

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ОПРЕДЕЛЕНИИ СПУТНИКОВЫХ ОРБИТ

Введение

Адекватность орбитальной модели небесного тела зависит не только от точности формульного представления орбиты, но также и от точности входящих в модель параметров, которые определяются из наблюдений объекта, искаженных ошибками различного происхождения. В связи с этим низкоточные наблюдения, очевидно, дают грубые оценки орбитальных параметров.

Впрочем, принимая во внимание случайный характер ошибок наблюдений, их влияние на точность определения орбиты можно уменьшать путем пополнения наблюдательной базы все новыми (независимо полученными) данными о движении объекта. С другой стороны, скудность количества наблюдений также является одной из причин плохого определения орбит.

Обратная задача орбитальной динамики, как правило, сводится к минимизации некоторой целевой функции, которая выражает степень близости наблюдаемых и моделируемых положений объекта. Вообще говоря, совершенно нет никаких оснований полагать, что целевая функция имеет единственный минимум. Напротив, в большинстве обратных задач благодаря главным образом периодичности орбитального движения гиперповерхность целевой функции в пространстве определяемых параметров имеет довольно сложную структуру с многочисленными минимумами [1]. Обычно не возникает затруднений в выборе минимума, соответствующего наилучшим оценкам орбитальных параметров, и таким минимумом является абсолютный, в котором значение целевой функции существенно меньше, нежели в других минимумах. Однако ситуация с выбором не всегда складывается столь благоприятно: в некоторых задачах минимумы целевой функции могут быть почти равнозначными и тогда критерий качества по абсолютному минимуму не может рассматриваться как безусловный.

Кроме того, ввиду сложности целевой функции используемые для поиска решения квазиньютоновские итерационные методы порой оказываются неэффективными и в этом случае следует прибегать к более изощренным подходам.

Перечисленные проблемы естественно имеют важное прикладное значение и они довольно часто возникают в обратных задачах спутниковой динамики, а именно при определении орбит близких и недавно открытых далеких спутников планет-гигантов, где наблюдательный материал недостаточно полон для построения высокоточных моделей спутниковых движений. В данной работе эти проблемы рассматриваются на примере некоторых представителей спутниковой системы Юпитера.

Моделирование спутниковой орбиты и определение ее параметров из наблюдений

Формально численную модель спутникового движения в L -мерном пространстве измеряемых величин \mathbf{p} можно представить в виде

$$\mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{q})). \quad (1)$$

Здесь t — эфемеридное время; \mathbf{x} — планетоцентрическое положение спутника, а \mathbf{q} — его орбитальные параметры; \mathbf{T} — преобразование перехода от \mathbf{x} к \mathbf{p} . По способу получения \mathbf{x} модели условно делятся на кинематические (прецессирующие эллипсы) и динамические, которые могут быть аналитическими, либо численными. На практике измеряемыми величинами \mathbf{p} часто являются сферические координаты: прямое восхождение α и склонение δ ; а при численном моделировании в качестве определяемых параметров \mathbf{q} выбирают вектор состояния динамической системы $(\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T$ на начальный момент t_0 .

Пусть требуется определить K орбитальных параметров \mathbf{q} по N наблюдаемым положениям \mathbf{p}_i^O на моменты времени t_i ($i = 1, \dots, N$). Эта задача обычно сводится к минимизации по \mathbf{q} функционала

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i^O - \mathbf{p}_i^C\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}^O - \mathbf{P}^C\|^2, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$ — модельное представление (1) наблюдений \mathbf{p}_i^O на момент t_i , и введено обозначение

$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)^T$. Минимум функционала (2) находится из необходимого условия экстремума, которое эквивалентно системе K нелинейных уравнений $\partial S / \partial \mathbf{q} = \mathbf{0}$. Эта система, как правило, решается итерационно методом Гаусса–Ньютона

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k - \left[\mathbf{Q}^{-1} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right] (\mathbf{q}_k), \quad \mathbf{Q} = \left[\frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}} \right]^T \frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3)$$

где \mathbf{Q} — так называемая нормальная матрица размера $K \times K$. Начальное приближение \mathbf{q}^0 в итерационной схеме (3) находится одним из методов предварительного определения орбиты (например, Гаусса, либо Лапласа).

Оценка ошибок в орбитальных параметрах

Поскольку наблюдаемые и модельные величины содержат ошибки $\delta \mathbf{p}_i^O$ и $\delta \mathbf{p}_i^C$ соответственно, то из минимизации (2) можно получить лишь приближенную оценку $\hat{\mathbf{q}}$. (Здесь под модельными ошибками $\delta \mathbf{p}_i^C$ понимаются систематические, вызванные неточностью формульного представления орбитального движения.) При использовании современных высокоточных моделей $|\delta \mathbf{p}_i^O| \gg |\delta \mathbf{p}_i^C|$, поэтому будем полагать, что ошибка в оценке \mathbf{q} вызывается только ошибками наблюдений, которые можно рассматривать как случайные. Допускаем линейную связь между ошибками

$$\delta \mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q}, \quad \delta \mathbf{P} = (\delta \mathbf{p}_1^O, \dots, \delta \mathbf{p}_N^O)^T,$$

для их ковариационных матриц $\mathbf{C}_{\delta \mathbf{P}}$ и $\mathbf{C}_{\delta \mathbf{q}}$ будем иметь

$$\mathbf{C}_{\delta \mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{C}_{\delta \mathbf{q}} \left[\frac{\partial \mathbf{P}^C}{\partial \mathbf{q}} \right]^T. \quad (4)$$

Для практики важен случай, когда ошибки $\delta \mathbf{P}$ равноточны с некоторой дисперсией σ и распределены по нормальному закону. Тогда $\mathbf{C}_{\delta \mathbf{P}}$ представляет собой диагональную матрицу размера $LN \times LN$ с диагональными элементами σ^2 и согласно (4) получаем [2]

$$\mathbf{C}_{\delta \mathbf{q}} = \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1}, \quad (5)$$

где σ^2 (среднеквадратическая ошибка) оценивается по формуле

$$\sigma^2 = \frac{2 \min_{\mathbf{q}} S}{LN - K}. \quad (6)$$

Ковариационная матрица (5) задает распределение ошибок $\delta\mathbf{q}$ относительно точного решения \mathbf{q} , получаемого при отсутствии ошибок наблюдений. Однако, с другой стороны, если ее отнести к приближенной оценке $\hat{\mathbf{q}}$, то она может рассматриваться как характеристика вероятностного распределения точного решения относительно приближенного.

Для дискретного моделирования вероятностного распределения точного решения прибегают к следующему алгоритму [3]. Методом Холецкого находят треугольную матрицу $\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}}^{1/2}$, для которой

$$\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}} = \mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}}^{1/2} (\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}}^{1/2})^T,$$

после чего вычисляют множество возможных решений по формуле

$$\mathbf{q}^i = \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}}^{1/2} \boldsymbol{\eta}_i \quad (i = 1, \dots, M), \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\eta}_i$ — нормально распределенные несмещенные K -мерные векторы с единичной дисперсией.

Поскольку ковариационная матрица $\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}}$ положительно определена, то дискретная область возможных решений (7) будет сосредоточена в некотором K -мерном гиперэллипсоиде с центром $\hat{\mathbf{q}}$:

$$(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}})^T \mathbf{Q} (\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}) = (3\sigma)^2.$$

Особенности в определении орбиты по наблюдениям на короткой дуге

Если спутник наблюдается на малом промежутке времени (на короткой орбитальной дуге), то ошибки в определяемых орбитальных параметрах спутника могут быть чрезвычайно большими и полученная модель с такими параметрами оказывается совершенно непригодна для адекватного описания движения спутника. Покажем это на простом примере.

Примем полиномиальную (кинематическую) модель (1), вполне подходящую для описания орбиты на малом промежутке времени:

$$\mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^p \mathbf{p}_i (t - t_0)^i, \quad (8)$$

где $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_p)^T$ — вектор размерности $L(p + 1)$; p — порядок аппроксимации (8). Нетрудно показать, что согласно (5)

$$\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{D}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{D}_p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_j = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (t_i - t_0)^{2j}} \mathbf{E} \quad (j = 0, \dots, p),$$

где \mathbf{E} — единичная матрица размера $L \times L$. Отсюда видно, что при $t_i \rightarrow t_0$ все дисперсии ковариационной матрицы для параметров \mathbf{p}_i ненулевых порядков и, следовательно, соответствующие параметрические ошибки неограниченно возрастают. Вместе с тем дисперсии для \mathbf{p}_0 не зависят от длины временного интервала и поэтому только параметры нулевого порядка могут быть оценены с высокой точностью, однако они задают лишь начальное положение спутника на орбите и не отвечают за его движение.

С другой стороны, если интервал наблюдаемости увеличивается, то имеет место тенденция к повышению точности параметров \mathbf{p}_i ненулевых порядков.

Необходимо также заметить, что при обработке наблюдений на короткой дуге число обусловленности нормальной матрицы \mathbf{Q} , как правило, очень большое. Например, для (8) можно показать, что

$$\text{cond}\mathbf{Q} = \text{cond}\mathbf{Q}^{-1} = \text{cond}\mathbf{C}_{\delta\mathbf{q}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N (t_i - t_0)^{2p}}.$$

Следовательно, чем выше порядок аппроксимации, тем больше число обусловленности. В общем случае это обстоятельство приводит к тому, что численное обращение матрицы \mathbf{Q} в алгоритме Гаусса–Ньютона (3) и для получения ковариационной матрицы (5) будет выполняться с плохой точностью, в особенности, если обратное число обусловленности $1/\text{cond}\mathbf{Q}$ близко к ошибке компьютерной арифметики.

Описанную выше проблему интересно исследовать для недавно открытых (далеких) спутников планет [4], которые наблюдались пока только в одном появлении.

В спутниковой системе Юпитера таких объектов сейчас порядка 40. Для большинства из них, открытых в 2003 г. (S/2003), дискретные вероятностные области (7) чрезвычайно большие и сильно вытянутые (например, рис. 1; S/2003 J04). Интервалы наблюдаемости этих спутников не превышают 100 суток. Для спутников, у которых моменты наблюдений покрывают длительные интервалы времени,

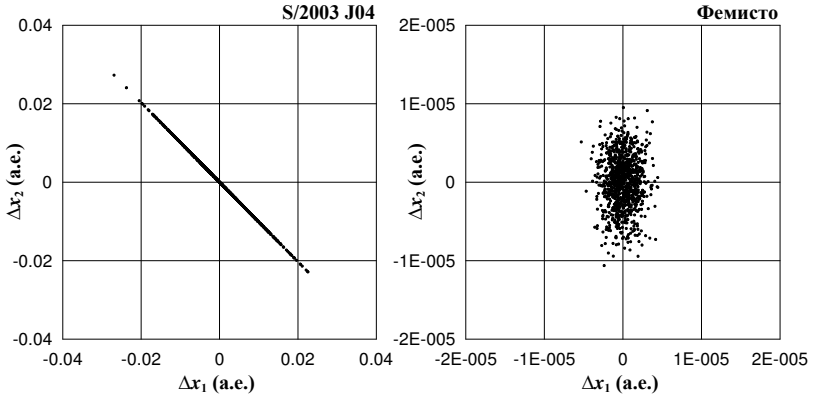


Рис. 1. Вероятностные области относительно оценок \hat{x}_1 и \hat{x}_2

вероятностные области существенно меньше (например, рис. 1; Фемисто). При этом следует заметить, что среднеквадратические ошибки σ для всех новых спутников довольно малы и не превосходят $0.2''$.

На рис. 2 приведено соотношение между размерами начальных вероятностных областей $|\Delta \mathbf{x}|_{\max} = \max_i |\mathbf{x}_0^i - \hat{\mathbf{x}}_0|$ в пространстве прямоугольных координат и разбросом моментов наблюдений \bar{T} :

$$\bar{T}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^2, \quad \bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i.$$

В частности, из рисунка видно, что малые вероятностные области имеют место именно для тех спутников, у которых разбросы моментов наблюдений достаточно большие. В то же время для большинства спутников, открытых в 2003 г. и наблюдавшихся на коротких интервалах времени, рассматриваемые характеристики $|\Delta \mathbf{x}|_{\max}$ и \bar{T}/τ (τ — орбитальный период спутника) слабо коррелируют. Это главным образом связано с тем, что при малом разбросе моментов наблюдений становятся весьма весомыми другие факторы (например, особенности в распределении наблюдаемых положений спутника), потенциально влияющие на размеры вероятностной области. Так или иначе, определенно можно говорить, что длительная хронология наблюдений спутника является надежным залогом для высокоточного определения спутниковой орбиты.

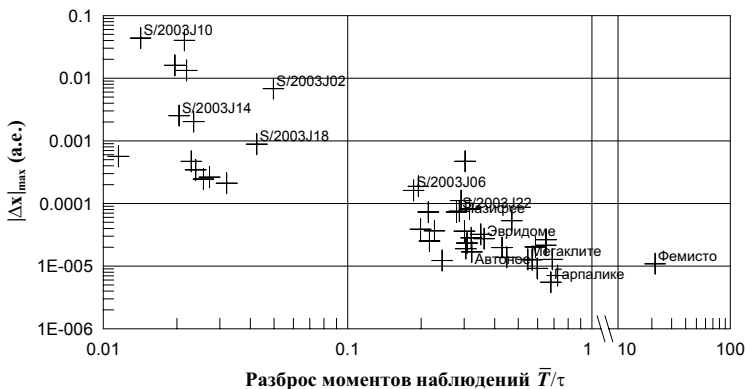


Рис. 2. Соответствие между размерами начальных вероятностных областей и разбросами моментов наблюдений

Большие вероятностные области вообще говорят о том, что наблюдений для соответствующих спутников пока не достаточно для уверенного прогноза спутникового движения, например, с целью планирования наблюдений в будущем. На рис. 3 на примере S/2003 J10 показано, насколько обширным может быть разброс возможных положений спутника $\mathbf{x}_1^i = \mathbf{x}(t_0 + \tau, \mathbf{q}^i)$ уже через один оборот ($\tau = 681$ сут.) при большой вероятностной области параметров $\mathbf{q}^i = (\mathbf{x}_0^i, \dot{\mathbf{x}}_0^i)^T$. То есть на самом деле спутник может оказаться где угодно в большой окрестности, соизмеримой с самой орбитой.

При планировании наземных наблюдений требуемая точность прогноза движения непосредственно определяется размерами сканируемого наблюдательным средством участка неба, где ожидается появление объекта. Например, если мы намечаем провести наблюдение спутника S/2003 J10 через оборот, ожидая его появление на достаточно большом участке $1^\circ \times 1^\circ$, использование динамической модели спутника для его целеуказания в данном случае оказывается неприемлемым. Как показывает рис. 3, вероятностная область для S/2003 J10 столь обширна, что значительная часть ее выпадает за пределы обозреваемого поля, центр которого настроен на прогнозируемое положение объекта $(\hat{\alpha}_1, \hat{\delta}_1)$ и, следовательно, есть вероятность потерять спутник. Таких объектов довольно много: помимо S/2003 J10 большие шансы быть потерянными имеют S/2003 J02, S/2003 J03, S/2003 J04, S/2003 J12 и S/2003 J23 [4].

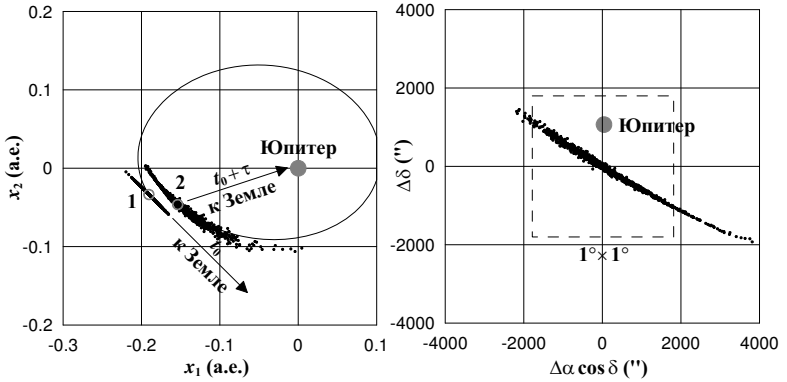


Рис. 3. Области возможных движений в момент t_0 (1) и через оборот ($t_1 = 5$ января 2005 г.) (2) в прямоугольных йовицентрических координатах и в сферических координатах относительно номинальной орбиты ($\hat{\alpha}_1, \hat{\delta}_1$)

Кроме того, нельзя не заметить, что некоторые возможные орбиты спутника S/2003 J02 выходят за пределы гравитационной сферы Юпитера, иначе говоря, имеется вероятность, что объект станет астероидом. По нашим оценкам вероятность того, что уже за 50 лет спутник сменит свое амплуа, составляет приблизительно 0.05.

Особенности в определении орбиты близкого спутника

Для уверенного определения орбит близких спутников требования к точности наблюдений должны быть существенно выше, нежели в случае далеких спутников.

Рассмотрим в некоторой стационарной плоскости семейство круговых орбит с радиусами a и средними движениями $n \sim a^{-3/2}$. Пусть на этих орбитах наблюдаемые из неподвижной точки положения объектов одинаково распределены по долготе l . Тогда можно показать, что для дисперсии ошибки среднего движения δn

$$C_{\delta n} = \frac{\sigma^2 n^2}{a^2} c^2(l_0, l_1, \dots, l_N), \quad c^2 \sim \frac{1}{\sum_{i=1}^N (l_i - l_0)^2} \quad \text{при } |l_i - l_0| \gg 0.$$

Отсюда видно, что с уменьшением a ошибки δn при постоянной σ

будут увеличиваться пропорционально $a^{-5/2}$. Поэтому, если орбиты близкого и далекого спутников определяются по одинаково точным наблюдениям на подобных дугах, ошибка в долготе близкого объекта $\delta l \sim \delta n(t - t_0)$, определяющей его положение на орбите, со временем будет развиваться быстрее. Следовательно, чтобы сохранить точность прогнозируемых положений adl , точность наблюдений должна быть повышена пропорционально $a^{3/2} \sim n^{-1} \sim \tau$.

Кроме того, заметим, что ввиду наличия в оценке коэффициента c ошибка среднего движения может быть уменьшена путем увеличения наблюдаемой дуги орбиты. При этом точность определения среднего движения будет повышаться пропорционально c .

Неоднозначность в определении орбитальных параметров

Наблюдать близкие спутники чрезвычайно сложно из-за их слабой светимости и сильной засветки от планеты. Поэтому наблюдаются эти объекты крайне редко и временные промежутки между наблюдениями, как правило, очень большие, за которые спутники порой совершают до десятка тысяч оборотов. Это обстоятельство является главной причиной другой немаловажной проблемы, связанной с неоднозначностью определения спутниковых орбит [1]. Проиллюстрируем эту проблему на примере круговой задачи.

Рассмотрим двухпараметрическое семейство круговых кеплеровских орбит $\mathbf{p}^C = \mathbf{x}(t, a, l_0)$ относительно орбиты $\mathbf{p}^O = \mathbf{x}(t, \bar{a}, \bar{l}_0)$, определяющей N наблюдаемых положений спутника. Введем целевую функцию $s = 2S/N$. Тогда нетрудно показать, что

$$s = \bar{a}^2(\alpha^2 + 2(1 + \alpha)(1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i)),$$

где $\varphi = \frac{3}{2}\lambda\alpha - \beta$; $\alpha = (a - \bar{a})/\bar{a}$; $\beta = l_0 - \bar{l}_0$; $\lambda = \bar{l} - \bar{l}_0 = \bar{n}(t - t_0)$. Отсюда видно, что при достаточно больших λ в окрестности истинного решения $\alpha = \beta = 0$ поведение s будет определяться главным образом тригонометрической составляющей. Запишем ее в удобном для исследования виде

$$F(\zeta, \beta) = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos((\Lambda_i - \Lambda_0)\zeta - \beta),$$

где

$$\zeta = \frac{3}{2}\alpha(\lambda_N - \lambda_1), \quad \Lambda_i = \frac{\lambda_i - \lambda_1}{\lambda_N - \lambda_1} \quad (i = 0, 1, \dots, N).$$

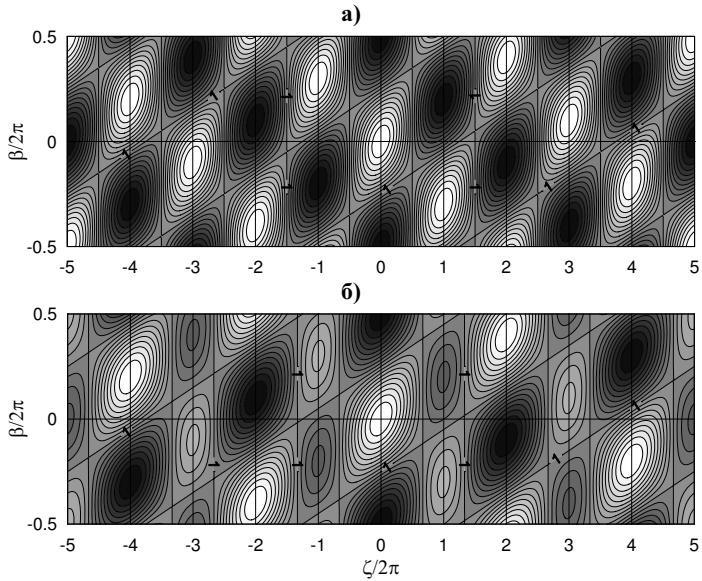


Рис. 4. Линии уровней поверхности $F(\zeta, \beta)$ в случае двух ($\Lambda = 0, 1$; а) и трех ($\Lambda = 0, 0.5, 1$; б) равномерно распределенных во времени групп наблюдательных данных с одинаковым количеством наблюдений в каждой

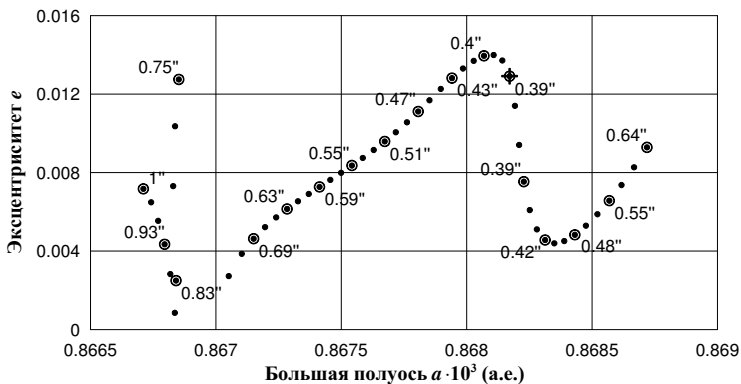


Рис. 5. Распределение орбитальных параметров a и e , доставляющих минимумы целевой функции S (Адрастея). Для некоторых решений, обозначенных кружочками, даны среднеквадратические ошибки. Решение в абсолютном минимуме обозначено крестиком.

На рис. 4 показаны примеры графического представления поведения F в окрестности истинного решения в случае двух и трех равномерно распределенных во времени групп наблюдений ($\Lambda_0 = 0.3$). Как видно, функции F имеют множество минимумов. Поэтому при минимизации целевой функции s мы будем иметь множество решений \mathbf{q} . Какое из них мы получим при использовании метода Гаусса–Ньютона (3) естественно зависит от того, какое начальное приближение \mathbf{q}^0 мы выберем. Кроме того, заметим, что в случае двух групп все минимумы равнозначны, поэтому по величине F в них невозможно судить о качестве соответствующих оценок \mathbf{q} .

В действительности используемые на практике модели \mathbf{p}^C более сложные, нежели рассмотренные нами выше, и, кроме того, наблюдательные данные \mathbf{p}^O содержат ошибки. Тем не менее проблема неоднозначности в определении орбит близких спутников в общем случае также имеет место.

На рис. 5 в плоскости большая полуось–эксцентриситет (a, e) представлено распределение минимумов целевой функции S для Адрастеи, близкого спутника Юпитера, у которого на данный момент имеются всего две группы наземных наблюдений. За промежуток времени между этими группами (12 лет) спутник совершает порядка 14500 оборотов. Для представления наблюдений спутника здесь ис-

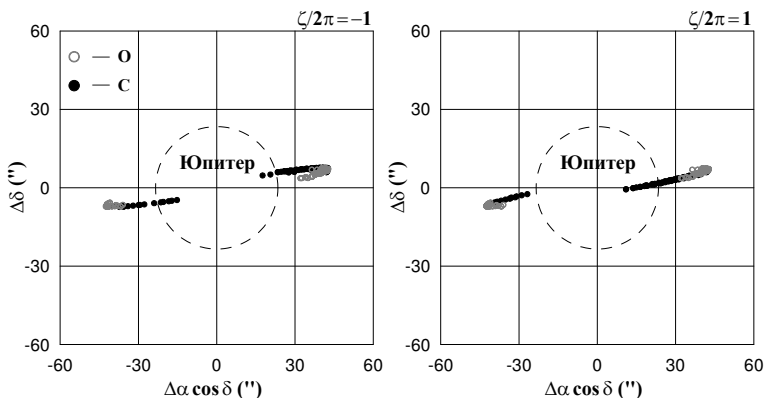


Рис. 6. Распределение наблюдаемых (О) и вычисленных (С) положений Метиды на небесной сфере для третьей группы наблюдений (B18 Terskol) (пунктирной линией показана граница видимого с Земли диска Юпитера)

пользовалась высокоточная численная модель спутниковой системы Юпитера, представленная в работе [1].

Как видно из рисунка, целевая функция дает довольно малые среднеквадратические ошибки в окрестности абсолютного минимума. В то же время нельзя утверждать, что именно в абсолютном минимуме находятся наилучшие оценки орбитальных параметров, поскольку среднеквадратические ошибки в соседних минимумах отличаются на величины, гораздо меньшие ошибок наблюдений.

Опасность наличия у целевой функции множества минимумов кроется, очевидно, в том, что при формальной минимизации можно получить такие оценки, которые при хороших среднеквадратических ошибках будут давать неудовлетворительный прогноз движения спутника на длительном интервале времени.

На рис. 6 приведено соответствие между последними наблюдениями (2000 г.) спутника Метиды и его моделируемыми положениями, полученными при улучшении орбиты по двум предыдущим группам (1988, 1999 г.) для случаев двух соседних решений, соответствующих $\zeta/2\pi = \pm 1$. Рисунок показывает, что модель, основанная на этих решениях, дает очень плохой прогноз на 2000 г., и если бы она использовалась для планирования наблюдений спутника в одной из его элонгаций, вполне возможно, что в ожидаемое время он бы не ока-

зался в ожидаемом месте. Вместе с тем решение, соответствующее $\zeta = 0$, обеспечивает хорошее согласие с наблюдениями.

Затруднения в численном решении обратной задачи

Поведение целевой функции S в пространстве параметров \mathbf{q} для близких спутников довольно сложное. Причем, если моменты спутниковых наблюдений распределены на большом интервале времени, функция S является овражной. Действительно, в случае двухпараметрических круговых орбит нетрудно показать, что

$$\text{cond}\mathbf{Q} \sim \frac{1}{Na^2} \sum_{i=1}^N (l_i - l_0)^2 \quad \text{при} \quad |l_i - l_0| \gg 0. \quad (9)$$

Отсюда число обусловленности нормальной матрицы растет с увеличением интервала наблюдаемости. Напомним, что \mathbf{Q} является также матрицей квадратичной формы, аппроксимирующей целевую функцию S . Поэтому большое число обусловленности (9) означает, что линии уровней S на плоскости (a, l_0) в окрестности минимума будут представлять собой сильно вытянутые эллипсы, какие характерны для овражных целевых функций. Впрочем, следует заметить, что обусловленность (9) можно искусственно уменьшить путем подбора размерности большой полуоси a . Однако такой прием обоснован лишь в малой окрестности минимума, где квадратичная форма с \mathbf{Q} достаточно хорошо представляет S . В общем случае масштабирование существенно не улучшает степень овражности целевой функции.

Кстати, интересно заметить, что оценка (9) хорошо согласуется с известным в небесной механике фактом, согласно которому для уменьшения числа обусловленности нормальной матрицы за момент времени t_0 (или l_0) необходимо выбирать среднее арифметическое всех моментов наблюдений (см., например, [5]).

Как и метод Ньютона, метод Гаусса–Ньютона (3) имеет очень малую область сходимости. Впрочем, как известно, сходимость практически всегда может быть достигнута путем уменьшения величины поправки (3), т.е. по схеме

$$\mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{q}_k - h \left[\mathbf{Q}^{-1} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right] (\mathbf{q}_k), \quad \text{где} \quad h < 1. \quad (10)$$

Однако в обратных задачах динамики близких спутников схема (10) не эффективна, поскольку требует очень малые значения h , какие

неизбежно приводят к существенному понижению скорости сходимости итерационного процесса: число итераций в этом случае может достигать сотни тысяч [1].

Чтобы расширить область допустимых начальных приближений \mathbf{q}^0 для решения обратной задачи, следует прибегать к составным итерационным методам. Например, начинать поиск можно по схеме градиентного спуска [6]

$$\mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{q}^k - \left[\frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}{(\mathbf{Q}\mathbf{G}) \cdot \mathbf{G}} \mathbf{G} \right] (\mathbf{q}^k), \quad \mathbf{G} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \quad (11)$$

Здесь точкой обозначено скалярное произведение K -мерных векторов. В процессе последовательного использования схемы (11) приближенное решение достаточно быстро (за несколько итераций) сваливается на дно оврага S , но в дальнейшем невероятно медленно сходится к минимуму S . На этом этапе можно было бы воспользоваться методом Гаусса–Ньютона. Однако, как показывает практика, если приближенное решение оказывается довольно далеко от минимума S , схема (3) будет давать такие поправки, которые способны выкинуть решение из области сходимости метода. Впрочем, плохие поправки можно улучшить, если использовать априорную информацию о свойствах орбитального движения.

В движении близких спутников Юпитера доминирующую роль играет гравитационное поле планеты. При моделировании его можно рассматривать как консервативное. Поэтому полная энергия $H(\mathbf{q})$, определяемая притяжением планеты, будет почти постоянной. Учитывая это свойство, наложим ограничение на \mathbf{q}^{k+1} в (3): приближение должно быть таким, чтобы $H(\mathbf{q}^{k+1}) = H(\mathbf{q}^k)$.

В общем случае налагаемое ограничение определяет множество решений, однако из них целесообразно использовать лишь ортогональную проекцию \mathbf{q}^{k+1} (3) на поверхность $H(\mathbf{q}) = H(\mathbf{q}^k)$. Получить спроецированное решение можно по приближенной формуле

$$\mathbf{q}^{k+1} := \mathbf{q}^{k+1} - \frac{H(\mathbf{q}^{k+1}) - H(\mathbf{q}^k)}{\mathbf{G}_H \cdot \mathbf{G}_H} \mathbf{G}_H, \quad (12)$$

где $\mathbf{G}_H = \partial H / \partial \mathbf{q}$ — градиент H , вычисляемый в \mathbf{q}^{k+1} .

В обратных задачах динамики близких спутников составной подход с последовательным использованием итерационных схем (3), (11) и (12) позволяет не только расширить область допустимых \mathbf{q}^0 , но и повысить скорость сходимости итерационного процесса даже при до-

вольно грубых начальных приближениях: как показывает практика, сходимость достигается уже за несколько десятков итераций [1].

Заключение

Таким образом, используя результаты моделирования, мы попытались высветить некоторые особенности в решении обратных задачах спутниковой динамики, возникающие главным образом вследствие недостаточности наблюдательной информации и вызывающие ряд трудностей в определении спутниковых орбит.

Несмотря на прикладную значимость и в то же время известность рассмотренных нами проблем, к настоящему времени к ним еще не проявлен должный интерес. Остается лишь надеяться, что в грядущей череде открытий новых естественных спутников с бедной хронологией наблюдений эти проблемы все чаще будут заявлять о себе, что, в конце концов, позволит им завоевать заслуженное внимание.

Список литературы

1. *Авдюшев В. А., Баньщикова М. А.* Определение орбит близких спутников Юпитера // Астрон. вест. 2008. (в печати)
2. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976.
3. *Bordovitsyna T. V., Avdyushev V. A., Chernitsov A. M.* New Trends in Numerical Simulation of the Motion of Solar System Small Bodies // Celest. Mech. 2001. V. 80. I. 3/4. P. 227–247.
4. *Авдюшев В. А., Баньщикова М. А.* Области возможных движений новых спутников Юпитера // Астрон. вест. 2007. Т. 41. Вып. 5. С. 413–419.
5. *Черницов А. М.* Анализ некоторых упрощенных схем определения оценок параметров движения небесных тел // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1975. Вып. 5. С. 6–19.
6. *Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С.* Методы оптимизации. М: Изд-во МГТУ, 2001.