

УДК 517.9::519.6::52-323.8

В.А. АВДЮШЕВ, Д.В. ЛИТВИНОВ

ЭФФЕКТИВНОСТЬ СГЛАЖИВАЮЩИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СЛОЖНЫХ ОРБИТ¹

В работе представлены результаты исследования эффективности сглаживающих преобразований применительно к дифференциальным уравнениям орбитального движения. Даются рекомендации по использованию сглаживающих преобразований в невозмущенных и сильновозмущенных задачах орбитальной динамики.

Введение

При численном моделировании исследуемые орбиты небесных тел формализуются в виде дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно выбраны уравнения, поскольку от этого непосредственно зависят точность и быстродействие их интегрирования.

Классические уравнения орбитального движения имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P} = \mathbf{F} + \mathbf{P}.$$

где \mathbf{x} — вектор положения исследуемого небесного тела; μ — гравитационный параметр центрального тела; \mathbf{F} и \mathbf{P} — центральная и возмущающая силы соответственно.

Классические уравнения имеют особенность (сингулярность) в начале координат ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), поэтому притяжение центральной массы становится бесконечным в этой точке. Вследствие этого при численном интегрировании возникают следующие практические трудности.

1. В случае, когда частица достаточно близко подходит к центральной массе, можно говорить о почти соударении. Такое явление вызывает большие величины центральной силы и скорости. При численном моделировании, с тем чтобы сохранить методическую точность, это приводит к уменьшению шага интегрирования, что, в свою очередь, сопряжено с большим объемом вычислений.
2. В свою очередь, большие объемы вычислений и большие значения правых частей дифференциальных уравнений приводят к интенсивному накоплению ошибок округления в численных результатах, что может существенно исказить динамическую картину.

Разумеется, в гравитационной задаче сингулярности могут содержаться и в возмущающей составляющей \mathbf{P} , которые обусловлены силами притяжения других нецентральных массивных тел: планет или звезд, и они также вызывают названные трудности.

Проблема низкой эффективности численного интегрирования орбит при наличии тесных сближений с массивными телами успешно решается регуляризирующими преобразованиями [1]. Однако получаемые в результате регулярные уравнения оказываются достаточно сложными для программирования, и поэтому они довольно редко используются на практике. Другой более простой подход — это применение сглаживающих преобразований. В отличие от регуляризирующих преобразований, сглаживающие не полностью решают проблему, тем не менее они все же позволяют значительно повысить эффективность численного моделирования орбит. Цель представляемой работы как раз состояла в исследовании эффективности сглаживающих преобразований применительно к дифференциальным уравнениям орбитального движения.

1. Сглаживающие преобразования

Сглаживающие преобразования применяются к дифференциальным уравнениям, для того чтобы понизить скорость изменения величины их правых частей, что позволяет заметно повысить эффективность численного интегрирования, в особенности для сильно вытянутых эллиптических орбит, а также для орбит, имеющих тесные сближения с массивными телами.

Сглаживающие преобразования — это фактически временные преобразования, которые задаются посредством дифференциального соотношения [2]

$$dt = f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}) ds. \quad (1.1)$$

¹ Работа выполнена по заданию № 2.4024.2011 Министерства образования и науки Российской Федерации

Их применение предполагает переход к новой независимой переменной s , фиктивному времени, после чего уравнения движения принимают вид

$$\mathbf{x}'' = f^2(\mathbf{F} + \mathbf{P}) + f^{-1}f'\dot{\mathbf{x}}'.$$

Для приведения в соответствие координат \mathbf{x} с физическим временем t систему сглаженных уравнений необходимо дополнить уравнением $t' = f$.

Если же взятие производной f' затруднительно, прибегают к аналогичной системе уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}' = f\dot{\mathbf{x}}, \quad \dot{\mathbf{x}}' = f(\mathbf{F} + \mathbf{P}), \quad t' = f, \quad (1.2)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(0), \quad t_0 = t(0) \quad (s = 0).$$

При сближении с массивным телом величины $|\dot{\mathbf{x}}|$ и $|\mathbf{F} + \mathbf{P}|$ стремительно возрастают. Следовательно, для сглаживания величина f , согласно (1.2), должна подбираться таким образом, чтобы компенсировать (демпфировать) их быстрые изменения.

Очевидное неудобство в использовании сглаженных уравнений состоит в том, что физическое время является интегрируемой переменной. В этой связи возникает проблема выхода на заданный момент времени t , так как невозможно заранее, до численного интегрирования, точно установить соответствующий момент фиктивного времени s как независимой переменной. Проблема обычно разрешается путем реорганизации процесса численного интегрирования. Выход из интегратора на заданный момент физического времени осуществляется следующим образом.

Вместо фиктивного времени на каждом шаге интегрирования ведется контроль за физическим временем. Численное интегрирование выполняется в обычном режиме (с постоянной или переменной величиной шага Δs) до тех пор, пока заданный момент физического времени t не окажется внутри шага интегрирования, т.е. между моментами в начале и в конце шага. Далее величина шага Δs , согласно дифференциальному соотношению (1.1), выбирается по приближенной формуле $\Delta s = \Delta t / f$, где Δt — разность между заданным моментом физического времени и моментом на конце шага. Поскольку выбор Δs приближенный, его требуется повторить еще несколько раз, пока величина $|\Delta t|$ не станет пренебрежимо малой.

В небесно-механической практике широко используются сглаживающие преобразования, где в качестве f выбираются следующие величины: $|\mathbf{x}|$ (преобразование Сундмана [1]); $|\mathbf{x}|^{3/2}$; $|\mathbf{x}|^2$; $|\dot{\mathbf{x}}|^{-1}$. Для них в качестве независимой переменной s выступают независимые переменные: эксцентрическая, эллиптическая [3] и истинная аномалии, а также дуга орбиты [4] соответственно. Второе и третье преобразования, очевидно, можно рассматривать как обобщения преобразования Сундмана.

В астероидных задачах, где исследование орбиты астероида усложняется заметным влиянием от больших планет, например при тесных сближениях, можно использовать следующее преобразование [5]:

$$dt = \left(\sum_{i=0}^N \frac{M_i^\alpha}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^\beta} \right)^{-1} ds = f ds. \quad (1.3)$$

где α и β — параметры преобразования; N — число планет; M_i и \mathbf{x}_i — соответственно масса и вектор положения i -й планеты, причем масса Солнца $M_0 = 1$, а $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Интересно заметить, что при тесном сближении с k -й планетой ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k| \rightarrow 0$) $f \sim |\mathbf{x} - \mathbf{x}_k|^\beta$, поэтому временное преобразование (1.3) вырождается в преобразование сундмановского типа $dt = |\mathbf{x}|^\beta ds$ (если рассматривать планету как центральное тело).

2. Сглаженные уравнения для задачи двух тел

2.1. Постановка численного эксперимента

Для исследования эффективности сглаживающих преобразований, мы провели следующий численный эксперимент. Мы численно интегрировали эллиптические орбиты ($a = 1$, $\mu = 1$, $e = 0 - 0.95$) классическим методом Рунге–Кутты (4-го порядка) с постоянным шагом. Дифферен-

циальные уравнения эллиптического движения, к которым применялись сглаживающие преобразования, имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}.$$

Для них принимались начальные условия

$$x_{10} = 1 - e, \quad x_{20} = 0, \quad \dot{x}_{10} = 0, \quad \dot{x}_{20} = \sqrt{(1+e)/(1-e)}.$$

Орбиты моделировались на интервале 10 оборотов. За каждый оборот выполнялось 1024 шага. При этом оценивалась точность интегрирования $|\Delta\mathbf{x}|$ путем сравнения результатов \mathbf{x} с начальными данными \mathbf{x}_0 . Рассматривались три типа временных преобразований (1.1), а именно с $f = |\mathbf{x}|^\beta$, $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$ и $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$. В частности, при $\beta = 1$ независимая переменная s становится обобщенной эксцентрисической аномалией, физической и фазовой скоростью соответственно. При $\beta = 0$, очевидно, s — это физическое время во всех случаях.

Выше был описан общий подход для разрешения проблемы выхода на заданный момент физического времени. Однако в случае интегрирования эллиптических орбит эта проблема может быть решена иным способом. Поскольку интегрирование выполнялось за целое число оборотов, то достаточно было определить значение s , соответствующее одному обороту, а потом умножить его на заданное целое число. Между тем орбитальный период по фиктивному времени определялся как результат высокоточного численного решения дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dv} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dv} = \frac{1}{f} \frac{|\mathbf{x}|^2}{c}, \quad \text{где} \quad c = \sqrt{1-e^2}, \quad |\mathbf{x}| = \frac{c^2}{1+e \cos v}$$

с начальным условием $s(0) = 0$ для значения $v = 2\pi$. Здесь v — истинная аномалия, а c — величина момента количества движения. Величины скорости и ускорения для f также зависят от v через радиус-вектор $|\mathbf{x}|$:

$$|\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{2}{|\mathbf{x}|} - 1, \quad |\ddot{\mathbf{x}}| = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2}.$$

2.2. Анализ численных результатов

На рис. 2.1–2.3 показаны точности $\lg |\Delta\mathbf{x}|$ численного интегрирования эллиптических орбит. Строгий анализ результатов показывает, что невозможно выбрать оптимальный параметр β , который бы обеспечивал наивысшую точность для любого типа орбит. Единственное, что определенно можно сказать, так это то, что для умеренных эксцентриситетов, приблизительно до $e = 0.4$, применение преобразований $f = |\mathbf{x}|^\beta$ и $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$ не имеет смысла, поскольку они вообще не дают повышения эффективности.

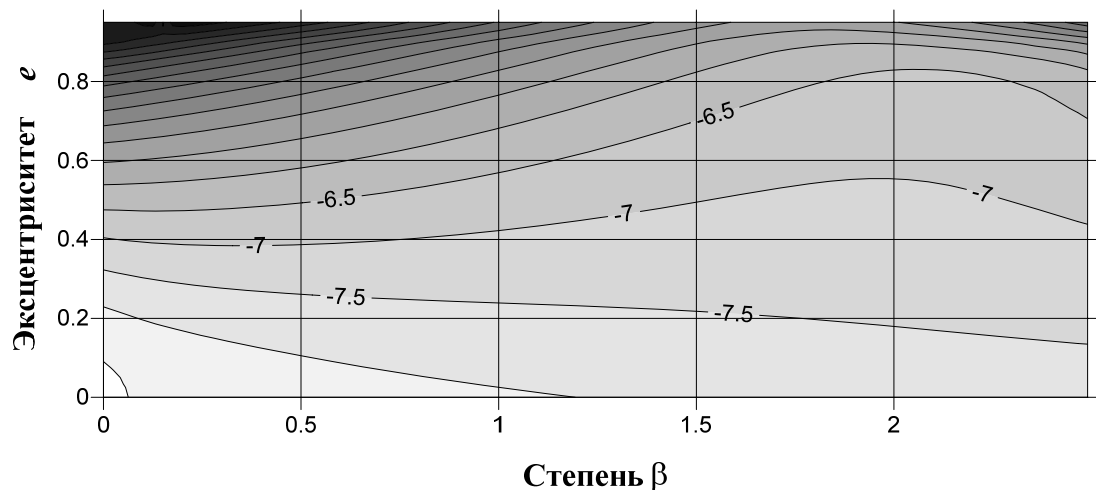
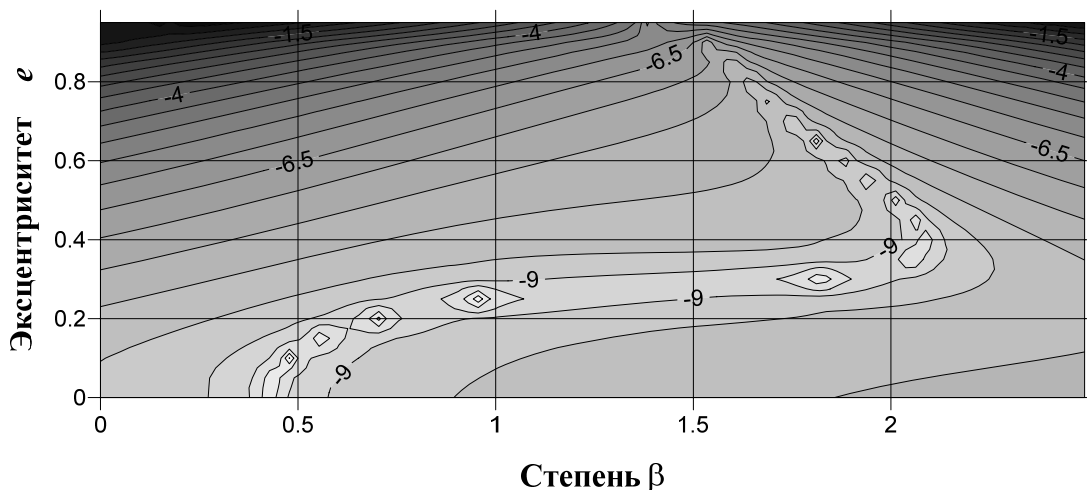
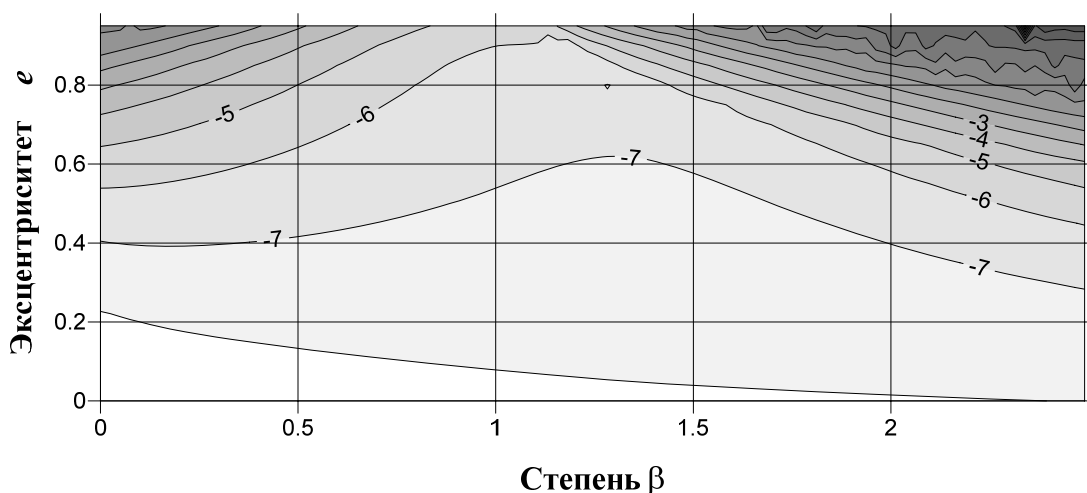


Рис. 2.1. Ошибка в векторе положения $\lg |\Delta\mathbf{x}|$ для $f = |\mathbf{x}|^\beta$.

Рис. 2.2. Ошибка в векторе положения $\lg |\Delta \mathbf{x}|$ для $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$.Рис. 2.3. Ошибка в векторе положения $\lg |\Delta \mathbf{x}|$ для $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$.

Следует также отметить одну особенность, которая может вызвать недоумение, а именно разная точность $\lg |\Delta \mathbf{x}|$ для $e = 0$ при разных значениях параметра β . Действительно, для круговых орбит сглаживающие преобразования не работают и, казалось бы, их применение не должно влиять на эффективность численного интегрирования, поскольку теоретически $f = \text{const}$. Тем не менее, дифференциальные уравнения, описывающие круговое движение, принципиально разные и на практике величина f как функция интегрируемых переменных вследствие ошибок не является постоянной, а потому точность интегрирования будет меняться в зависимости от выбираемых значений β .

Между тем нестрогий анализ результатов позволяет определиться в следующем выборе. При численном моделировании сильновытянутых орбит (т.е. когда имеются тесные сближения с центральным телом) следует рекомендовать: $\beta = 3/2$ для $f = |\mathbf{x}|^\beta$; $\beta = 1 - 3/2$ для $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$; $\beta = 3/4 - 1$ для $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$. Иначе говоря, эллиптическая аномалия в качестве независимой переменной — оптимальный выбор среди других аномалий и, кроме того, для эффективного сглаживания уравнений возможен выбор дуг физической и фазовой орбит ($\beta = 1$). Хотя, если учесть, что $(\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2} \sim |\mathbf{x}|^{2\beta}$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow 0$ (что, кстати, объясняет похожесть характеристик на рис. 2.1 и 2.3), то для последнего преобразования целесообразен выбор $\beta = 3/4$.

3. Сглаженные уравнения для ограниченной задачи трех тел

3.1. Постановка численного эксперимента

Эффективность сглаживающих преобразований была исследована также применительно к более сложным уравнениям, описывающим орбитальное движение тела A с пренебрежимо малой массой в гравитационном поле двух массивных тел: S_0 и S_1 , иначе говоря, к уравнениям (безразмерной) ограниченной плоской задачи трех тел (см. рис. 3.1).

Движение третьего тела A рассматривалось относительно первого тела S_0 в неподвижной системе координат. Причем второе тело S_1 вращается вокруг центрального S_0 по круговой кеплеровской орбите с радиусом $a_p = 1.5$. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_p}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{x}_p}{|\mathbf{x}_p|^3} \quad (3.1)$$

с начальными условиями

$$x_{10} = 1, \quad x_{20} = 0, \quad \dot{x}_{10} = 0, \quad \dot{x}_{20} = 1.$$

Здесь $\mu_p = 0.1$ — гравитационный параметр возмущающего тела S_1 ²; а \mathbf{x}_p — его вектор положения, вычисляемый по формулам кругового движения:

$$x_{p1} = a_p \cos n_p t, \quad x_{p2} = a_p \sin n_p t, \quad n_p = a_p^{-3/2}.$$

Движение моделировалось на интервале времени $\Delta t = 20\pi$. При этом имело место тесное сближение третьего тела со вторым при минимальном расстоянии $\min |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p| = 0.010$. Между тем минимальное расстояние до центрального (первого) тела составило $\min |\mathbf{x}| = 0.075$.

К уравнениям (3.1) применялись три сглаживающих преобразования: обобщенное преобразование Сундмана (1.3), а также преобразования с функциями $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$ и $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$. Чтобы получить для них характеристики точности, нам необходимо было обеспечить одинаковый объем вычислений. Для этого мы выбирали достаточно малый шаг Δs и предварительно выполняли интегрирование до тех пор, пока физическое время не становилось больше 20π . Таким образом, мы определяли значение s^* , приближенно соответствующее физическому времени $t = 20\pi$ ($t_0 = 0$). Затем получали новое значение $\Delta s = s^* / 1000$ и повторяли интегрирование с постоянной величиной шага Δs , выполняя 1000 шагов. После выполнялось еще несколько шагов, для того чтобы выйти точно на заданный момент времени.

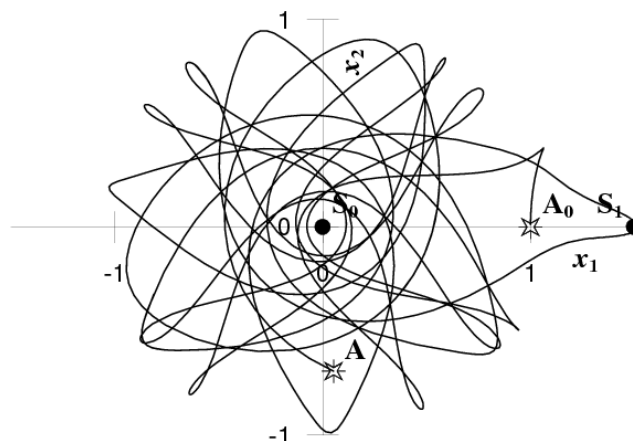


Рис. 3.1. Конфигурация орбиты третьего тела ограниченной задачи трех тел во вращающейся координатной системе

² Для центрального S_0 единичный гравитационный параметр.

3.2. Анализ численных результатов

Поиск оптимальных параметров α и β для преобразования (1.3) осуществлялся следующим образом. Зафиксировав параметр $\beta = 3/2$ (как оптимальный для невозмущенного случая), мы многократно численно интегрировали орбиту классическим методом Рунге–Кутты (4-го порядка) при различных значениях параметра α и оценивали ошибку $|\Delta \mathbf{x}|$ на конце временного интервала путем сравнения численных результатов интегрирования с эталонными значениями

$$x_1 = 1.923335964879851 \cdot 10^{-1}, \quad x_2 = 6.683260837576712 \cdot 10^{-1},$$

полученными методом Гаусса–Эверхарта 14-го порядка [6–9]. Зависимость точности интегрирования от параметра α приведена на рис. 3.2. Как видно из рисунка, оптимальным значением параметра является величина, близкая к единице. Однако для определенности в дальнейшем мы приняли $\alpha = 1$. Затем повторили эксперимент, но уже фиксировали принятый параметр $\alpha = 1$ и варьировали β . Результаты, представленные на рис. 3.3 показывают, что оптимальным значением параметра β , обеспечивающим наивысшую точность, как и в невозмущенном случае, является $3/2$.

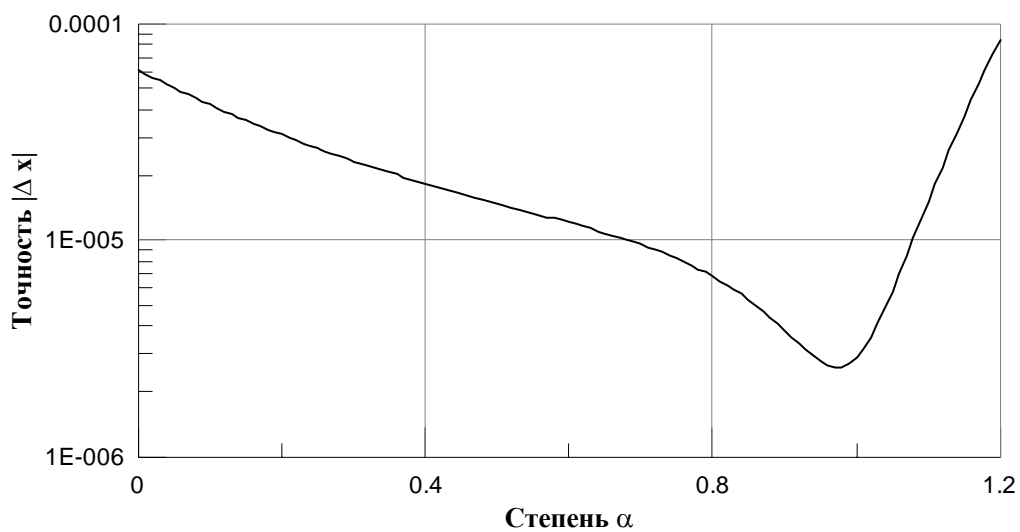


Рис. 3.2. Ошибка в векторе положения $|\Delta \mathbf{x}|$ для обобщенного преобразования Сундмана (1.3) при различных α ($\beta = 3/2$)

Что касается преобразований с функциями $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$ и $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$, то первое дало очень низкую эффективность для любых β , тогда как второе преобразование оказалось столь же хорошим как и (1.3). Наивысшая точность последнего достигается при значении параметра β , близком к $3/4$, почти как в случае интегрирования эллиптических орбит. Поскольку преобразование с функцией $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$ значительно проще (1.3) с точки зрения программной реализации, именно его при оптимальном параметре $\beta = 3/4$ можно рекомендовать в качестве сглаживающего для численного моделирования сложных орбит.

Чтобы оценить эффективность сглаживающих преобразований при численном интегрировании с переменным шагом, был проведен следующий численный эксперимент. Мы интегрировали дифференциальные уравнения описанной выше задачи методом Гаусса–Эверхарта 8-го порядка [9] для различных значений задаваемой локальной точности. Исследовались три системы уравнений: классическая и две сглаженных. Не рассматривались сглаженные уравнения с преобразованием $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$ как неэффективные при интегрировании с постоянным шагом. В то же время для преобразования (1.3) ($N = 1$, $M_0 = 1$, $M_1 = 0.1$) мы приняли $\alpha = 1$ и $\beta = 3/2$, поскольку именно при этих значениях параметров достигалась наивысшая эффективность в случае интегрирования с постоянным шагом. Значение параметра $\beta = 3/4$ для преобразования $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$ выбрано по той же причине.

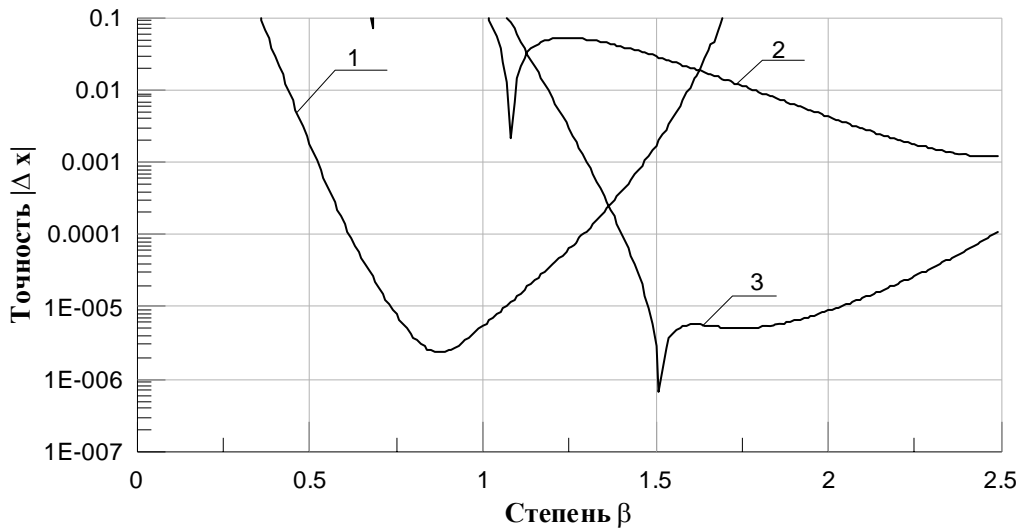


Рис. 3.3. Ошибка в векторе положения $|\Delta \mathbf{x}|$ для сглаживающих преобразований: 1) $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-\beta/2}$; 2) $f = |\dot{\mathbf{x}}|^{-\beta}$; 3) $f^{-1} = 1/|\mathbf{x}|^\beta + \mu_p/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^\beta$ ($\alpha = 1$)

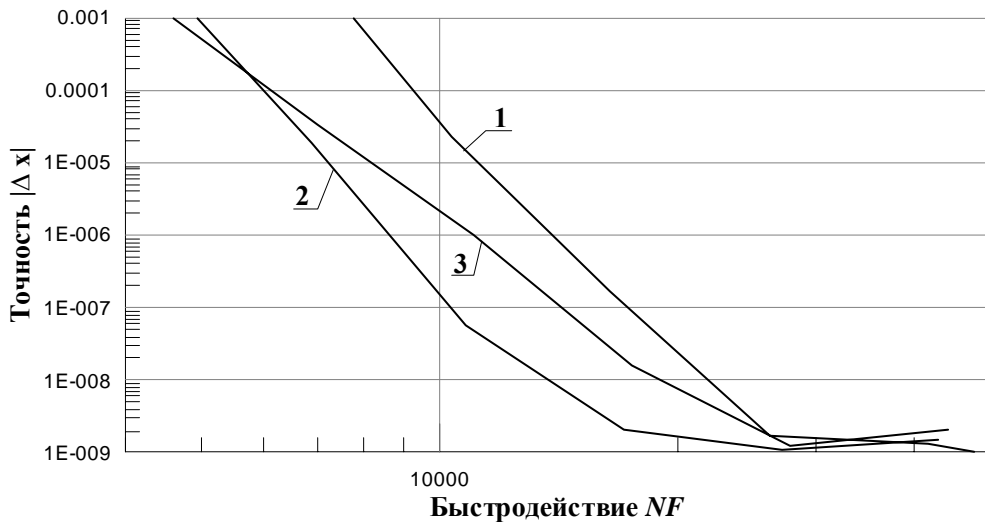


Рис. 3.4. Характеристики точность–быстродействие для сильновозмущенного случая при интегрировании с переменным шагом: 1) без преобразований; 2) $f^{-1} = 1/|\mathbf{x}|^{3/2} + \mu_p/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|^{3/2}$ ($\alpha = 1$ и $\beta = 3/2$); 3) $f = (\dot{\mathbf{x}}^2 + \ddot{\mathbf{x}}^2)^{-3/8}$

Точность интегрирования оценивалась также на момент $t = 20\pi$, однако в данном случае она вычислялась путем сравнения численных результатов с полученными тем же методом, но с более высокой (а именно на порядок) задаваемой точностью. В качестве показателя быстродействия было выбрано количество обращений к процедуре правых частей уравнений NF за временной интервал, на котором рассматривалось движение третьего тела. Поскольку метод Гаусса–Эверхарта неявный, то для нахождения численного решения на конце шага необходимо решать систему нелинейных уравнений [9] относительно приближенных решений внутри шага. Эта система решается итерационно. При интегрировании рассмотренных нами дифференциальных уравнений достаточно было трех итераций на шаге, чтобы обеспечить достаточно высокую методическую точность решения.

В частности мы получили характеристики точность–быстродействие, представленные на рис. 3.4. Как видно из рисунка, для сглаженных уравнений (при одинаковом быстродействии) точность выше на 1–2 порядка. С другой стороны, сглаженные уравнения позволяют повысить быстродействие (при сравнимой точности) почти в два раза. Наивысшая эффективность достигается для сглаженных уравнений на основе преобразования (1.3), которые, собственно, мы бы и рекомендовали для численного моделирования сложного орбитального движения.

Заключение

Таким образом, в итоге выполненной работы численно исследована эффективность некоторых сглаженных уравнений. Получены характеристики эффективности сглаженных и классических уравнений в случае численного моделирования кеплеровых орбит с разным эксцентриситетами и параметрами преобразования. Экспериментально показано, что наивысшая эффективность сглаженных уравнений достигается для высоко эксцентричных орбит ($e > 0.4$), в то время как для умеренно эксцентричных ($e = 0 - 0.4$) использование сглаживающих преобразований не только не улучшает эффективность, но порой даже ухудшает ее.

Эффективность сглаженных уравнений исследовалась также применительно к моделированию нерегулярного орбитального движения ограниченной задачи трех тел. При этом наивысшая эффективность достигается для модифицированных дифференциальных уравнений, сглаженных обобщенным преобразованием Сундмана (1.3) с параметрами $\alpha = 1$ и $\beta = 3/2$.

Наконец, на основе полученных результатов мы можем рекомендовать следующие преобразования. Если моделируется слабозмущенная, но сильно эллиптическая орбита, то в качестве независимой переменной для конструирования сглаженных дифференциальных уравнений следует выбирать эллиптическую либо истинную аномалию. Однако в сильновозмущенных задачах при наличии тесных сближений исследуемого тела с массивными телами мы бы рекомендовали сглаживающее преобразование с модифицированной фазовой дугой как независимой переменной, если интегрирование выполняется с постоянным шагом, либо преобразование (1.3), если шаг интегрирования переменный.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Kustaanheimo P., Stiefel E. Perturbation Theory of Kepler Motion Based on Spinor Regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
- [2] Baumgarte J., Stiefel E.L. Examples of Transformations Improving the Numerical Accuracy of the Integration of Differential Equations // Lect. Notes in Math. 1974. Vol. 362. P. 207–236.
- [3] Ferrándiz J.M., Ferrer S., Sein-Echaluce M.L. Generalized Elliptic Anomalies // Celest. Mech. 1987. Vol. 40. I. 3–4. P. 315–328.
- [4] Brumberg V.A., Brumberg E.V. Celestial Dynamics at High Eccentricities. Amsterdam: Gordon & Breach, 1999. 220 p.
- [5] Авдюшев В.А. Методы теории специальных возмущений. I. Принципы построения и обоснование к применению // Изв. вузов. Физика. 2006b. №12. С. 73–80.
- [6] Everhart E. A New Method for Integrating Orbits // Bulletin of the American Astronomical Society. 1973. Vol. 5. P. 389.
- [7] Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Celest. Mech. 1974. Vol. 10. P. 35–55.
- [8] Everhart E. An Efficient Integrator That Uses Gauss–Radau Spacings // Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11–15, 1984 / ed. by A. Carusi and G. B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library, 1985. Vol. 115. P. 185–202.
- [9] Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15. №4. С. 31–47.

V.A. AVDYUSHEV, D.V. LITVINOV

EFFICIENCY OF SMOOTHING TRANSFORMATIONS APPLIED TO NUMERICAL SIMULATION OF COMPLEX ORBITS

In the paper are discussed the results of an experiment on researching the efficiency of smoothing transformations applied to differential equations of orbital motion. Some recommendations are given on using the smoothing transformations in unperturbed and strongperturbed problems of orbital dynamics.