ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 49. № 11 ФИЗИКА 2006

УДК: 521.1

В.А. АВДЮШЕВ[1]

МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ I. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ОБОСНОВАНИЕ К ПРИМЕНЕНИЮ[2]

Излагаются идеи и принципы построения методов теории специальных возмущений, а также обосновывается их применение к решению задач классической небесной механики. Исследуется проблема короткопериодических возмущений и их влияние на численное интегрирование.

Введение

Движение небесных тел можно исследовать в самой разнообразной формализации. В численном моделировании орбит она представляет собой систему дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно формализовано орбитальное движение, поскольку от этого непосредственно зависит точность и быстродействие численного интегрирования.

Классические уравнения орбитального движения в прямоугольных координатах относительно массивного центрального тела можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{P} \equiv \mathbf{F} + \mathbf{P}. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{x}$ — вектор положения, t — время, μ — гравитационный параметр центрального тела, $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ — центральная и возмущающая силы. Причем будем полагать, что $|\mathbf{P}| \ll |\mathbf{F}|$.

Численное интегрирование уравнений (1) связано со следующими трудностями. Правые части уравнений (1) представляют собой быстроизменяющиеся функции, которые необходимо интегрировать с малым шагом. Это приводит к увеличению объема вычислений, что, в свою очередь, сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Данная трудность усугубляется наличием в уравнениях движения особенности при $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, что в случае сильновытянутых орбит становится причиной эксцентричного поведения правых частей. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс.

В данной работе мы фокусируем свое внимание на известных методах формализованного представления орбитального движения, которые устраняют названные выше трудности. Эти методы будем называть методами теории специальных возмущений[3]. Получение с их помощью качественно новых уравнений, как правило, основывается на некоторой априорной информации об исследуемом орбитальном движении. Мы излагаем принципы тех методов, которые основаны на решении задачи двух тел в предположении, что исследуемая орбита близка к кеплеровской. В частности, мы рассмотрим методы линеаризации и регуляризации, сглаживающие преобразования, метод вариации координат (Энке) и постоянных, численную стабилизацию Баумгарта и Накози. Заметим, что мы даем краткий обзор методов, который ни в коей мере не претендует на всеобъемлющий исторический экскурс. Поэтому мы намеренно ограничиваем себя лишь основополагающими, на наш взгляд, результатами по теме данной работы.

1. Линеаризация и регуляризация

Цель методов линеаризации и регуляризации состоит в том, чтобы представить уравнения движения в линейном и в регулярном виде. Рассмотрим сначала уравнения невозмущенного движения

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \qquad (2)$$

---

[1] Томский государственный университет

[2] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-02-17043.

[3] В зарубежной литературе под методами специальных возмущений понимают численные методы [1,2].

Предположим, что уравнения (2) имеют интегралы

$$\mathbf{G}_i(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})-\mathbf{g}_i\equiv\mathbf{0}\quad(i=1,\ldots,n),\quad H_j(t,\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})-h_j\equiv 0\quad(j=1,\ldots,m).\tag{3}$$

Здесь $\mathbf{G}_i$ и H_j — векторные и скалярные интегральные функции соответственно, а $\mathbf{g}_i$ и h_j — интегральные параметры, которые в невозмущенном движении постоянны. Далее введем координатное и временное преобразования:

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}\mathbf{u},\quad \mathrm{d}t=f(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s,\tag{4}$$

которые позволяют перейти к новым переменным $\mathbf{u}$ и s.

Главная идея линеаризации и регуляризации состоит во введении в уравнения, записанные в новых переменных, интегральных соотношений (3) [3]. В результате уравнения принимают вид [4]

$$\mathbf{u}''=\mathbf{A}^{-1}(f^2\mathbf{F}+f^{-1}f'(\mathbf{A}\mathbf{u}'+\mathbf{A}'\mathbf{u})-2\mathbf{A}'\mathbf{u}'-\mathbf{A}''\mathbf{u})+\mathbf{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n}N_i(\mathbf{G}_i-\mathbf{g}_i)+\mathbf{A}^{-1}\sum_{j=1}^{m}\mathbf{M}_j(H_j-h_j),\tag{5}$$

где штрих означает производную по s, а N_i и $\mathbf{M}_j$ — неопределенные коэффициенты, которые задаются таким образом, чтобы уравнения принимали линейный и регулярный вид [4]

$$\mathbf{u}''=\underbrace{k_1(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n,h_1,\ldots,h_m)}_{\text{const}}\mathbf{u}+\underbrace{\mathbf{k}_2(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n,h_1,\ldots,h_m)}_{\textbf{const}}.\tag{6}$$

В возмущенном случае, применяя вышеизложенные преобразования, будем иметь слабонелинейные уравнения вида

$$\mathbf{u}''=k_1(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n,h_1,\ldots,h_m)\mathbf{u}+\mathbf{k}_2(\mathbf{g}_1,\ldots,\mathbf{g}_n,h_1,\ldots,h_m)+\mathbf{A}^{-1}f^2\mathbf{P}.\tag{7}$$

Поскольку здесь интегральные параметры уже не являются постоянными и, кроме того, вследствие появления $\mathbf{P}=\mathbf{P}(t)$ правая часть становится функцией времени, систему (7) необходимо дополнить уравнениями

$$\mathbf{g}_i'=f\frac{\partial\mathbf{G}_i}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\cdot\mathbf{P},\quad h_j'=f\frac{\partial H_j}{\partial\dot{\mathbf{x}}}\cdot\mathbf{P},\quad t'=f\quad(i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m).$$

В результате подбора преобразований (4), а также соответствующих коэффициентов N_i и $\mathbf{M}_j$ можно получить многочисленное семейство систем дифференциальных уравнений вида (7). Среди таких систем широко используются на практике системы уравнений в переменных Шперлинга–Боде (SB) [5,6] и Кустаанхеймо–Штифеля (KS) [7]. В первой $\mathbf{x}=\mathbf{u}$, $\mathrm{d}t=|\mathbf{x}|\,\mathrm{d}s$, а в качестве интегралов выступают интегралы энергии h и Лапласа $\mathbf{g}$, тогда как сами уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{x}''-2h\mathbf{x}+\mathbf{g}=|\mathbf{x}|^2\,\mathbf{P},\quad \mathbf{g}'=2\mathbf{x}(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{P})-\mathbf{x}'(\mathbf{x}\cdot\mathbf{P})-\mathbf{P}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}'),\quad h'=(\mathbf{x}'\cdot\mathbf{P}),\\ \tau'=-\frac{1}{2h}\left[\mu+|\mathbf{x}|(\mathbf{x}\cdot\mathbf{P})-\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|}\frac{h'}{h}\right],\quad t=\tau+\frac{1}{2h}\frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|}.\end{gathered}\tag{8}$$

Здесь для определения времени t вводится временной элемент τ, который в слабовозмущенном движении ведет себя почти линейно, а потому его интегрирование выполняется точнее.

Во второй системе $\mathbf{x}=\mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}$, $\mathrm{d}t=|\mathbf{x}|\,\mathrm{d}s$, где $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ — так называемая матрица Кустаанхеймо–Штифеля [7]. Приведение уравнений движения к линейному и регулярному виду в KS-переменных оказывается возможным при использовании лишь интеграла энергии, и система уравнений представляется в виде

$$\mathbf{u}''-\frac{h}{2}\mathbf{u}=\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\mathbf{L}^T\mathbf{P},\quad h'=2(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{L}^T\mathbf{P}),\quad \tau'=-\frac{1}{2h}\left[\mu+|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}^T\mathbf{P})-2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\frac{h'}{h}\right],\quad t=\tau+\frac{1}{h}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}').\tag{9}$$

Следует заметить, что уравнения (8) и (9) обладают стабилизирующими свойствами. Действительно, в невозмущенном случае эти уравнения движения сводятся к гармоническим осцилляторам, решения которых, как известно, устойчивы по Ляпунову. В возмущенном случае уравнения движения неустойчивы. Однако эта неустойчивость будет гораздо менее опасной для численного интегрирования, нежели неустойчивость классических уравнений (1).

2. Сглаживающие преобразования

Сглаживающие преобразования применяют к дифференциальным уравнениям для того, чтобы понизить скорость изменения их правых частей, что позволяет заметно повысить точность численного интегрирования в особенности для сильно вытянутых орбит.

Сглаживающие преобразования имеют вид [8]

$$\mathrm{d}t = f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Применение преобразования (10) предполагает переход к новой независимой переменной s. После преобразования уравнения принимают вид

$$\mathbf{x}'' = f^2(\mathbf{F} + \mathbf{P}) + f^{-1} f' \mathbf{x}'.$$

Для приведения в соответствие координат $\mathbf{x}$ с физическим временем t систему уравнений необходимо пополнить уравнением $t' = f$. Следует заметить, что для повышения точности численного интегрирования можно, как и выше, заменить уравнение временного преобразования на уравнение временного элемента, хотя тогда систему необходимо будет очередной раз расширить и дополнить уравнением энергии.

В небесно-механической практике широко используются такие сглаживающие преобразования, где в качестве f выбираются следующие величины: $|\mathbf{x}|$ (эксцентрическая аномалия); $|\mathbf{x}|^{3/2}$ (эллиптическая аномалия); $|\mathbf{x}|^2$ (истинная аномалия); $|\dot{\mathbf{x}}|^{-1}$ (дуга орбиты) [9].

В астероидных задачах, где исследование орбиты усложняется заметным влиянием от N больших планет, можно использовать следующее преобразование

$$\mathrm{d}t = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{M_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \right)^{-1} \mathrm{d}s \equiv \rho\,\mathrm{d}s. \tag{11}$$

где M_i и $\mathbf{x}_i$ — соответственно масса и координаты i-го тела, где масса Солнца $M_0 = 1$, а $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Интересно заметить, что при тесном сближении с k-ой планетой ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \to 0$) $\rho \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|$, поэтому преобразование (10) вырождается в преобразование Сундмана [10], записанного относительно планеты, выступающей в качестве центрального тела.

3. Численная стабилизация

Расширенная система уравнений возмущенного движения (1):

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{P}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{P}; \tag{12}$$

имеет следующее интегральное соотношение

$$\Delta H \overset{\mathrm{def}}{\equiv} H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - h \equiv 0, \tag{13}$$

которое при численном интегрировании не выполняется вследствие ошибок в интегрируемых переменных $\mathbf{x}$, $\dot{\mathbf{x}}$ и h, т. е. $\Delta H \neq 0$. Следовательно, нарушаются некоторые свойства исследуемого движения, выражаемые интегральным соотношением (13).

3.1. Метод Баумгарта. Чтобы разрешить эту проблему Баумгарт [11,12] предложил ввести в уравнения движения искусственные возмущающие силы, которые приводят к асимптотической устойчивости по ΔH. Так что любая ошибка ΔH при интегрировании стремится к нулю. Согласно Баумгарту, стабилизированные уравнения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{P} - \gamma \Delta H \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right)^{-1}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{P}, \quad \Delta H = H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - h, \tag{14}$$

где γ — так называемый стабилизирующий параметр, которые до численного интегрирования, вообще говоря, не известен и его следует выбирать экспериментально по достижению наилучших результатов. Хотя в [13,14] показано, что при исследовании слабовозмущенных почти круговых орбит в качестве этого параметра следует брать среднее движение.

При интегрировании орбитального движения очень важно, чтобы сохранялось интегральное соотношение для энергии (см., например, [13]), т.е. чтобы выполнялось условие

$$\Delta H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - h = 0. \tag{15}$$

Из формул задачи двух тел нетрудно показать [13], что, если энергии двух близких кеплеровских решений отличаются на величину ΔH в некоторый начальный момент времени t_0, это приводит к расхождению решений $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ в соответствии с линейной оценкой

$$\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{x}\\ \Delta\dot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \frac{\Delta n}{n}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{pmatrix}\Delta t, \quad \frac{\Delta n}{n} = \frac{3}{2}\frac{\Delta H}{H}, \tag{16}$$

где $\Delta t = t - t_0$. Фактически соотношение (16) говорит о том, что кеплеровское движение неустойчиво по Ляпунову. При численном интегрировании соотношение (15) не сохраняется и ошибка ΔH ведет себя почти линейно со временем, тогда как ошибки $|\Delta\mathbf{x}|$ и $|\Delta\dot{\mathbf{x}}|$ — квадратичным (суперлинейным) образом согласно оценке (16). Такое же поведение наблюдается при интегрировании слабовозмущенных орбит.

Если в качестве интегрального соотношения (13) выступает энергетическое (15), то стабилизированные уравнения принимают вид [12]

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{P} - \gamma\Delta H\frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{P}, \quad \Delta H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - h. \tag{17}$$

3.2. Метод Накози. Альтернативный способ сохранения интегральных соотношений (13) был предложен Накози [15]. Следуя Накози, уравнения (12) интегрируются обычным образом, однако после нескольких шагов интегрирования выполняется коррекция переменных $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$ за отклонение $H(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$ от h по приближенной формуле

$$\mathbf{x}_C = \mathbf{x}\left(1 - \frac{\Delta H}{D}\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\right), \quad \dot{\mathbf{x}}_C = \dot{\mathbf{x}}\left(1 - \frac{\Delta H}{D}\right), \quad D = \dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{\mu^2}{|\mathbf{x}|^4}, \tag{18}$$

где $\mathbf{x}_C$ и $\dot{\mathbf{x}}_C$ — исправленные значения интегрируемых переменных. Если $H(\mathbf{x}_C,\dot{\mathbf{x}}_C) \neq h$, процедуру коррекции (18) выполняют снова при $\mathbf{x} = \mathbf{x}_C$ и $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_C$; и так далее до выполнения равенства с заданной точностью.

3.3. Консервативный метод Баумгарта. Если Δn в (16) величина переменная, оценки для $\Delta\mathbf{x}$ и $\Delta\dot{\mathbf{x}}$ будут

$$\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{x}\\ \Delta\dot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \int_{t_0}^{t}\frac{\Delta n}{n}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{pmatrix}\mathrm{d}t, \quad \text{поэтому} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{x}\\ \Delta\dot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \frac{\Delta n}{n}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, уравнения для стабилизированных решений $\overline{\mathbf{x}}$ и $\dot{\overline{\mathbf{x}}}$ можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}\\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}\end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \dot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Delta\mathbf{x}\\ \Delta\dot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \frac{\overline{n}}{n}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{pmatrix} = \left(\frac{h}{H}\right)^{3/2}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \ddot{\mathbf{x}}\end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $\overline{n} = n - \Delta n$ — среднее движение стабилизированной орбиты. Подставляя в правую часть (19) стабилизированные решения получим уравнения

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{x}}\\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}\end{pmatrix} = \left(\frac{h}{H}\right)^{3/2}\begin{pmatrix}\dot{\overline{\mathbf{x}}}\\ \ddot{\overline{\mathbf{x}}}\end{pmatrix}, \quad \ddot{\overline{\mathbf{x}}} = -\frac{\mu}{|\overline{\mathbf{x}}|^3}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{P}(t,\overline{\mathbf{x}},\dot{\overline{\mathbf{x}}}). \tag{20}$$

Уравнения (20) впервые вывел Баумгарт [8,16], хотя и несколько иным способом. Данный метод стабилизации в отличие от предыдущих не приводит к изменению энергии, поэтому автор назвал его консервативным. К сожалению, в задачах небесной механики консервативный метод оказался не эффективным. Это, главным образом, связано с наличием в уравнениях (20) множителя $(h/H)^{3/2}$, который усложняет поведение правых частей.

3.4. Стабилизация по времени. От нежелательного множителя в (20) можно избавиться, если выполнять интегрирование вдоль нового времени $\overline{t}$, которое связано с t как

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\bar{t}\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}. \tag{21}$$

В итоге новые уравнения примут вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\bar{t}}\begin{pmatrix}\bar{\mathbf{x}}\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{\bar{\mathbf{x}}}\\ \ddot{\bar{\mathbf{x}}}\end{pmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\bar{t}} = (\dot{\bar{\mathbf{x}}}\cdot\mathbf{P})\left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\bar{t}} = \left(\frac{H}{h}\right)^{3/2}, \quad H = \frac{\dot{\bar{\mathbf{x}}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\bar{\mathbf{x}}|}. \tag{22}$$

Недостатком этой стабилизации является то, что в систему уравнений необходимо включать дополнительное уравнение для t. Кроме того, поскольку t рассматривается как интегрируемая переменная, возникает проблема выхода на заданный момент истинного времени. Эту проблему можно решить следующим образом. Интегрируя численно до $\bar{t} = t$, получаем $t = t(\bar{t})$. Если величина $t - \bar{t}$ достаточно мала, находим решение по приближенной формуле: $\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{t}) + \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{t})(t-\bar{t}) + \ddot{\bar{\mathbf{x}}}(\bar{t})(t-\bar{t})^2/2$. Если $t - \bar{t}$ большая величина, снова выполняем интегрирование до $\bar{t} = t$ и так далее, пока $t - \bar{t}$ не станет пренебрежимо малой.

4. Метод вариации произвольных постоянных

Метод вариации произвольных постоянных, впервые предложенный Ньютоном и детально разработанный Лагранжем, изначально применялся в теории общих возмущений. Хотя он успешно используется и при численном интегрировании.

В методе вариации постоянных орбита представляется в невозмущенном виде, где орбитальные параметры (элементы) рассматриваются как переменные. В соответствии с формой представления орбиты составляются дифференциальные уравнения для орбитальных параметров, которые затем интегрируются приближенными методами. Следует заметить, что методику Лагранжа можно применять не только к постоянным параметрам, но также и к различным переменным функциям этих параметров и времени.

В случае гладких возмущений параметры — медленноменяющиеся переменные, поэтому их уравнения при использовании численных методов будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения.

С вычислительной точки зрения уравнения в кеплеровских элементах неудобны тем, что они довольно сложны и содержат много тригонометрических функций и, кроме того, имеют особенность для нулевых наклонений и эксцентриситетов. Чтобы обойти эти недостатки Рой предложил в качестве орбитальных параметров рассматривать момент количества движения $\mathbf{c}$, вектор Лапласа $\mathbf{g}$ и истинную долготу $\lambda = v + \Omega + \omega$. Их уравнения можно записать в виде [2]

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{x}\times\mathbf{P}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{g}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{P}\times\mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}}\times\dot{\mathbf{c}}, \quad \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{c_1\dot{c}_2 - c_2\dot{c}_1}{|\mathbf{c}|(|\mathbf{c}|+c_3)}. \tag{23}$$

Система (23) имеет серьезный недостаток, который проявляется, главным образом, при интегрировании сильновытянутых орбит. Последнее уравнение в (23) сингулярно в начале координат, что приводит к эксцентричному поведению его правой части. Чтобы разрешить эту трудность достаточно заменить λ на среднюю долготу $l = M + \Omega + \omega$, которая в слабовозмущенном движение меняется почти линейно.

5. Метод Энке

Идея Энке [1,2,17] состоит в том, чтобы вместо координат интегрировать их возмущения (отклонения) относительно заранее выбранной (как правило, кеплеровской) орбиты. Применение метода Энке будет эффективным лишь в том случае, если интегрируемые возмущения будут не только меньше, но и более гладкими, чем сама орбита, поскольку это условие обеспечивает уменьшение методической ошибки, а потому увеличение шага интегрирования. Свойство гладкости в методе Энке первично и возмущения необязательно должны быть малыми. Тем не менее, на практике их малость является обязательным условием, поскольку это позволяет уменьшить влияние ошибок округления на представление вычисляемой орбиты.

В классическом методе Энке в качестве опорной выбирается кеплеровская оскулирующая (на начальный момент времени) орбита $\mathbf{x}_K = \mathbf{x}_K(t)$, описываемая уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}_K}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_K). \tag{24}$$

Тогда дифференциальные уравнения для возмущений $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_K$ принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 \delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_K) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_K + \delta\dot{\mathbf{x}}). \tag{25}$$

Следует заметить, что при малых $\delta\mathbf{x}$ кеплеровские члены в (25) — близкие величины. В то же время их малая разность будет значительно меньше каждого из них и, следовательно, из-за ошибок округления она будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Для разрешения этой проблемы проводят дополнительные преобразования, которые приводят разность кеплеровских членов к некой функции $\mathbf{\Phi}$, где ее малость явно выражается через малые возмущения $\delta\mathbf{x}$ и уравнения приобретают окончательный вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 \delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{\Phi}(\delta\mathbf{x}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_K + \delta\dot{\mathbf{x}}). \tag{26}$$

В (26) функцию $\mathbf{\Phi}$ можно привести, например, к следующему виду [18]

$$\mathbf{\Phi}(\delta\mathbf{x}) = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \frac{\mu}{|\mathbf{x}_K|^3}\mathbf{x}_K = \frac{\mu}{|\mathbf{x}_K|^3}(D\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}), \quad D = \left(1 + \frac{\zeta^2}{1+\zeta}\right)\frac{(\mathbf{x}_K + \mathbf{x})\cdot\delta\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}, \quad \zeta = \frac{|\mathbf{x}_K|}{|\mathbf{x}|}.$$

Даже если в начале интегрирования возмущения $\delta\mathbf{x}$ малы, со временем они возрастают. На достаточно длинных интервалах времени они увеличиваются настолько, что функция $\mathbf{\Phi}$ (член Энке) становится сравнимой с возмущающими силами $\mathbf{P}$. В этом случае прибегают к процедуре исправления орбиты путем перевычисления параметров опорного движения на новую эпоху.

Хотелось бы отметить, что методика Энке не ограничена уравнениями в прямоугольных координатах (1). С тем же успехом ее можно применить, например, к уравнениям (8) [19] или (9) [20]. Так, если в качестве опорного взять невозмущенное решение (9):

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_0 \cos\omega s + \frac{\mathbf{u}'_0}{\omega}\sin\omega s, \quad \omega = \sqrt{-\frac{h_K}{2}}, \quad h_K = h_0, \quad \tau_K = -\frac{1}{h_K}(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}'_0) - \frac{\mu}{2h_K}s,$$

уравнения Энке в KS-интерпретации будут иметь вид [20]

$$\delta\mathbf{u}'' - \frac{h_K}{2}\delta\mathbf{u} - \frac{\delta h}{2}\mathbf{u} = \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\mathbf{L}^T\mathbf{P}, \quad \delta h' = 2(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{L}^T\mathbf{P}), \quad \delta\tau' = -\frac{1}{2h}\left[-\frac{\delta h}{h_K}\mu + |\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}^T\mathbf{P}) - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')\frac{h'}{h}\right], \tag{27}$$

где возмущенные величины определяются как сумма их опорных аналогов и соответствующих возмущений.

6. Проблема короткопериодических возмущений

Как мы уже замечали, прибегать к методу Энке имеет смысл, если возмущения более гладкие, нежели сама орбита. «Шероховатость» в орбите, как правило, вызывают короткопериодические возмущающие силы [21]. На примере ограниченной круговой задачи трех тел можно оценить, в каком случае при наличии короткопериодических возмущений целесообразно применять метод Энке.

В задаче орбита третьего тела возмущается внутренним массивным телом, быстро обращающего около центрального. Уравнения задачи можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \underbrace{-\mu\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}}_{\mathbf{F}} \underbrace{-\mu_P\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} - \mu_P\frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}}_{\mathbf{P}}. \tag{28}$$

где μ_P и $\mathbf{x}_P$ — соответственно гравитационный параметр и вектор положения второго тела, причем $\mu_P \ll \mu$. Заметим, что эти уравнения записаны в координатной системе, связанной с центральным телом.

Метод Энке фактически гасит влияние кеплеровского члена $\mathbf{F}$ и предоставляет численному методу интегрировать возмущающие силы $\mathbf{P}$. Следовательно, метод Энке будет эффективен только тогда, когда функция $\mathbf{P}$ будет более гладкой, нежели $\mathbf{F}$, говоря иначе, когда возмущения, определяемые силой $\mathbf{P}$, будут интегрироваться быстрее, чем кеплеровская орбита.

При использовании численного метода порядка p для ошибки интегрирования кеплеровской почти круговой орбиты $|\Delta\mathbf{x}_K|$ на шаге Δt справедлива оценка

$$|\Delta\mathbf{x}_K| \approx a(n\Delta t)^{p+1}/(p+1)! \tag{29}$$

Внутреннее массивное тело, вызывающее в орбите третьего короткопериодические возмущения, должно быть достаточно близко к центральному телу. Тогда в $\mathbf{P}$ будет доминировать второй член (инерциальная сила). Ошибка интегрирования на шаге Δt_P этой части можно оценить как

$$|\Delta\mathbf{x}_P| \approx \beta a_P (n_P \Delta t_P)^{p+1}/(p+1)! \tag{30}$$

где $\beta = \mu_P/(\mu+\mu_P)$, a и a_P — большие полуоси соответственно третьего и второго тел, а n и n_P — их средние движения. Введем малый параметр $\alpha = a_P/a$, причем $\alpha^{-3/2} = n_P/n$. Тогда согласно (29) и (30) одинаковая точность интегрирования $\mathbf{F}$ и $\mathbf{P}$ достижима только в том случае, когда величины шагов Δt и Δt_P будут удовлетворять соотношению

$$\nu \equiv \Delta t/\Delta t_P = (\alpha\beta)^{1/(p+1)}\alpha^{-3/2}. \tag{31}$$

Таким образом, если $\Delta t_P > \Delta t$ или $\nu < 1$, использование метода Энке целесообразно, иначе нет. Более того, эффективность метода Энке будет тем выше, чем меньше величина ν. Эта оценка может также служить для обоснования использования других рассмотренных нами методов.

Следует заметить, что интегрирование круговых орбит выполняется с постоянным шагом, поэтому коэффициент (31) можно вычислять как $\nu = M_P/M$, где M и M_P — число шагов Δt и Δt_P, выполненных на всем интервале интегрирования.

В эллиптическом случае нами замечено, что для обеспечения определенной локальной ошибки шаг интегрирования следует выбирать в соответствии с постоянным шагом по эллиптической аномалии. При этом число шагов M_e за оборот увеличивается с повышением эксцентричности орбиты как

$$M_e = M\sigma, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{1-e}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon\sin^2\varphi}}, \quad \varepsilon = -\frac{2e}{1-e}. \tag{32}$$

Чтобы точность интегрирования соответствовала точности в круговом случае, величину шага по эллиптической аномалии нужно уменьшить, умножая ее на $\xi^{1/(p+1)}$, где $\xi = \sqrt{1-e}$. В итоге, получаем обобщенный коэффициент

$$\nu \equiv \frac{1}{\sigma}(\alpha\beta\xi)^{1/(p+1)}\alpha^{-3/2}. \tag{33}$$

Впрочем, от инерциального члена можно избавиться, если записать уравнения движения относительно барицентра массивных тел. Эти уравнения можно представить в виде (1):

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_B}{\mathrm{d}t^2} = \underbrace{-(\mu+\mu_P)\frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}_{\mathbf{F}}\underbrace{\overbrace{-\mu\frac{\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_{1B}}{|\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_{1B}|^3}+\mu\frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}^{\mathbf{P}_1}\overbrace{-\mu_P\frac{\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_{2B}}{|\mathbf{x}_B-\mathbf{x}_{2B}|^3}+\mu_P\frac{\mathbf{x}_B}{|\mathbf{x}_B|^3}}^{\mathbf{P}_2}}_{\mathbf{P}}, \tag{34}$$

где $\mathbf{x}_{1B}$, $\mathbf{x}_{2B}$ и $\mathbf{x}_B$ — барицентрические векторы положения первого, второго и третьего тел соответственно. Здесь $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ можно рассматривать как возмущающую силу за отклонение массивных тел от барицентра. Следует заметить, что $\mathbf{x}_{1B}$ и $\mathbf{x}_{2B}$ малые величины, поэтому к $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ необходимо применить преобразование Энке. Кроме того, из условия $\mu_P \ll \mu$ следует, что $\mathbf{P}_1 \ll \mathbf{P}_2$ (см., например, [21]) и поэтому в нашем случае возмущающей силой $\mathbf{P}_1$ можно пренебречь.

Получение оценки $|\Delta\mathbf{x}_P|$ для $\mathbf{P}_2$ в общем случае весьма проблематично. Однако в круговой плоской задаче при использовании численного метода нечетного порядка нам удалось получить ее предельные значения

$$|\Delta\mathbf{x}_P|_{\min}^{\max} \approx \pm\frac{a(n\Delta t_P)^{p+1}}{(p+1)!}\frac{\beta}{(1\mp\alpha)^{p+1}}\sum_{i=0}^{p-1}(1\mp\alpha)^i(\alpha^{-3/2}-1)^{p-1-i}\sum_{j=1}^{p-1-i}a_{ij}(\pm\alpha)^j, \tag{35}$$

где a_{ij} — целые числа, зависящие от p.

Пусть при некотором α_B ошибка $|\Delta\mathbf{x}_P|$ (30) равна $|\Delta\mathbf{x}_P|^{\max}$ (35). Тогда для всех $\alpha > \alpha_B$ переход к барицентрической системе становится необоснованным. Эмпирически мы получили следующую приближенную формулу для граничного значения α_B: $\alpha_B = e^{-0.2p}$.

Для достаточно малых α

$$|\Delta\mathbf{x}_P| \approx |\Delta\mathbf{x}_P|^{\max} \approx |\Delta\mathbf{x}_P|_{\min} \approx 2a(n\Delta t_P)^{p+1}\beta\alpha(\alpha^{-3/2})^{p-1}/(p+1)!,$$

отсюда коэффициент ν_B для уравнения (34) будет

$$\nu_B = (2\beta\alpha)^{1/(p+1)}(\alpha^{-3/2})^{(p-1)/(p+1)}. \tag{36}$$

Поэтому, сравнивая (31) и (36), можно ожидать, что при переходе к барицентрической системе быстродействие численного интегрирования повысится в $(2\alpha^3)^{-1/(p+1)}$ раз.

Впрочем, несмотря на то, что уравнения (34) будут интегрироваться быстрее, нежели (28), этот подход, как правило, на практике не позволяет разрешить проблему короткопериодических возмущений, в особенности при использовании численных методов высокого порядка; и применение к (34) каких либо методов теории специальных возмущений также будет безуспешным.

С другой стороны, интересно отметить, что сам переход к барицентрической системе координат можно рассматривать как самостоятельный метод повышения эффективности численного интегрирования, однако прибегать к нему имеет смысл только при достаточно малых α.

Подводя итог вышесказанному, мы можем полагать, что методы теории специальных возмущений будут эффективны только в тех задачах, где отсутствуют короткопериодические возмущающие силы, либо при наличии таковых, но лишь в случае, если $\nu \ll 1$. Например, эти методы целесообразно использовать в задачах динамики близких спутников или планет земной группы, что мы намерены показать в следующей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Херрик С. Астродинамика. М.: Мир. — 1977. — Т. 2. — 360 с.
2. Рой А.Е. Движение по орбитам. М.: Мир. — 1981. — 544 с.
3. Szebehely V. // Cel. Mech. — 1976. — V. 14. — P. 499–508.
4. Шефер В.А. // Астрон. журн. — 1991. — Т. 68. — С. 197–205.
5. Burdet, C.A. // Z. Angew. Math. Phys. — I. 19. — P. 345–368.
6. Silver M. // Cel. Mech. — 1975. — V. 11. — P. 39–41.
7. Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука. — 1975. — 304 с.
8. Baumgarte J, Stiefel E. // Lect. Notes in Math. — 1974. — Vol. 362. — P. 207–236.
9. Brumberg E. V. // Cel. Mech. — 1992. — V. 53. — P. 323–328.
10. Sundman K. // Acta Math. — 1912. — V. 36. — P. 105–179.
11. Baumgarte J. // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. — 1972. — I. 2. — P. 1–16.
12. Baumgarte J. // Cel. Mech. — 1972. — V. 5. — P. 490–501.
13. Avdyushev V. // Cel. Mech. — 2003. — V. 87 (4). — P. 383–409.
14. Авдюшев В.А. // Изв. вузов. Физика. — 2003. — № 12. Приложение. — С. 5–12.
15. Nacozy P. E. // Astrophys. and Space Science — V. 14. — P. 40–51.
16. Baumgarte J, Stiefel E. // Cel. Mech. — 1974. — V. 10. — P. 71–85.
17. Encke J.F. // Astr. Nach. 1852. — Vol. 33. — P. 377–398.
18. Conte S.P. // Advances in Computers. — 1962. — V. 3. — P. 1–76.
19. Авдюшев В.А., Бордовицына Т.В. // Изв. вузов. Физика. — 2006. — № 2. Приложение. — С. 27–30.
20. Bordovitsyna T.V, Avdyushev V.A., Chernitsov A.M. // Cel. Mech. — 2001. — V. 80 (4). — P. 227–247.
21. Авдюшев В.А. // Изв. вузов. Физика. — 2006. — № 2. Приложение. — С. 31–43.