

Федеральное агентство по образованию  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (ТГУ)  
Физический факультет  
Кафедра астрономии и космической геодезии

УДК 521.1

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГАК  
Зав. кафедрой астрономии и  
космической геодезии  
проф. Бородовицына Т.В. \_\_\_\_\_  
” \_\_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2007 г.

**ДИПЛОМНАЯ РАБОТА**  
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ**  
**ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ**  
**СПУТНИКОВ ЮПИТЕРА**

**Красноперова Мария Александровна**

Научный руководитель  
к. ф.-м. н.  
Авдюшев В.А. \_\_\_\_\_  
Автор работы  
Красноперова М.А. \_\_\_\_\_

Томск 2007

# СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНИКОВОГО ДВИЖЕНИЯ	5
1.1 Дифференциальные уравнения движения спутников . . . . .	6
1.2 Влияние несферичности Юпитера . . . . .	7
1.3 Влияние Солнца . . . . .	9
1.4 Влияния галилеевых спутников . . . . .	9
1.5 Метод Эверхарта для численного интегрирования дифференциальных уравнений . . . . .	11
2 УПРОЩЕННЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ	13
2.1 Влияние короткопериодических возмущений на численное интегрирование. Возмущенный гармонический осциллятор. . . . .	13
2.2 Использование гауссовых колец . . . . .	15
2.2.1 Модель гауссова кольца . . . . .	15
2.2.2 Способы вычисления эллиптических функций . . . . .	17
2.3 Использование модифицированного гравитационного параметра . . . . .	18
2.4 Круговая модель движения галилеевых спутников . . . . .	19
3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	20
3.1 Оценка методической точности упрощенных моделей . . . . .	20
3.2 Исследование эффективности численного интегрирования при использовании упрощенных моделей . . . . .	22
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	25

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из главных возмущающих факторов в движении близких и далеких спутников Юпитера являются притяжения от галилеевых спутников, поэтому их учет при высокоточном динамическом моделировании названных объектов безусловно необходим. В то же время формализация влияния массивных спутников в численных моделях движения малых представителей спутниковой системы Юпитера сопряжена с двумя трудностями.

Первая трудность связана с чрезвычайной сложностью моделей движения галилеевых спутников, которые используются для определения их влияния при высокоточном моделировании других спутников Юпитера. Сложность используемой модели предполагает многочисленные вычисления, что ведет к существенному понижению быстродействия численного процесса. Так, при использовании высокоточных формул движения галилеевых спутников в орбитальной модели близкого спутника быстродействие моделирования падает в 10–15 раз.

Другая трудность имеет место при моделировании орбит далеких спутников. Своим влиянием галилеевы спутники вносят короткопериодические возмущения в орбиту далекого спутника. В свою очередь, численное интегрирование такой орбиты вследствие наличия в ней короткопериодических возмущений необходимо выполнять с малым шагом интегрирования, что также приводит к понижению быстродействия моделирования, даже несмотря на малость самих возмущений от галилеевых спутников. Эта проблема порой становится настолько актуальной, что учет влияния от массивных спутников может понижать быстродействие в несколько десятков раз.

Проблема короткопериодических возмущений разрешается, как правило, двумя способами. Первый способ основан на том, что массы массивных объектов включаются в массу планеты [1, 2], во втором же способе влияние от близких объектов моделируется с помощью так называемых гауссовых колец [3, 4]. Оба способа приводят к упрощенным уравнениям движения: в первом это — возмущенные уравнения задачи двух тел с модифицированным гравитационным параметром, во втором — уравнения, получаемые путем усреднения Гаусса [5]. Последние представляют

спутниковое движение точнее, нежели первые. Хотя в то же время усредненные уравнения гораздо сложнее.

В данной работе на примере одного близкого и двух далеких спутников (Амальтея, Гималия, Этне) исследуется точность спутниковых моделей, основанных на упрощенных уравнениях движения, а также оценивается быстродействие этих моделей. Кроме того, исследована эффективность динамических моделей спутников, основанных на использовании упрощенной теории Лиске [6], в которой движение галилеевых спутников определяется по формулам кругового движения. Получаемые в работе результаты позволяют ответить на вопрос о возможности применения упрощенных моделей для адекватного (в соответствии с точностью наблюдений) описания движения близких и далеких спутников.

В первом разделе дипломной работы описывается численная модель спутникового движения. Во втором разделе формулируется проблема короткопериодических возмущений, а также предлагаются различные подходы для разрешения проблемы, возникающей в задачах динамики далеких спутников, орбиты которых содержат короткопериодические возмущения, вызванные гравитационным влиянием галилеевых спутников. В третьем разделе на примере спутников Амальтея, Гималия и Этне исследуются методическая точность и быстродействие моделей движения спутников, в которых используются различные формы представления движения галилеевых спутников. В заключении перечисляются основные результаты, полученные в работе.

# 1 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНИКОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Спутник Амальтея (JV) — типичный представитель близких (внутренних) спутников Юпитера. Он движется по почти круговой йовиэкваториальной орбите в мощном гравитационном поле Юпитера (рис. 1). Ввиду близости спутника к планете его частота обращения очень высокая и соответствующий период составляет 0.5 сут. Основными возмущающими факторами в движении близкого спутника являются гравитационное влияние от несферичности Юпитера и притяжение от галилеевых спутников, тогда как влияние от Солнца довольно мало.

Гималия (JVI) является далеким спутником. Ввиду удаленности от планеты и сильного возмущения от Солнца его орбита нерегулярна и имеет достаточно большой период (рис. 2).

Этне (JXXXI) — новый далекий спутник, который был открыт в 2001 г. Как и Гималия, он имеет нерегулярную орбиту, но поскольку Этне находится гораздо дальше от Юпитера, его период обращения гораздо больше и орбита спутника сильнее возмущается Солнцем (рис. 2).

Влияние галилеевых спутников на далекие существенно меньше, чем на близкие, однако короткопериодическое влияние со стороны массивных спутников влечет малые вековые возмущения в орбите, которые со временем, очевидно, увеличиваются. Поэтому при моделировании движения далеких спутников, влияние галилеевых спутников следует учитывать.

Численные оценки влияния возмущающих факторов на движение Амальтеи, Гималии и Этне представлены на рис. 3–5.

Таблица 1: Орбитальные параметры спутников

Спутник	год откр.	$a$ (тыс. км.)	$e$	$i$ (°)	$T$ (сут.)
Амальтея JV	1892	181	0.003	0.3	0.5
Гималия JVI	1904	11480	0.166	30.2	247.8
Этне JXXXI	2001	23043	0.264	165.0	730.18

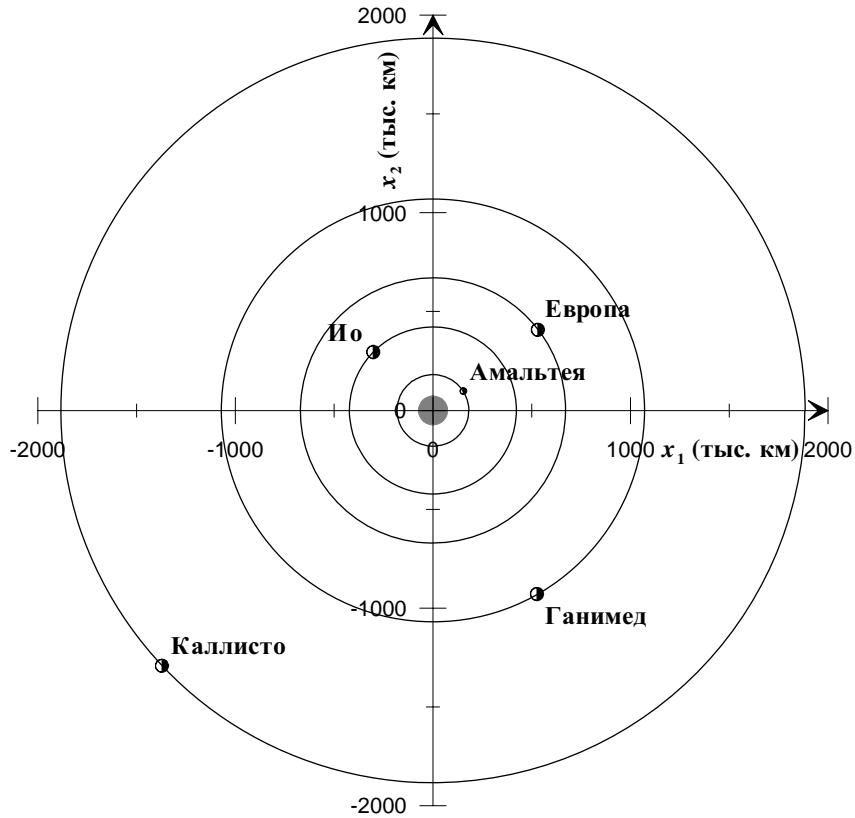


Рис. 1: Орбиты галилеевых спутников и Амальтеи

## 1.1 Дифференциальные уравнения движения спутников

Будем рассматривать движение спутника с пренебрежимо малой массой в поле тяготения центральной планеты под действием других массивных материальных тел относительно йовицентрической геоэкваториальной координатной системы на стандартную эпоху J2000. Тогда дифференциальные уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{P} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — вектор положения,  $t$  — физическое время,  $\mu$  — гравитационный параметр Юпитера,  $r = |\mathbf{x}|$  — радиус-вектор,  $V = V(\mathbf{x})$  — возмущающая потенциальная функция гравитационного поля Юпитера,  $\mathbf{P}$  — неконсервативные силы (силы притяжения от галилеевых спутников и Солнца).

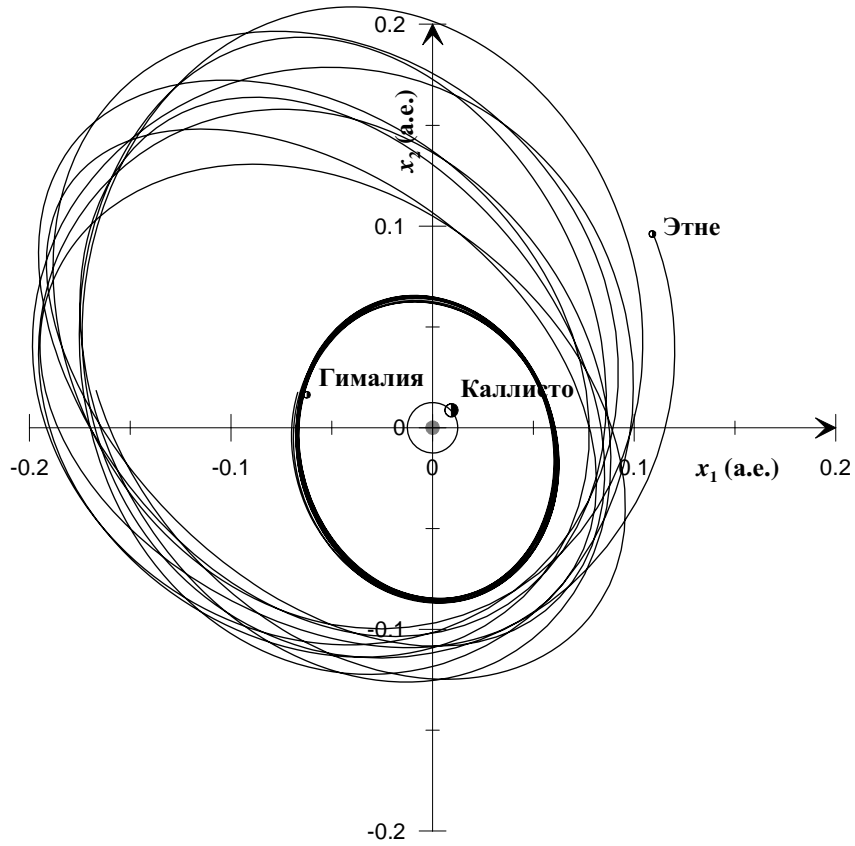


Рис. 2: Орбиты Гималии, Этне и галилеевого спутника Каллисто

## 1.2 Влияние несферичности Юпитера

В модели движения спутника влияние несферичности центральной планеты учитывалось до шестой зональной гармоники [7]:

$$V = -\frac{\mu}{r} \sum_{i=2,3,4,6} J_i \left( \frac{b_J}{r} \right)^i L_i(\sin \phi), \quad (2)$$

где  $b_J$  — экваториальный радиус Юпитера;  $\phi$  — широта спутника относительно экватора Юпитера;  $J_i$  — коэффициенты зональных гармоник (табл. 2);  $L_i$  — полиномы Лежандра. Кроме того, при вычислении  $\phi$  учитывалась прецессия экватора Юпитера [8]. Параметры гравитационного поля Юпитера были взяты из теории Лиске [6].

Полиномы Лежандра вычислялись по формулам:

$$\begin{aligned} L_2(z) &= \frac{1}{2}(-1 + 3z^2), \\ L_3(z) &= \frac{1}{2}(-3z + 5z^3), \\ L_4(z) &= \frac{1}{8}(3 - 30z^2 + 35z^4), \end{aligned}$$

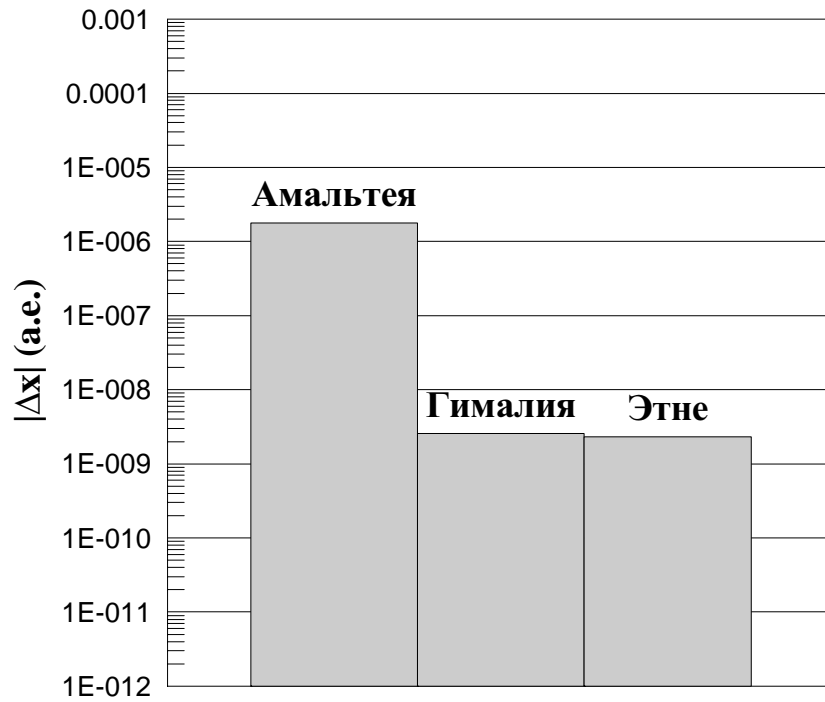


Рис. 3: Оценки влияния несферичности Юпитера на движение спутников

$$L_6(z) = \frac{1}{16}(-5 + 105z^2 - 315z^4 + 231z^6).$$

Синус широты можно выразить как

$$\sin \phi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},$$

где  $\mathbf{a}$  — орта оси аппликат йовиэкваториальной системы координат, которая определяется третьей строкой ортогональной матрицы перехода от гео- к йовиэкваториальной координатной системе.

Таблица 2: Параметры гравитационного поля Юпитера

Параметр	Значение
$b_J$	71398 (км)
$J_2$	$1.4736 \cdot 10^{-2}$
$J_3$	$1.40 \cdot 10^{-6}$
$J_4$	$-5.87 \cdot 10^{-4}$
$J_6$	$3.10 \cdot 10^{-5}$



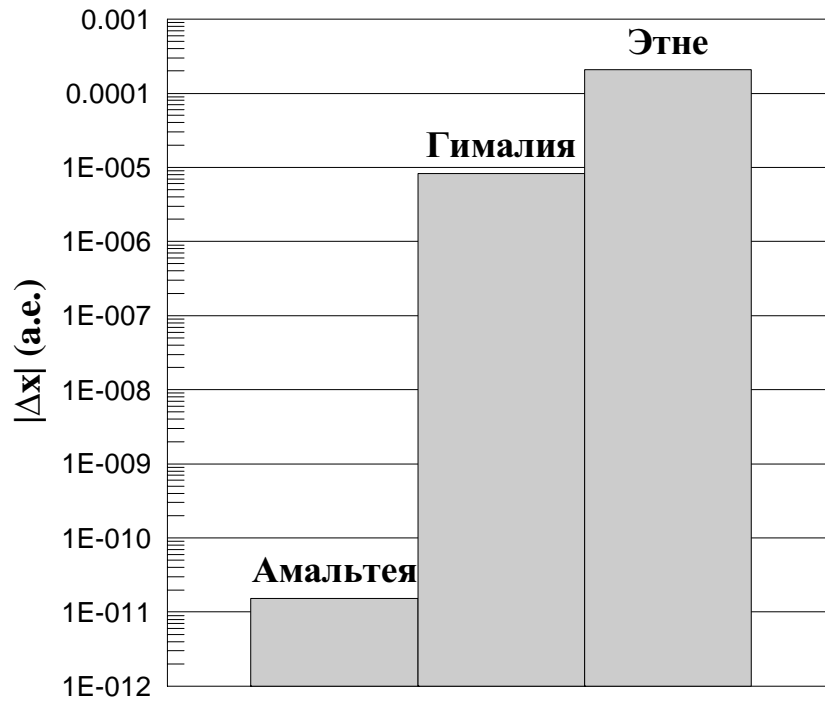


Рис. 4: Оценки влияния притяжения Солнца на движение спутников

### 1.3 Влияние Солнца

Ввиду достаточной удаленности Солнца от исследуемых объектов в модели оно рассматривается как точечная масса, а его гравитационное влияние на спутник вычисляется по формуле:

$$\mathbf{P}_S = \mu_S \left( \frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_S}{|\mathbf{x}_S|^3} \right), \quad (3)$$

где  $\mu_S$  — гравитационный параметр Солнца ( $\mu_S/\mu = 1047.56545$ ),  $\mathbf{x}_S$  — положение возмущающего тела в йовицентрической системе координат. Координаты Солнца  $\mathbf{x}_S$  вычислялись из фонда DE405 [9].

### 1.4 Влияния галилеевых спутников

В численных моделях для определения положений галилеевых спутников с целью учета их влияния на моделируемую орбиту можно совместно интегрировать уравнения движения спутников. Однако, очевидно, что при этом система интегрируемых уравнений существенно усложняется. Поэтому, как правило, на практике прибегают к аналитическим теориям движения галилеевых спутников, разработанным другими авторами

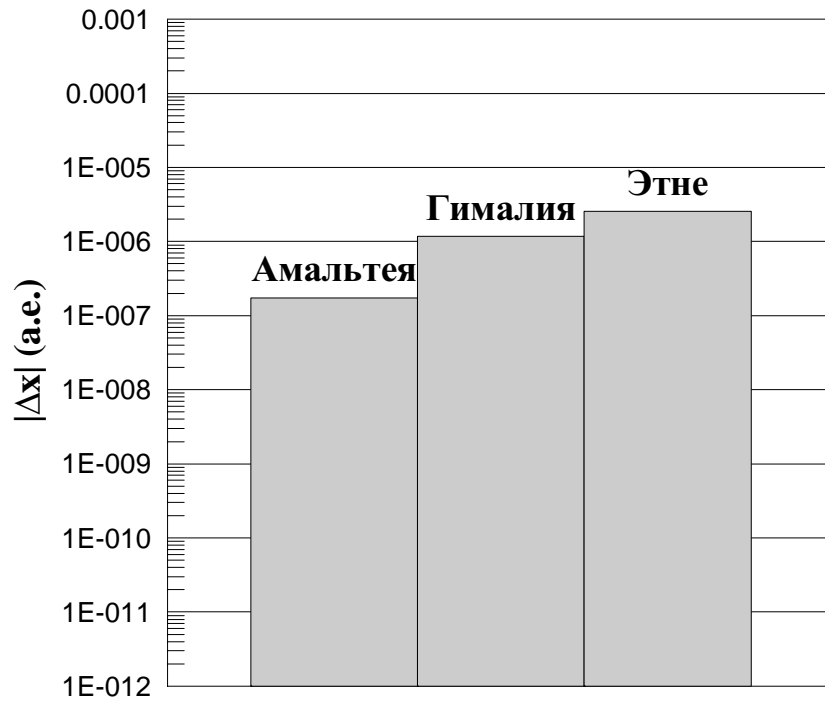


Рис. 5: Оценки влияния притяжения галилеевых спутников на движение других спутников

[6, 10, 11], что освобождает исследователя от решения самостоятельной довольно сложной задачи, не имеющего непосредственного отношения к моделированию исследуемых орбит.

Галилеевы спутники — самые массивные спутники Юпитера. Они движутся по почти круговым орбитам вблизи плоскости экватора планеты. Движение галилеевых спутников подвержено влиянию несферичности планеты, притяжению Солнца и взаимному притяжению.

Для галилеевых спутников в основном разрабатывались аналитические теории движения. Так как галилеевы спутники относительно яркие, то их наблюдения являются наиболее точными, а количество наблюдений достигает десятков тысяч. Аналитические теории движения получаются весьма сложными, поскольку приходится учитывать возмущения от разных факторов.

Моделирование движения галилеевых спутников Юпитера является одной из наиболее сложных проблем динамики тел Солнечной системы. В 1921 г. Сэмпсон [10] опубликовал полуаналитическую теорию их движения. Эта теория была уточнена и запрограммирована Ву и Сэгниер (1970) и обновлена Лиске (1998) [6] путем добавлением новых членов

в формулах теории. В 2004 г. была построена новая теория Лейни [11], основанная на частотном анализе результатов численного интегрирования. Эти три теории построены разными методами в разное время разными авторами, но имеют примерно одинаковые точности. Можно полагать, что на интервале времени 1800–2000 гг. теория Лейни немного точнее, чем другие, так как использует более полную базу данных наблюдений.

В нашей работе для моделирования влияния галилеевых спутников использовалась формула (3), где положения галилеевых спутников  $\mathbf{x}_S$  вычислялись по теории Лейни, которая хорошо адаптирована для ее применения к численному моделированию.

## 1.5 Метод Эверхарта для численного интегрирования дифференциальных уравнений

Для интегрирования дифференциальных уравнений мы использовали широко применяемый на практике метод Эверхарта 15-го порядка [12].

Пусть имеем задачу Коши:

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}), \quad \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0.$$

Согласно методу Эверхарта 15-го порядка решение на шаге  $h$  будет

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{Q}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7 \right),$$

где  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_7$  определяются как

$$\mathbf{A}_1 = c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + c_{71}\boldsymbol{\alpha}_7,$$

$$\mathbf{A}_2 = c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + c_{72}\boldsymbol{\alpha}_7,$$

...

$$\mathbf{A}_7 = c_{77}\boldsymbol{\alpha}_7.$$

Коэффициенты  $c_{ij}$  являются числами Стирлинга, которые вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, && \text{(диагональ)} \\ c_{i1} &= -\tau_{i-1}c_{i-1,1}, && (i > 1) \quad \text{(первая строка)} \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - \tau_{i-1}c_{i-1,j}, && (i > j > 1) \end{aligned}$$

где  $\tau_i = (t_i - t_0)/h \in [0, 1]$  — разбиение на шаге. В свою очередь,  $\alpha_1, \dots, \alpha_7$  получаем из соотношений

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}_0)/\tau_1, \\ \alpha_2 &= ((\mathbf{Q}_2 - \mathbf{Q}_0)/\tau_2 - \alpha_1)/(\tau_2 - \tau_1), \\ \alpha_3 &= (((\mathbf{Q}_3 - \mathbf{Q}_0)/\tau_3 - \alpha_1)/(\tau_3 - \tau_1) - \alpha_2)/(\tau_3 - \tau_2), \\ &\dots\end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q}_0, \dots, \mathbf{Q}_7$  вычисляются для  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_7$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{Q}_0\tau_1 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_1^2 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7\tau_1^8 \right), \\ &\dots \\ \mathbf{q}_7 &= \mathbf{q}_0 + h \left( \mathbf{Q}_0\tau_7 + \frac{1}{2}\mathbf{A}_1\tau_7^2 + \dots + \frac{1}{8}\mathbf{A}_7\tau_7^8 \right).\end{aligned}$$

Не трудно видеть, что алгоритм интегрирования неявный. Поэтому решение на шаге ищется итерационным способом. В начале интегрирования  $\alpha_i$  равны нулю. Определяем  $\mathbf{q}_1$ , по которому вычисляем  $\alpha_1$  и улучшаем значение  $\mathbf{A}_1$ . Далее определяем  $\mathbf{q}_2$  с учетом  $\mathbf{A}_1$  и находим улучшенные значения  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  и так далее до сходимости процесса.

Для произвольного разбиения  $\tau_1, \dots, \tau_7$  метод, вообще говоря, имеет 8 порядок. Однако его можно повысить до 15, если в качестве величин  $\tau_i$  использовать корни многочлена

$$d_1 + d_2\tau + d_3\tau^2 + \dots + \tau^7 = 0,$$

где коэффициенты  $d_1, \dots, d_7$  представляют собой решение системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{3} + \frac{d_3}{4} + \frac{1}{5} &= 0, \\ \dots \\ \frac{d_1}{7} + \frac{d_2}{8} + \frac{d_3}{9} + \frac{1}{10} &= 0.\end{aligned}$$

В методе Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена. Каждый следующий шаг  $\bar{h}$  выбирается по формуле

$$\bar{h} = h\tau = h \left( \frac{k+1 \|\mathbf{e}_{tol}\|}{h \|\mathbf{A}_k\|} \right)^{\frac{1}{k+1}},$$

где  $\|\mathbf{e}_{tol}\|$  — заданная точность.

## 2 УПРОЩЕННЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЛИЯНИЯ ГАЛИЛЕЕВЫХ СПУТНИКОВ

### 2.1 Влияние короткопериодических возмущений на численное интегрирование. Возмущенный гармонический осциллятор.

Как уже говорилось выше, одной из главных проблем в моделировании движения далеких спутников является проблема понижения быстродействия численного интегрирования вследствие влияния короткопериодических возмущений от галилеевых спутников. На простом примере возмущенного гармонического осциллятора мы хотели бы показать, как короткопериодические возмущения влияют на быстродействие численного интегрирования.

Рассмотрим слабозвозмущенный гармонический осциллятор вида

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + u_1 = -\varepsilon \cos nt, \quad \frac{d^2 u_2}{dt^2} + u_2 = -\varepsilon \sin nt; \quad (4)$$

с начальными условиями<sup>1</sup>

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_2'(0) = 1 + \varepsilon/(n + 1). \quad (5)$$

Здесь  $u_1, u_2$  — интегрируемые переменные,  $t$  — независимая переменная,  $\varepsilon < 1$  — малый параметр,  $n > 1$  — частота короткопериодических возмущений.

В соответствии с (5) уравнения (4) будут иметь решение

$$u_1 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n^2 - 1}\right) \cos t + \frac{\varepsilon}{n^2 - 1} \cos nt,$$
$$u_2 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{n^2 - 1}\right) \sin t + \frac{\varepsilon}{n^2 - 1} \sin nt. \quad (6)$$

В частности, из решения видно, что вклад короткопериодических возмущений тем меньше, чем выше частота  $n$ .

---

<sup>1</sup>Такие условия выбраны нами лишь из соображения эстетичности оценок, которые мы собираемся получить ниже.

Предположим теперь, что мы интегрируем уравнения (4) численно методом Тейлора  $N$ -го порядка, причем  $N > 1$ . Оценим ошибку интегрирования по первым отброшенным членам ряда Тейлора:

$$\Delta u = \frac{1}{(N+1)!} \sqrt{\left[u_1^{(N+1)}\right]^2 + \left[u_2^{(N+1)}\right]^2} \Delta t^{N+1}, \quad (7)$$

где  $\Delta t$  — шаг интегрирования.

Подставим (6) в (7). Тогда для достаточно больших  $n$ :

$$n > \frac{1}{\sqrt[N-1]{\varepsilon}}, \quad (8)$$

будем иметь

$$\Delta u \sim \frac{\Delta t^{N+1}}{(N+1)!} \varepsilon n^{N-1}. \quad (9)$$

В невозмущенном случае ( $\varepsilon = 0$ ) ошибка будет

$$\Delta u_{\varepsilon=0} = \frac{\Delta t_{\varepsilon=0}^{N+1}}{(N+1)!}. \quad (10)$$

Следовательно, для того чтобы интегрирование в возмущенном случае выполнялось с той же точностью, что и в невозмущенном, шаг интегрирования  $\Delta t$  должен выбираться в соответствии с оценкой

$$\frac{\Delta t_{\varepsilon=0}}{\Delta t} \sim \varepsilon^{\frac{1}{N+1}} n^{\frac{N-1}{N+1}}. \quad (11)$$

Оценка (11) показывает, что при выполнении условия (8) быстродействие численного интегрирования будет определяться частотой короткопериодических возмущений: чем выше частота, тем меньше шаг интегрирования, а, следовательно, тем ниже быстродействие пошагового процесса. Кроме того, следует заметить, что эта ситуация усугубляется с повышением порядка  $N$  численного метода: правая часть (11) становится почти линейной функцией относительно  $n$ , а коэффициент  $\sqrt[N+1]{\varepsilon}$  устремляется к единице. Таким образом, несмотря на ничтожную роль высокочастотных возмущений в решении (6), их значимость с точки зрения численного интегрирования становится весьма существенной.

Уравнения (4) являются предельно упрощенным аналогом уравнений орбитального движения. Хотя именно простота гармонического осциллятора позволяет нам прояснить парадоксальную и злополучную природу малых высокочастотных возмущений, с которой часто приходится сталкиваться на практике при численном интегрировании орбит.

## 2.2 Использование гауссовых колец

Одним из способов сглаживания орбиты с короткопериодическими возмущениями можно рассматривать метод усреднения Гаусса [5]. В результате преобразования Гаусса в модели сил влияние от быстро движущихся объектов заменяется влиянием от так называемого гравитирующего гауссова кольца (эллипса). Таким образом, из моделируемой орбиты удастся исключить короткопериодические возмущения от близкого объекта. Очевидно, что такой способ приводит к потере точности, однако вследствие учета вековых возмущений ошибки модели остаются малыми на достаточно длительных интервалах времени.

На рис. 6 и 7 на примере далекого спутника Гималия представлены расхождения элементов, полученных по усредненной и полной моделям. Как видно из рисунков, отклонения в элементах  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\omega$  и  $\Omega$  малы и ограничены, что говорит об учете в усредненной модели основных вековых возмущений, которые содержатся, главным образом, в  $\omega$  и  $\Omega$ . Однако, в средней аномалии на начальную эпоху  $M_0$  имеет место линейное расхождение в элементах, что связано с неучтенными в усредненной модели вековыми эффектами в быстрой переменной, определяющей положение объекта на орбите [13].

### 2.2.1 Модель гауссова кольца

Будем полагать, что орбита возмущающего тела есть окружность, лежащая в основной плоскости координатной системы. Тогда соответствующее кольцо Гаусса — это однородное круглое кольцо, силовая функция которого имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{x}) = \mu_P \frac{K(\kappa)}{\sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2}}, \quad (12)$$

$$K(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \kappa^2 = \frac{4a_P \rho}{x_3^2 + (\rho + a_P)^2},$$

где  $\mu_P$  — гравитационная постоянная планеты;  $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ;  $a_P$  — радиус кольца;  $K(\kappa)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

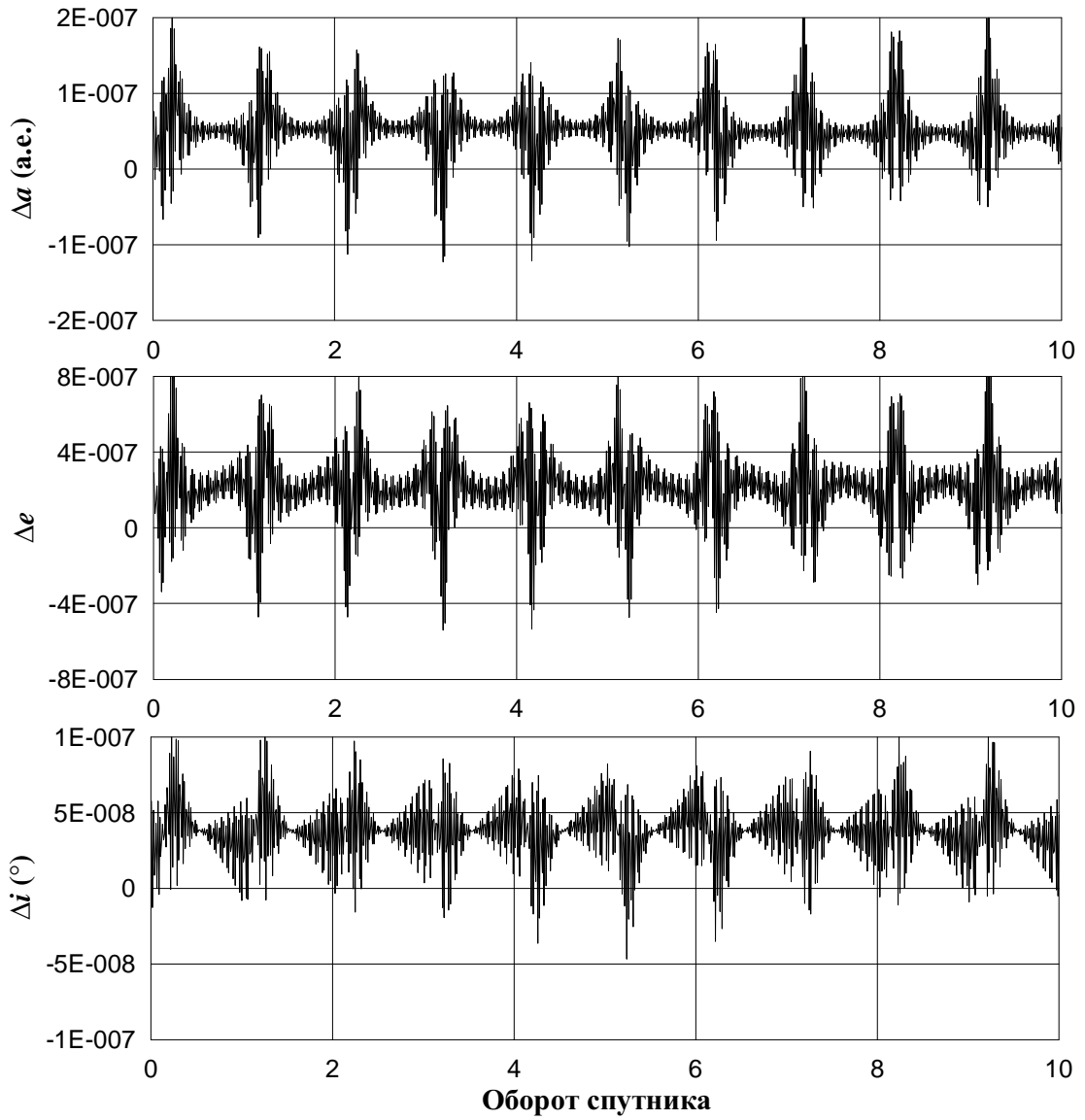


Рис. 6: Возмущения в позиционных переменных  $a, e, i$

Дифференцируя  $U$  по  $\rho$  и  $x_3$ , будем иметь

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{\mu_P}{2\rho\sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2}} \left[ \frac{x_3^2 + a_P^2 - \rho^2}{x_3^2 + (\rho - a_P)^2} E(\kappa) - K(\kappa) \right]$$

и

$$P_3 = \frac{\partial U}{\partial x_3} = -\frac{\mu_P x_3 E(\kappa)}{\sqrt{x_3^2 + (\rho + a_P)^2} \sqrt{x_3^2 + (\rho - a_P)^2}}, \quad (13)$$

где  $E(\kappa)$  обозначает полный эллиптический интеграл второго рода

$$E(\kappa) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$



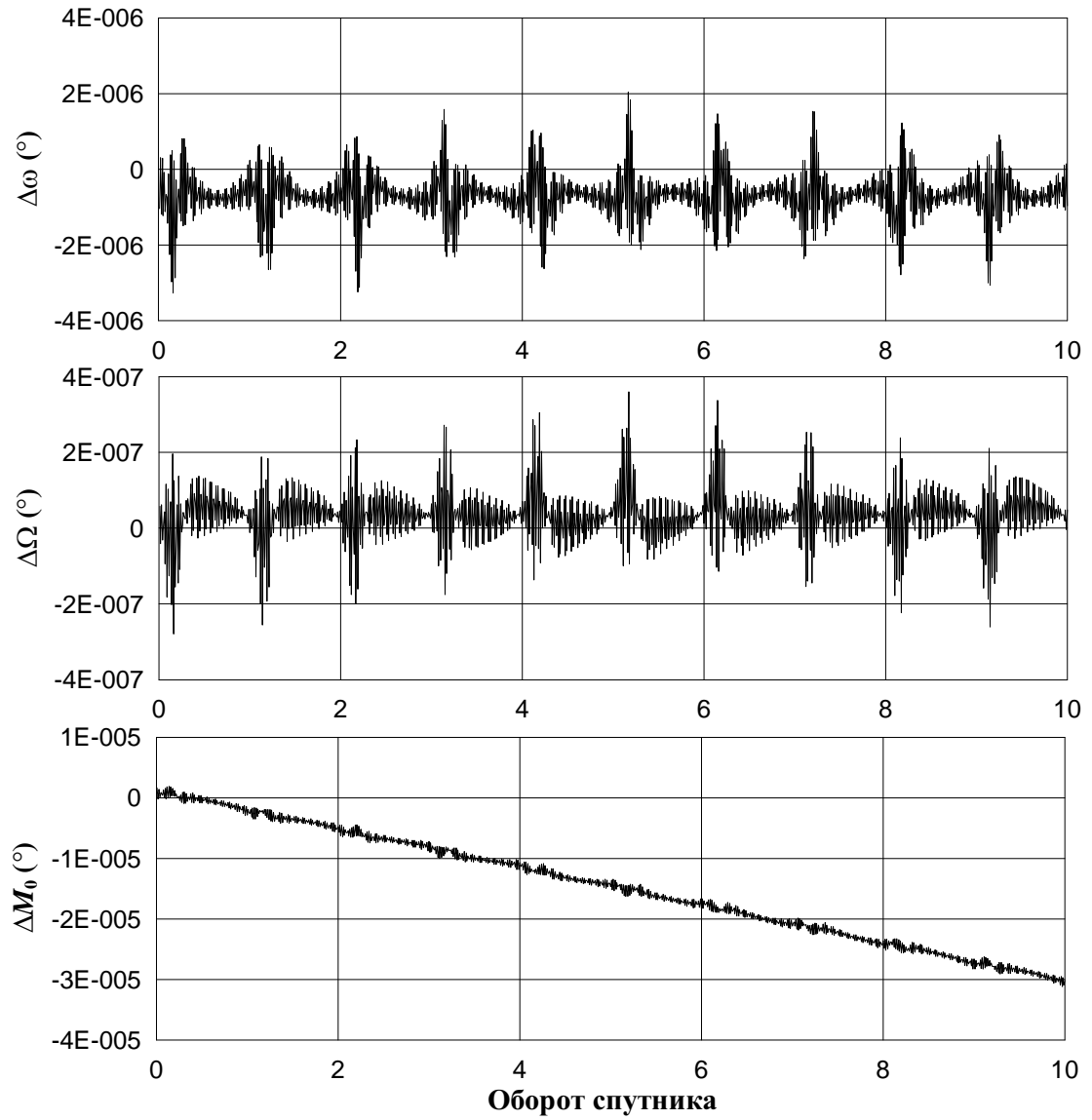


Рис. 7: Возмущения в угловых переменных  $\omega$ ,  $\Omega$ ,  $M_0$

Отсюда составляющие силы по осям абсцисс и ординат будут

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad P_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho}. \quad (14)$$

### 2.2.2 Способы вычисления эллиптических функций

Существует два способа вычисления эллиптических функций: с помощью представления функции в виде ее разложения в ряд по четным степеням  $\kappa$

$$\begin{pmatrix} E \\ K \end{pmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} E_i \\ K_i \end{pmatrix} \kappa^{2i};$$

и использование итерационного метода, предложенного Кингом [14]. Схему метода Кинга, которую мы использовали в работе, можно представить в виде:

$$a_0 = 1, \quad b_0 = \sqrt{1 - \kappa^2}$$

$$a_{i+1} = \frac{1}{2}(a_i + b_i), \quad b_{i+1} = \sqrt{a_i b_i}, \quad c_{i+1} = a_{i+1}^2 - b_{i+1}^2.$$

Известно, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = \frac{1}{K}.$$

Итерационный процесс выполняется до сходимости с некоторой заданной точностью  $\varepsilon$ . В результате получаем значение эллиптической функции  $K$ , а затем из соотношения

$$\frac{E}{K} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} 2^i c_i^2$$

находим функцию  $E$ .

Следует заметить, что использование метода Кинга при численном интегрировании предпочтительнее, поскольку он обеспечивает быструю сходимость процесса за малое число итераций даже при больших значениях  $\kappa$ , при которых ряды, в свою очередь, сходятся очень медленно. Недостаток использования рядов еще состоит в том, что заранее необходимо вычислять коэффициенты  $E_i$  и  $K_i$ .

### 2.3 Использование модифицированного гравитационного параметра

Существует другой способ, который разрешает проблему короткопериодических возмущений. Он заключается в том, что массы близких спутников включаются в массу планеты [1, 2]. В этом случае моделирование движения объекта выполняется на основе упрощенных уравнений, которые представляют собой возмущенные уравнения задачи двух тел с модифицированным гравитационным параметром. Следует заметить, что к такому подходу можно прибегать только тогда, когда размерами орбит близких объектов можно пренебречь, т.е. в случае очень далеких спутников. В противном случае упрощение модели сил приведет к недопустимой потере точности.

## 2.4 Круговая модель движения галилеевых спутников

Для того чтобы оценить последствия, вызванные огрублением и в то же время упрощением численного определения положений галилеевых спутников, в работе также рассматривалась упрощенная теория их орбит, основанная на формулах кругового движения:

$$\begin{aligned}x_{G1} &= r_G \cos(n_G(t - T_J) + T_G), \\x_{G2} &= r_G \sin(n_G(t - T_J) + T_G), \\x_{G3} &= 0,\end{aligned}\tag{15}$$

с параметрами  $r_G$ ,  $n_G$ ,  $T_G$ ,  $T_J$  (табл. 3) взятыми из теории Лиске [6].

Таблица 3: Массы и динамические параметры галилеевых спутников

Возм. тело	$\mu_G/\mu$	$r_G$ (а.е.)	$T_G$ ( $^\circ$ )	$n_G$ ( $^\circ$ /сут.)
Ио	$4.70531454 \cdot 10^{-5}$	0.002819347	149.5784	203.4889
Европа	$2.52670873 \cdot 10^{-5}$	0.004485872	219.2337	101.3747
Ганимед	$7.80429997 \cdot 10^{-5}$	0.007155352	164.0613	50.3176
Каллисто	$5.66832002 \cdot 10^{-5}$	0.012585436	127.9557	21.5710

## 3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе была исследована точность динамических моделей, основанных на упрощенных уравнениях движения, а также эффективность численного интегрирования уравнений. Мы рассмотрели пять моделей движения спутников, четыре из которых отличались друг от друга способами вычисления влияния от галилеевых спутников: высокоточная с использованием аналитической теории Лейни (I), с круговой моделью орбит галилеевых спутников (II), с использованием гауссовых колец (III), с модифицированным гравитационным параметром (IV). В пятой модели (V) влияния галилеевых спутников не учитывались.

### 3.1 Оценка методической точности упрощенных моделей

Движение близкого спутника (Амальтеи) моделировалось на интервале времени 1000 оборотов, тогда как движение далеких спутников (Гималии и Этне) — на интервале 10 оборотов объектов. Точности упрощенных моделей II–V оценивались в векторе положения  $|\Delta\mathbf{x}|$  относительно высокоточной модели I. Результаты приведены на рис. 8.

Как видно из рисунка, наиболее высокую точность из всех упрощенных моделей дает модель II, где движение галилеевых спутников определяется по формулам кругового движения. Точности других моделей значительно ниже. Так, ошибки  $|\Delta\mathbf{x}|$  для моделей IV и V вследствие вековых ошибок в соответствующих долготах уже через 1000 оборотов превышают размеры самой орбиты. Несмотря на это, использование модели II для предварительной обработки наблюдательных данных все же вполне возможно.

Точность упрощенных моделей в случае далеких спутников существенно выше (рис. 9 и 10). Даже модель с модифицированным гравитационным параметром вполне может быть использована для прогноза движения спутников с точностью близкой к внешней точности наземных наблюдений (ошибка в положении  $|\Delta\mathbf{x}| = 10^{-5}$  а.е. приблизительно соответствует угловой ошибке относительно геоцентра  $\sigma = 0.5''$ ). В то же время модель V дает очень грубый прогноз, что говорит о недопустимости игнорирования влияния галилеевых спутников при моделировании.

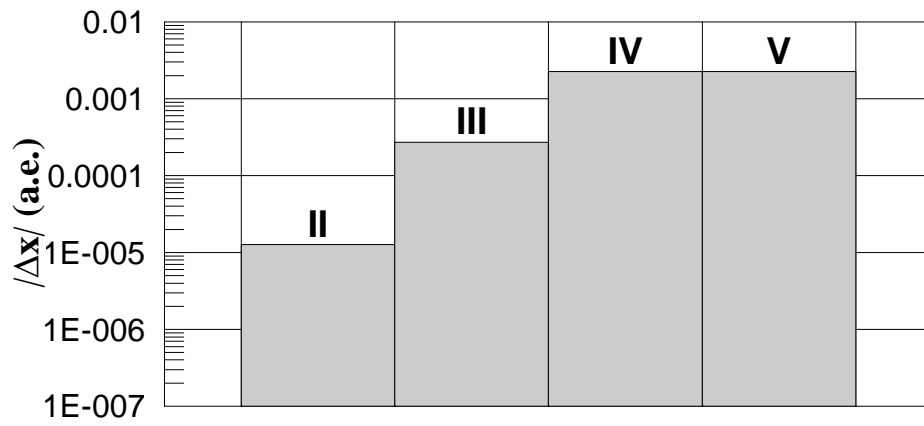


Рис. 8: Оценка точности упрощенных моделей движения Амальтеи

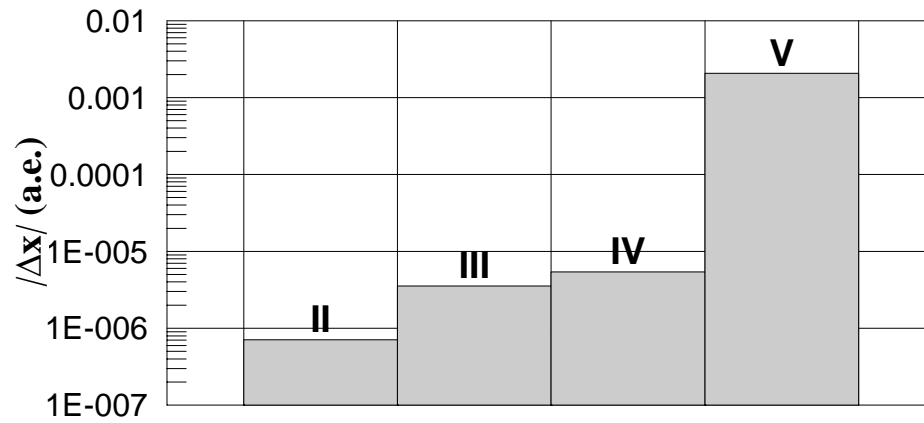


Рис. 9: То же, что и на рис. 8, но для Гималии

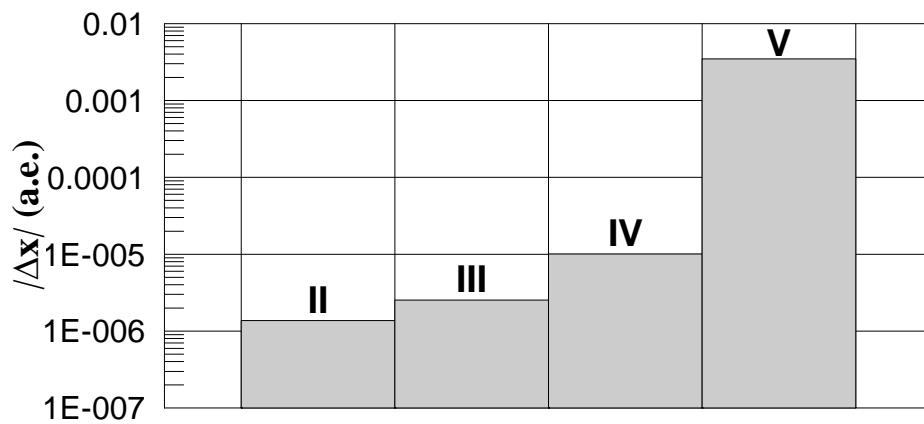


Рис. 10: То же, что и на рис. 8, но для Этне

### 3.2 Исследование эффективности численного интегрирования при использовании упрощенных моделей

Кроме того, помимо методической точности мы исследовали эффективность численного интегрирования (глобальную точность и быстродействие) при использовании упрощенных моделей.

В качестве меры быстродействия численного интегрирования было принято число выполненных шагов  $NS$ , а также процессорное время  $CPU$ . Интегрирование выполнялось на тех же временных интервалах, что и выше, с одной и той же задаваемой локальной ошибкой. Точность интегрирования оценивалась в векторе положения  $|\Delta\mathbf{x}|$  путем сравнения вычисленной эфемериды с полученной при меньшей на два порядка задаваемой локальной ошибке. При этом моделирование выполнялось на компьютере с тактовой частотой 1.6 GHz в арифметике с двойной точностью. Результаты исследования представлены в табл. 4 и 5.

Как видно, в случае Амальтеи точность и быстродействие по  $NS$  для всех моделей одинаковые. Это, очевидно, связано с тем, что здесь проблема короткопериодических возмущений не возникает. В то же время оценки быстродействия по  $CPU$  принципиально отличаются. Так, быстродействие интегрирования для модели I существенно ниже (на порядок и более), нежели для упрощенных моделей. Это, прежде всего, обусловлено чрезвычайной сложностью представления в модели движения галилеевых спутников. Использование круговых формул для представления орбит массивных спутников позволяет значительно повысить скорость вычислений, почти в 14 раз, при той же точности интегрирования.

В случае далеких спутников численное интегрирование орбит в моделях I и II усложняется влиянием короткопериодических возмущений от галилеевых спутников, что отражается, главным образом, на быстродействии численного процесса. Интегрирование в упрощенных моделях выполняется существенно быстрее: для Гималии почти в 6 раз, тогда как для Этне более чем в 7 раз. Поскольку в моделях используются разные формы представления движения галилеевых спутников с разной степенью сложности, выигрыш в быстродействии по  $CPU$  несколько иной, нежели по  $NS$ . Например, быстродействие интегрирования по  $CPU$  для

Таблица 4: Оценки быстродействия различных моделей

Модель	Амальтея		Гималия		Этне	
	<i>CPU</i>	<i>NS</i>	<i>CPU</i>	<i>NS</i>	<i>CPU</i>	<i>NS</i>
I	67	14270	11	2347	22	4645
II	5	14271	1	2378	1.5	4616
III	6	14270	0.2	415	0.28	629
IV	4	14273	0.16	415	0.17	629
V	4	14273	0.16	415	0.17	629

Таблица 5: Ошибки интегрирования  $|\Delta \mathbf{x}|$  (а.е.) в различных моделях

Модель	Амальтея	Гималия	Этне
I	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$	$3.8 \cdot 10^{-11}$
II	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$4.4 \cdot 10^{-12}$	$5.5 \cdot 10^{-11}$
III	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$9.6 \cdot 10^{-15}$	$3.4 \cdot 10^{-13}$
IV	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$5.4 \cdot 10^{-11}$
V	$6.0 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$5.4 \cdot 10^{-11}$

модели I на порядок ниже модели II и, в свою очередь, на два порядка ниже остальных моделей.

Таким образом, с точки зрения соотношения точность–быстродействие модель III (с использованием гауссовых колец) оказывается самой эффективной для численного моделирования орбит далеких спутников: при достаточно высокой эффективности интегрирования (точности и быстродействии) она, кроме того, представляет движение далекого спутника точнее, чем другие упрощенные модели IV и V (без короткопериодических возмущений от галилеевых спутников) (рис. 9 и 10).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе были получены следующие результаты.

1. Построена высокоточная численная модель спутникового движения на основе дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, интегрируемых численно методом Эверхарта.
2. Рассмотрены различные формы упрощенного представления влияния галилеевых спутников, используемые при моделировании других спутников Юпитера. Сформулирована проблема короткопериодических возмущений, которая возникает при высокоточном численном моделировании орбит далеких спутников, когда учитываются гравитационные влияния быстрообращающихся галилеевых спутников. Предлагаются некоторые подходы, разрешающие проблему короткопериодических возмущений.
3. На примере одного близкого (Амальтея) и двух далеких спутников (Гималия и Этне) оценена точность различных динамических моделей, основанных на упрощенных уравнениях движения.
4. Исследована эффективность (точность и быстродействие) численного интегрирования упрощенных уравнений.
5. Показано, что с точки зрения соотношения точность–быстродействие модель, основанная на усредненных по Гауссу уравнениях, оказывается наиболее эффективной (среди рассмотренных) для численного моделирования орбит далеких спутников.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е. Теория движения и эфемериды VI и VII спутников Юпитера на 1979–2000 годы. Томск: Изд-во ТГУ, 1978.
- [2] Rocher P., Chapront J. Observations and Ephemerides of the Faint Satellites of Jupiter // *Astron. Astrophys.* 1996. V. 311. P. 710–714.
- [3] Jacobson R.A. The Orbits of the Outer Jovian Satellite // *Astron. J.* 2000. V. 120. P. 2679–2686.
- [4] Emelyanov N.V. Ephemerides of the Outer Jovian Satellites // *Astron. Astrophys.* 2005. V. 435. P. 1173–1179.
- [5] Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961.
- [6] Lieske J.H. Galilean Satellites Ephemerides E-5 // *Astron. Astrophys.* V. 129. 1998. P. 205–217.
- [7] Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука. 1977.
- [8] P.K. Seidelmann (Chair), V.K. Abalakin, M. Bursa et al. Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planet and Satellites: 2000 // *Cel. Mech.* 2002. V. 82. I. 1. P. 83–110.
- [9] Standish E. M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // *Interoffice Memorandum.* 1998. V. 312. F-98-048. P. 1–18.
- [10] Sampson R.A. Tables of the Four Great Satellites of Jupiter. London. Wesley. 1910.
- [11] Lainey V., Duriez L., Vienne A. New Accurate Ephemerides for the Galilean Satellites of Jupiter. I. Numerical Integration of Elaborated Equations of Motion // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 420. P. 1171–1183.
- [12] Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* V. 10. P. 35–55.

- [13] Авдюшев В.А. О численном интегрировании орбит с короткопериодическими возмущениями // Изв. вузов. Физика. Приложение. 2006. С. 31–43.
- [14] Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1962.