

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

**ЛИТВИНОВ Дмитрий Владимирович**

**РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ  
ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ТРЕХМЕРНЫМ  
КООРДИНАТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ И  
ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ЭФФЕКТИВНОСТИ**

(курсовая работа)

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. \_\_\_\_\_

Автор работы

Литвинов Д.В. \_\_\_\_\_

Томск — 2011

	1
<b>ОГЛАВЛЕНИЕ</b>	
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>2</b>
<b>1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ТРУДНОСТИ ИХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ</b>	<b>4</b>
<b>2 РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХМЕРНЫМ КООРДИНАТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ</b>	<b>5</b>
2.1 Общий подход . . . . .	5
2.2 Частные случаи . . . . .	7
<b>3 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РУНГЕ–КУТТЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ</b>	<b>9</b>
<b>4 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЛИНЕАРИЗАЦИИ</b>	<b>10</b>
4.1 Постановка численного эксперимента . . . . .	10
4.2 Анализ численных результатов . . . . .	10
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>16</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>17</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Главной трудностью в решении задач долговременной эволюции орбит при использовании численных методов интегрирования является низкое быстродействие и потеря точности: последовательное численное определение динамических состояний (положений и скоростей) небесного тела для адекватного представления орбитального движения требует малый шаг интегрирования, тогда как каждое следующее динамическое состояние определяется со все большими ошибками, которые, кроме того, могут усиливаться ляпуновской неустойчивостью.

Эта трудность разрешается путем преобразования интегрируемых дифференциальных движения, с тем чтобы они в результате обладали лучшими свойствами с точки зрения численного интегрирования. Одним из подходов для преобразования уравнений является регуляризация. Ее главная цель — это устранения сингулярностей в окрестностях гравитирующих тел, которые при моделировании орбит могут приводят к очень большим и быстроизменяющимся функциям правых частей уравнений, что, очевидно, сопряжено с плохой точностью и низким быстродействием пошагового интегрирования. Впрочем, помимо регуляризирующего эффекта они обычно обладают еще и стабилизирующими свойствами [1], что существенно улучшает поведение ошибок интегрирования.

Пожалуй, наиболее известной является регуляризация Кустаанхеймо-Штифеля [2]. Однако в плане практической реализации она достаточно сложна, поскольку предполагает переход не только к фиктивному времени, но и фиктивному (причем 4-мерному) пространству. Тем не менее, существуют другие регуляризирующие преобразования, где координатное преобразование не требуется вовсе, либо, если оно даже и предполагается, то новые координаты имеют вполне определенный геометрический смысл в физическом пространстве. В данной работе как раз рассматривается такая регуляризация и исследуется ее эффективность применительно к численному моделированию орбитального движения.

Для достижения поставленной цели предполагалось: 1) разработать программный комплекс для исследования эффективности регулярных уравнений; 2) с помощью разработанного программного комплекса получить характеристики эффективности численного интегрирования для

регулярных и классических уравнений (в прямоугольных координатах) в случае круговых и эллиптических орбит; 3) выполнить анализ полученных результатов. Следует заметить, что все исследования проводились на примере моделирования невозмущенного орбитального движения. Такое ограничение несколько не умаляет практическую значимость полученных нами результатов и вполне могут быть обобщены на слабо возмущенные случаи, которые часто имеют место на практике, например, при численном моделировании орбит малых тел Солнечной системы.

# 1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И ТРУДНОСТИ ИХ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При численном моделировании исследуемые орбиты небесных тел формализуются на основе систем дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно выбраны уравнения, поскольку от этого непосредственно зависят точность и быстродействие их интегрирования.

Классические уравнения орбитального движения имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{P}. \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор положения исследуемого тела относительно центрального;  $r = |\mathbf{x}|$ ;  $\mu$  — гравитационный параметр;  $\mathbf{P}$  — возмущающая сила. Классические уравнения имеют особенность (сингулярность) в начале координат ( $r = 0$ ), поэтому притяжение центральной массы становится бесконечным в этой точке. Вследствие этого возникают практические трудности. Если частица достаточно близко подходит к центральной массе, то можно говорить о почти соударении. Такое гравитационное событие вызывает большие гравитационные силы и резкое изменение орбиты. При численном интегрировании единственный способ преодолеть эту трудность состоит в уменьшении длины шага в зоне тесного сближения, что сопряжено с большим объемом вычислений. Из-за вычислительных и методических ошибок точность численного интегрирования после прохождения почти соударения будет довольно низкой. Если при численном интегрировании проблема практически не решается, ее нужно решать до интегрирования, а именно регуляризируя уравнения.

Следует также отметить, что уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Разрешить проблему неустойчивости позволяют стабилизирующие преобразования [1], в частности, путем линеаризации дифференциальных уравнений.

## 2 РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ С ТРЕХМЕРНЫМ КООРДИНАТНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

В общем случае линеаризация и регуляризация дифференциальных уравнений возможна в результате координатного и временного преобразований после введения в уравнения соответствующих интегралов. Рассмотрим линеаризирующие и регуляризирующие преобразования на примере уравнений задачи двух тел.

Дифференциальные уравнения кеплеровского движения ( $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ) в прямоугольных координатах имеют вид

$$\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}, \quad (2)$$

Пусть даны начальные условия:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \quad \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

Уравнения (2) имеют интегралы

$$h = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r}; \quad \mathbf{c} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}; \quad \mathbf{a} = \left(\dot{\mathbf{x}} - \frac{\mu}{r}\right)\mathbf{x} - r\dot{r}\dot{\mathbf{x}}.$$

называемые интегралами энергии, площадей и Лапласа соответственно, где  $h$  — кеплеровская энергия;  $\mathbf{c}$  — вектор момента количества движения;  $\mathbf{a}$  — вектор Лапласа. Из второго векторного интеграла можно получить скалярный  $c^2 = r^2(\dot{\mathbf{x}}^2 - \dot{r}^2)$ .

### 2.1 Общий подход

Введем координатное и временное преобразования

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad dt = r^n ds, \quad (3)$$

а также скалярные и векторные интегральные соотношения  $N_i = 0$  и  $\mathbf{M}_j = \mathbf{0}$ , к которым, очевидно, можно привести интегралы, представленные выше, а также полученные из них другие интегралы движения. Здесь  $\mathbf{A}$  — квадратная невырожденная матрица,  $s$  — новая независимая

переменная, фиктивное время. Будем полагать, что матрица  $\mathbf{A}$  обладает свойством ортогональности, т.е.

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = p\mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{p}\mathbf{A}^T, \quad (4)$$

где  $\mathbf{A}^T$  — транспонированная матрица  $\mathbf{A}$ ,  $p \neq 0$  — скаляр, а  $\mathbf{E}$  — единичная матрица.

В результате новые дифференциальные уравнения движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'' = & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}''\mathbf{q} - 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{q}' + \frac{nr'}{r}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{q} + \mathbf{q}') - \mu r^{2n-3}\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{A}^{-1} \sum_i \mathbf{f}_i N_i + \mathbf{A}^{-1} \sum_j g_j \mathbf{M}_j, \end{aligned} \quad (5)$$

где вектор-функции  $\mathbf{f}_i$  и скалярные функции  $g_j$  зависят в общем случае от векторов  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}'$  и постоянных интегрирования. В качестве  $N_i$  и  $\mathbf{M}_j$  примем три интегральных соотношения

$$\begin{aligned} N_1 &= 2r^{2n} \left( h + \frac{\mu}{r} \right) - \mathbf{x}'^2, \\ N_2 &= r^{2-2n}(\mathbf{x}'^2 - r'^2) - c^2, \\ \mathbf{M} &= \left( \frac{\mathbf{x}'^2}{r^{2n}} - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{x} - \frac{rr'}{r^{2n}}\mathbf{x}' - \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Подставляя интегралы в уравнения (5), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'' = & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}''\mathbf{q} - 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{q}' + \frac{nr'}{r}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{q} + \mathbf{q}') - \mu r^{2n-3}\mathbf{q} + \\ & + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_1(2hr^{2n} + 2\mu r^{2n-1} - \mathbf{x}'^2) + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}_2[r^{2-2n}(\mathbf{x}'^2) - r'^2 - c^2] + \\ & + g\mathbf{A}^{-1} \left[ \left( \frac{\mathbf{x}'^2}{r^{2n}} - \frac{\mu}{r} \right) \mathbf{A}\mathbf{q} - \frac{rr'}{r^{2n}}(\mathbf{A}'\mathbf{q} + \mathbf{A}\mathbf{q}') - \mathbf{a} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Следуя В. Себехею [3], будем искать функции  $\mathbf{f}_1$ ,  $\mathbf{f}_2$  и  $g$  так, чтобы уравнения (6) имели такие свойства, как линейность и регулярность.

Выберем матрицу координатного преобразования (3) в виде

$$\mathbf{A} = r^\alpha \mathbf{E},$$

где  $\alpha$  — произвольная постоянная. Для обратной матрицы, согласно формулам (4), получим выражение

$$\mathbf{A}^{-1} = r^{-\alpha} \mathbf{E}.$$

Тогда преобразование (3) запишется в форме

$$\mathbf{x} = r^\alpha \mathbf{q}. \quad (7)$$

В итоге уравнения (6) можно привести к виду [4]

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{g}_1 + \mu \mathbf{g}_2,$$

где

$$\mathbf{g}_1 = 2(\alpha - 1)(\alpha - n)hr^{2n-2}\mathbf{q} - \alpha(\alpha - n + 2)c^2r^{2n-4}\mathbf{q} - (n - 2\alpha)r^{2n-\alpha-2}\mathbf{a}, \quad (8)$$

$$\mathbf{g}_2 = (2\alpha - 1)(\alpha - n + 1)r^{2n-3}\mathbf{q}. \quad (9)$$

## 2.2 Частные случаи

Условие линейности  $\mathbf{g}_2$  выполняется, если правая часть (9) независима от  $r$ . Это имеет место в двух случаях:

а) если  $2n - 3 \neq 0$  и  $(2\alpha - 1)(\alpha - n + 1) = 0$ , то  $\mathbf{g}_2 = 0$ ;

б) если  $2n - 3 = 0$ , то  $\mathbf{g}_2 = (2\alpha - 1)(\alpha - n + 1)\mathbf{q}$ .

Условие линейности (8) может быть выполнено только для отдельных слагаемых при равенстве нулю остальных. Наибольший практический интерес представляют следующие случаи: 1)  $\alpha = 0$ ,  $n = 1$ ; 2)  $\alpha = 0$ ,  $n = 3/2$ ; 3)  $\alpha = 1$ ,  $n = 2$ .

Для случая  $n = 1$ ,  $\alpha = 0$  ( $\mathbf{x} \equiv \mathbf{q}$ ) имеем уравнения

$$\mathbf{x}'' = 2h\mathbf{x} - \mathbf{a}, \quad t' = r \quad (10)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}'(0) = r_0 \dot{\mathbf{x}}_0, \quad r_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2}, \quad t(0) = t_0.$$

Эти уравнения называются уравнениями Шперлинга–Боде.



Для  $n = 3/2$ ,  $\alpha = 0$  ( $\mathbf{x} \equiv \mathbf{q}$ ) уравнения будут

$$\mathbf{x}'' = 3hr\mathbf{x} - \frac{3}{2}r\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mu\mathbf{x}, \quad t' = r^{3/2} \quad (11)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}'(0) = r_0^{3/2}\dot{\mathbf{x}}_0, \quad r_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2}, \quad t(0) = t_0.$$

Наконец, для случая  $n = 2$ ,  $\alpha = 1$  ( $\mathbf{x} \equiv r\mathbf{q}$ )

$$\mathbf{q}'' = -c^2\mathbf{q}, \quad t' = r^2, \quad r'' = 4hr^3 - c^2r + 3\mu r^2 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{q}(0) = \frac{\mathbf{x}_0}{r_0}, \quad \mathbf{q}'(0) = r_0\dot{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0\frac{r'_0}{r_0^2},$$

$$r(0) = r_0 = \sqrt{x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2}, \quad r'(0) = r'_0 = r_0\mathbf{x}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}_0, \quad t(0) = t_0.$$

Во всех представленных системах регулярных уравнений фиктивное время  $s$  имеет вполне определенный геометрический смысл: в системе (10) фиктивное время пропорционально эксцентрической аномалии; в (11) — так называемой эллиптической аномалии, и в (12) — истинной аномалии.

### 3 КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РУНГЕ–КУТТЫ ДЛЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Для интегрирования дифференциальных уравнений мы использовали известный классический метод Рунге–Кутты [5].

Пусть имеем задачу Коши:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0. \quad (13)$$

Требуется найти решение  $\mathbf{q}$  на момент времени  $T$ .

Тогда применительно к дифференциальным уравнениям (13) схема Рунге–Кутты для  $n + 1$  шага  $h$  будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{Q}(t_n, \mathbf{q}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{Q}(t_n + h/2, \mathbf{q}_n + h\mathbf{k}_1/2), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{Q}(t_n + h/2, \mathbf{q}_n + h\mathbf{k}_2/2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{Q}(t_n + h, \mathbf{q}_n + h\mathbf{k}_3), \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \\ t_{n+1} &= t_n + h. \end{aligned}$$

Интегрирование выполняется до тех пор, пока  $t_{n+1}$  не станет равным  $T$ . Если же  $t_{n+1}$  оказывается больше  $T$  (при  $t_n < T$ ), то последний шаг выполняется с  $h = T - t_n$ . В итоге получаем приближенное численное решение  $\mathbf{q}_{n+1}$  уравнений (13) на заданный момент времени  $T$ .

## 4 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЛИНЕАРИЗАЦИИ

### 4.1 Постановка численного эксперимента

Для исследования эффективности регулярных уравнений (10), (11) и (12) мы провели следующий численный эксперимент. Уравнения интегрировались классическим методом Рунге-Кутты 4-го порядка на интервале 1000 оборотов в компьютерной арифметике с двойной точностью. Вычисления выполнялись в рамках двух безразмерных ( $\mu = 1$ ,  $a = 1$ ) плоских ( $I = 0$ ) задач<sup>1</sup>: круговой и эллиптической с эксцентриситетом  $e = 0.9$ . Начальные условия для уравнений в прямоугольных координатах приняты следующие:

$$x_1 = 1 - e, \quad x_2 = 0, \quad \dot{x}_1 = 0, \quad \dot{x}_2 = \sqrt{(1+e)/(1-e)}.$$

Для каждой системы уравнений движения интегрирование выполнялось несколько раз с различными (постоянными) шагами:  $h = 2\pi/(2^i 32)$ ,  $i$  — номер эксперимента. При этом оценивалась точность решения  $i$ -го эксперимента  $|\Delta \mathbf{x}|$  путем сравнения его результатов с полученными для  $(i+1)$ -го эксперимента:

$$|\Delta \mathbf{x}| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}| + |\dot{\mathbf{x}}| |t_i - t_{i+1}|.$$

В итоге были получены характеристики точность–быстродействие:  $|\Delta \mathbf{x}| \sim NS$ , где  $NS = 2\pi/h = 2^i 32$  — число выполненных шагов за один оборот. Эти характеристики очень удобны для исследования эффективности численного интегрирования: чем выше точность  $|\Delta \mathbf{x}|$  при меньшем значении  $NS$ , тем выше эффективность интегрирования.

### 4.2 Анализ численных результатов

Результаты численного эксперимента приведены на рис. 1 ( $e = 0$ ) и 2 ( $e = 0.9$ ). Здесь через  $(n, \alpha)$  обозначены характеристики точность–быстродействие для решений уравнений движения при параметрах временного и координатного преобразований  $n$  и  $\alpha$ . Таким образом, характеристика, обозначенная  $(0, 0)$ , соответствует уравнениям в прямоугольных координатах.

<sup>1</sup>Здесь  $\mu$  — гравитационный параметр;  $a$  — большая полуось;  $I$  — наклонение орбиты.

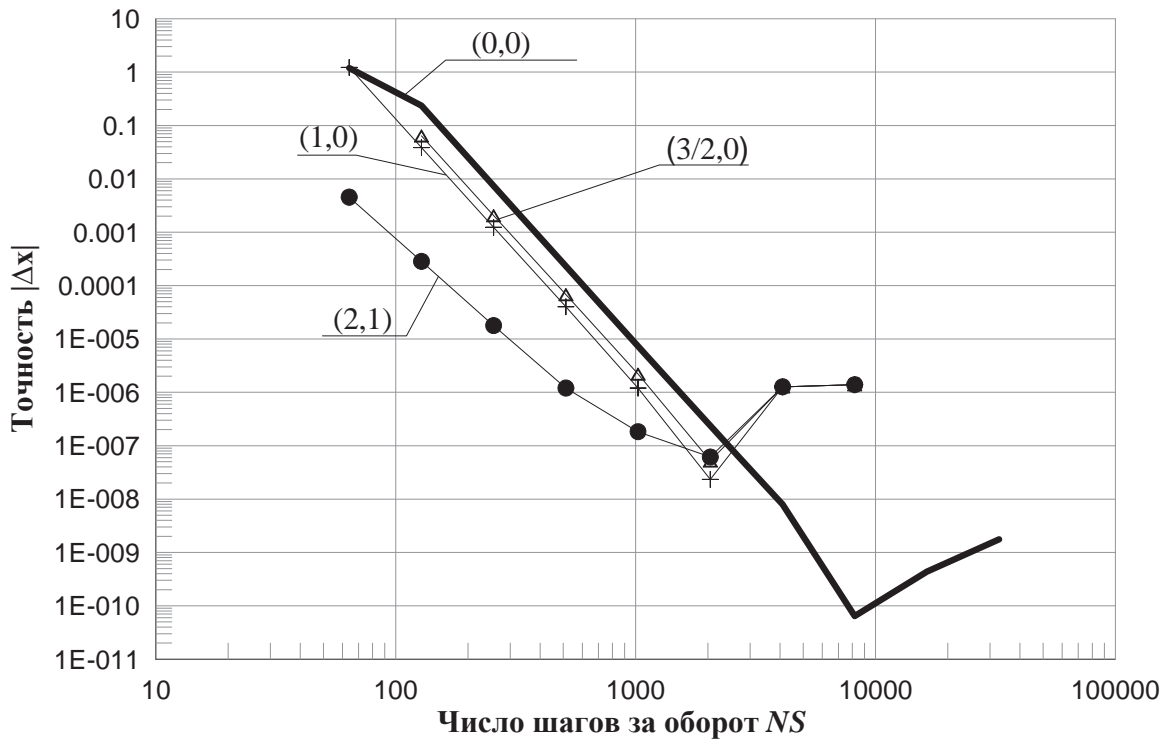


Рис. 1: Эффективность интегрирования уравнений движения в случае круговой орбиты

Как видно из рис. 1, при умеренной точности наиболее эффективными для моделирования круговых орбит оказываются регулярные уравнения с параметрами  $n = 2$  и  $\alpha = 1$ . Они позволяют повысить быстродействие интегрирования (при сохранении точности) в 2–4 раза, а точность (при сохранении быстродействия) — на 2–3 порядка. Другие регулярные уравнения повышают эффективность несущественно в сравнении с классическими уравнениями орбитального движения. Впрочем, следует заметить, что последние позволяют получить более высокую точность численного решения, до  $10^{-10}$ , тогда как уровень наивысшей точности для регулярных уравнений на несколько порядков ниже. С ростом  $NS$ , очевидно, методическая точность повышается, но при слишком большом значении  $NS$  (более 20000) в численном решении начинают интенсивно накапливаться ошибки округления, что приводит к значительной потере глобальной точности. Видимо, как раз решение для классических уравнений менее подвержено влиянию вычислительных ошибок.

Далее, на рис. 2 показаны результаты численного интегрирования эллиптической орбиты. Как видно из рисунка, наименее эффективными

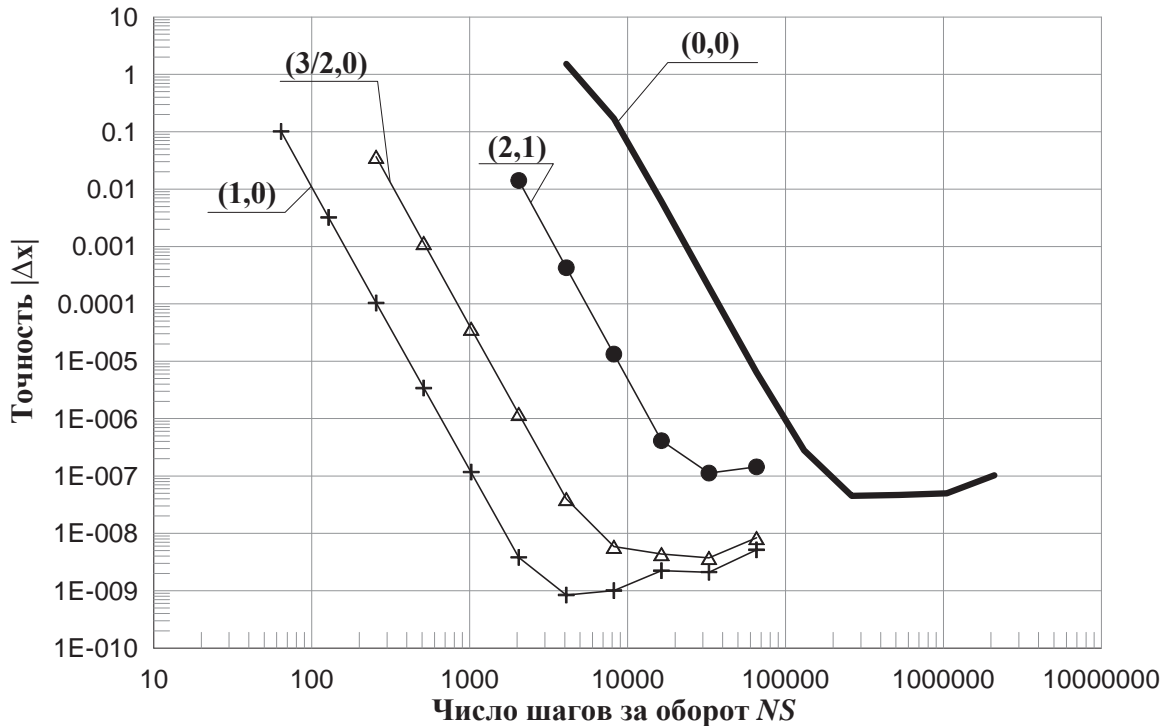


Рис. 2: Эффективность интегрирования уравнений движения в случае эллиптической орбиты ( $e = 0.9$ )

являются уравнения в прямоугольных координатах. В то же время точность решения для регулярных уравнений на 4–7 порядков выше, нежели для классических уравнений, а быстродействие — на 1–2 порядка. Между тем, эффективность регулярных уравнений принципиально разная: наивысшая эффективность имеет место для уравнений Шперлинга–Боде ( $n = 1$  и  $\alpha = 0$ ), тогда как наименее — для уравнений с параметрами  $n = 2$  и  $\alpha = 1$ .

Как известно [1], представленные уравнения (10), (11), (12) имеют стабилизирующий эффект, который приводит к улучшению поведения методической ошибки. Он достигается, главным образом, вследствие линеаризации, которая оказывается возможным в результате введения в уравнения интегральных соотношений. Как уже говорилось, классические уравнения неустойчивы по Ляпунову. На практике, при численном моделировании орбиты, это становится причиной квадратичного роста ошибки интегрирования [1]. Если же интегрируются устойчивые уравнения, ошибка ведет себя линейно, т.е. гораздо медленнее. Между тем, не трудно видеть, что уравнения Шперлинга–Боде для координат  $\mathbf{x}$  описы-

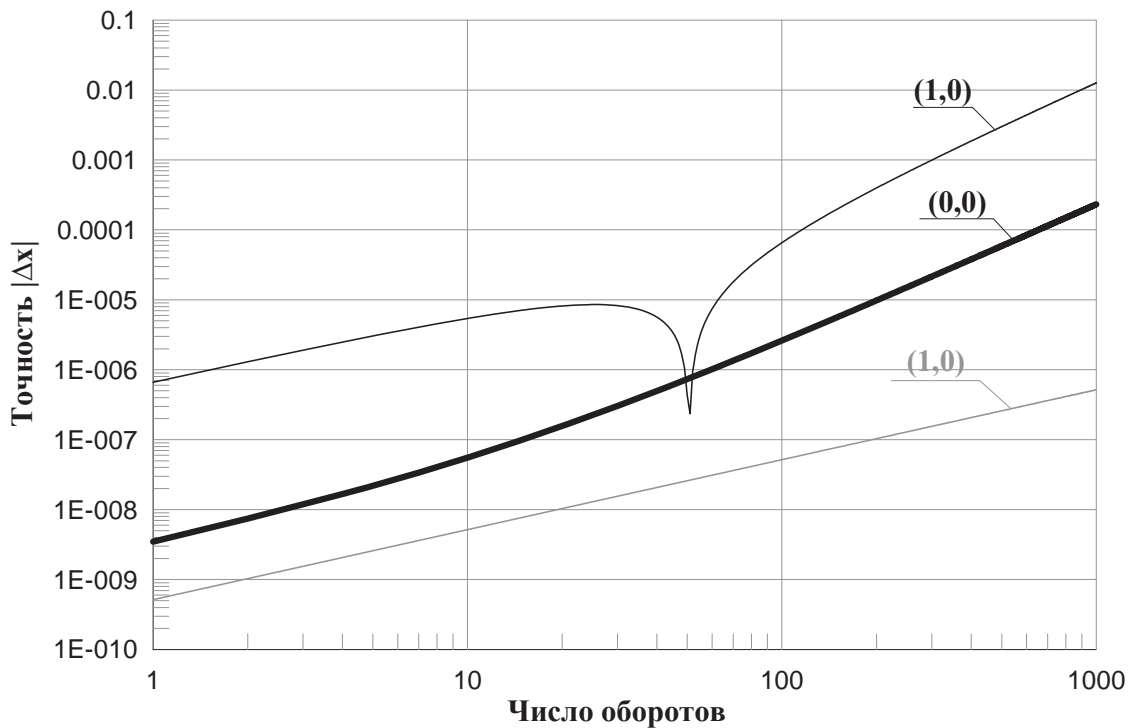


Рис. 3: Поведение ошибок для стабилизированных и нестабилизированных уравнений ( $e = 0$ ,  $NS = 512$ )

вают гармонический осциллятор. Решения таких уравнений устойчивы [2], за счет чего и достигается стабилизирующий эффект (см. рис. 3).

Однако, следует также заметить, что стабилизирующий эффект обусловлен еще и тем обстоятельством, что интегральные параметры в уравнениях рассматриваются как константы. В возмущенном движении они переменные и вычисляются путем численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений совместно с уравнениями движения. Общая система уравнений оказывается неустойчивой. Тем не менее эффект стабилизации все же сохраняется, и он тем выше, чем слабее возмущающие силы.

Чтобы оценить вклад стабилизации в полученных выше результатах, мы заменили интегральные параметры  $h$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $c^2$  их интегральными выражениями, и оценили потерю точности. После введения интегральных выражений характер поведения ошибки интегрирования принципиально изменился: рост ошибки стал квадратичным (см. рис. 3). В результате точность упала на несколько порядков.

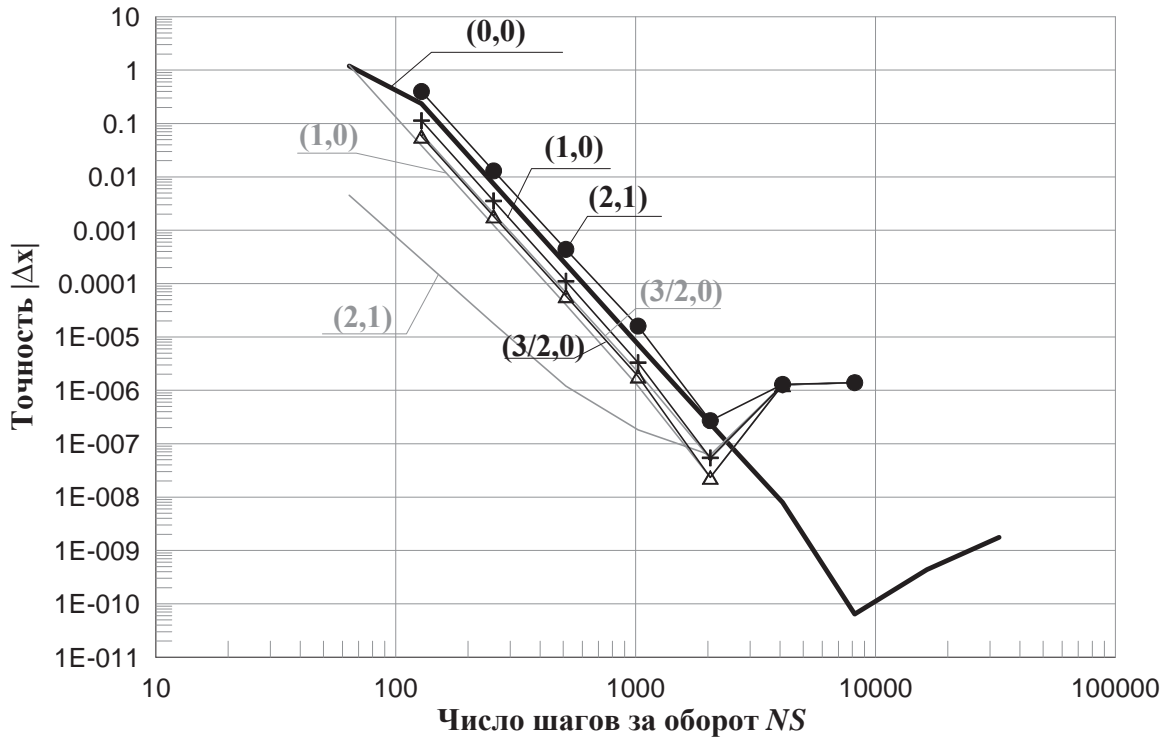


Рис. 4: Эффективность интегрирования уравнений после замены интегральных параметров интегральными выражениями для круговых орбит

На рис. 4 и 5 показано, насколько существенно упала эффективность уравнений после потери стабилизирующего эффекта. Здесь серым цветом также приведены результаты рис. 1 и 2. Эффективность регулярных уравнений при численном интегрировании круговой орбиты (рис. 4) стала почти сравнимой с эффективностью классических уравнений, поэтому использование первых в данном случае оказывается уже совершенно нецелесообразным.

Эффективность регулярных уравнений падает также и при интегрировании эллиптической орбиты. Тем не менее главным образом за счет регуляризирующего эффекта она остается еще достаточно высокой. В частности, точность понижается на 1–4 порядка, но она все же на 3–7 порядков остается выше точности интегрирования классических уравнений. Впрочем, заметим, что после введения интегральных выражений вычислительная точность для уравнений с параметрами  $n = 2$  и  $\alpha = 1$  упала значительно, почти на 2 порядка.

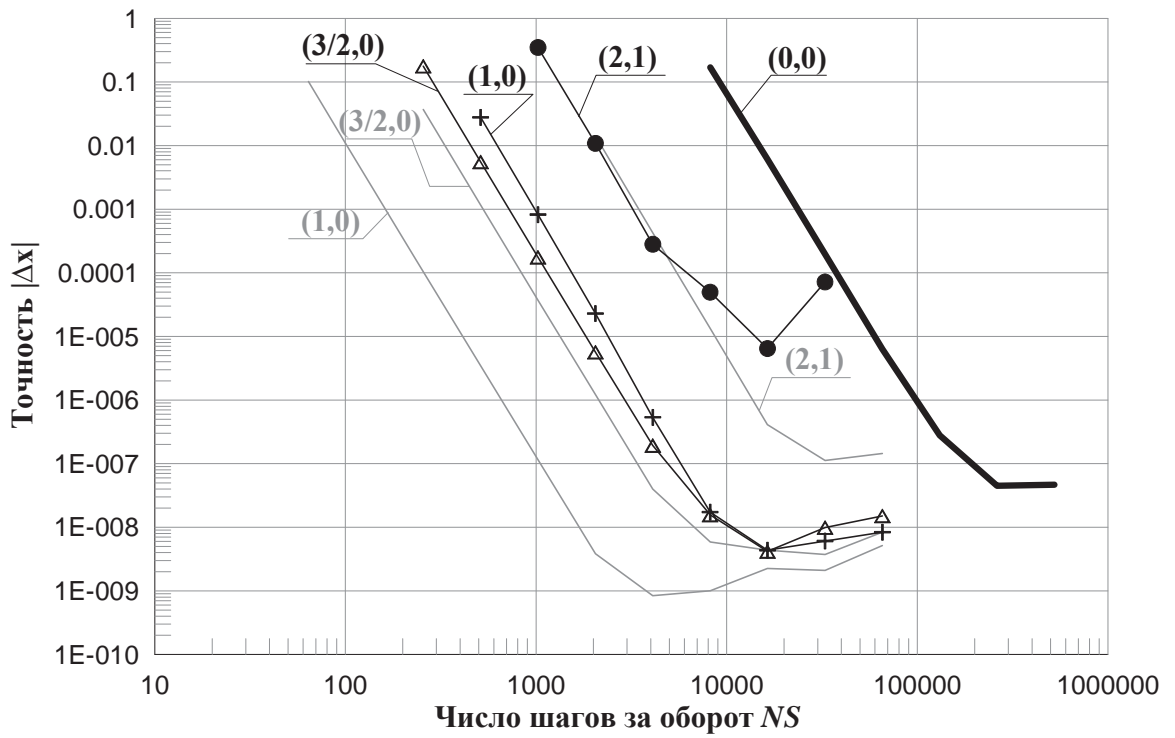


Рис. 5: Эффективность интегрирования уравнений после замены интегральных параметров интегральными выражениями для эллиптических орбит



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В итоге выполненной работы были получены следующие результаты.

1. Разработан программный комплекс на языке программирования Фортран 90 для исследования эффективности регулярных уравнений в рамках невозмущенной задачи двух тел.
2. Численно исследована эффективность некоторых регулярных уравнений, получаемых в результате временного и трехмерного координатного преобразований. Получены сравнительные характеристики эффективности регулярных и классических уравнений в случае численного моделирования круговых и эллиптических орбит.
3. Экспериментально показано, что наивысшая эффективность регуляризации и линеаризации достигается в случае высокоэксцентричных орбит. Используя регулярные уравнения, можно повысить точность и быстродействие на несколько порядков и более.
4. Исследован также стабилизирующий эффект регулярных и линейных уравнений. Показано, что при численном интегрировании вклад стабилизирующего эффекта существенен. В частности, при сохранении быстродействия он позволяет повысить точность численного интегрирования на несколько порядков.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

- [1] Avdyushev V. Numerical Stabilization of Orbital Motion // *Celest. Mech.* 2003. V. 87. I. 4. P. 383–409.
- [2] Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization // *J. Reine Angew. Math.* 1965. V. 218. P. 204–219.
- [3] Szebehely V. Linearization of Dynamical System Using Integrals of the Motion // *Celest. Mech.* 1976. V. 14. P. 499–508.
- [4] Шефер В.А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов // *Астрон. журн.* 1991. Т. 68. С. 197–205.
- [5] Хайпер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.