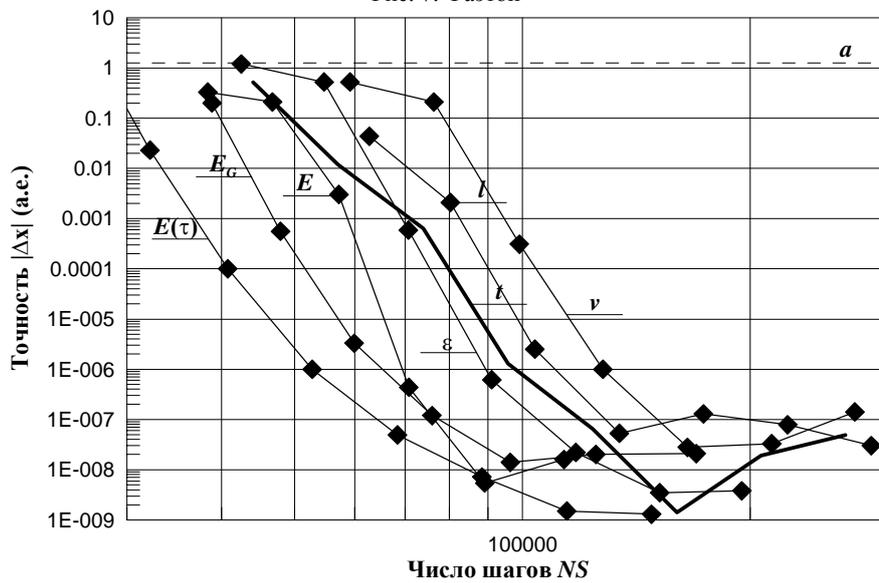


Рис. 8. Фэтон (сглаживающие преобразования)

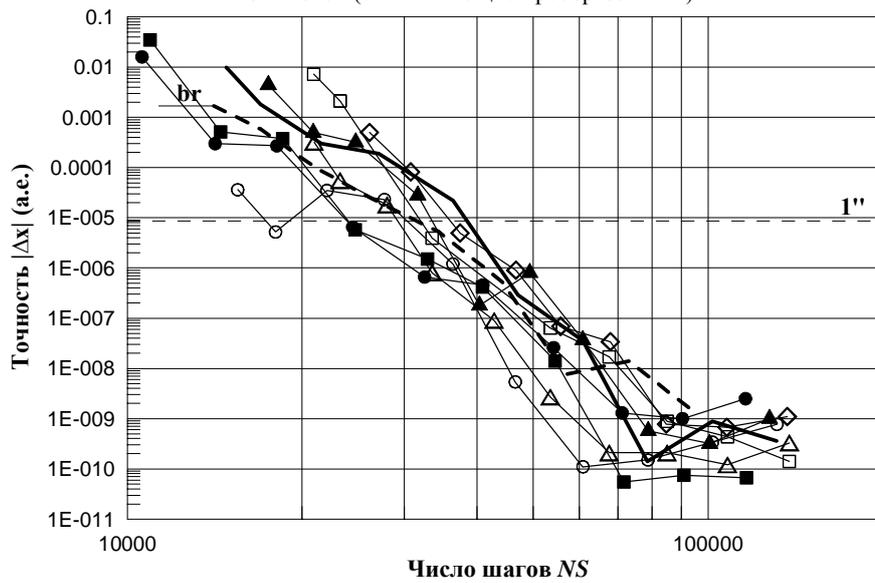


Рис. 9. Церера

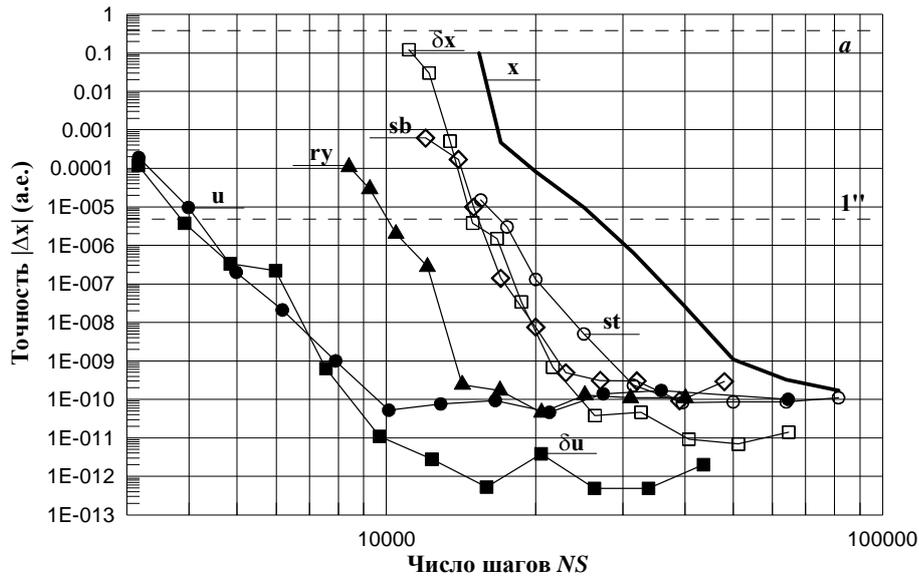


Рис. 10. Меркурий

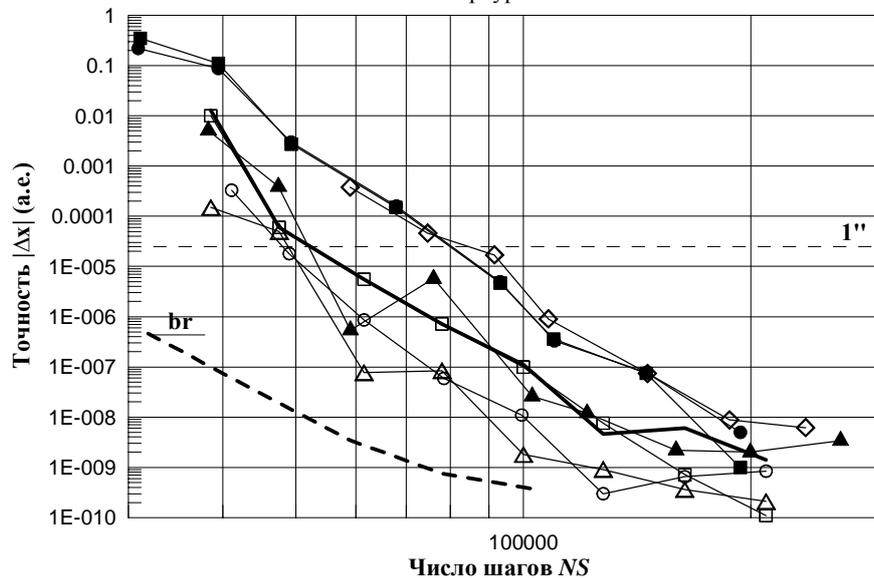


Рис. 11. Юпитер

Наконец, что касается метода Энке (δx), который до сих пор не был удостоен наших комментариев, то, как показывают результаты, из всех рассматриваемых нами методов он оказался наименее эффективен.

Заключение

Таким образом, методы теории специальных возмущений целесообразно применять только в тех задачах, где отсутствуют короткопериодические возмущающие силы, либо при наличии таковых, но лишь в случае, если $\nu < 1$. При отсутствии короткопериодических возмущений исключительно эффективным оказывается применение KS-регуляризации (u) и метода Энке в KS-переменных (δu). Кроме того, для численного исследования динамики близких спутников можно также рекомендовать метод вариации переменных в интерпретации Роя (ry).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшев В. А. // Изв. вузов. Физика. — 2006. (в печати)
2. Everhart E. // Cel. Mech. — 1974. — V. 10. — P. 35–55.
3. Butcher J. C. // Math. Comput. — 1964. — V. 18. — P. 50–64.