МЕТОДЫ ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

1. Введение

Численное моделирование орбитального движения зиждется на трех "китах": 1) дифференциальные уравнения, формализующие движение; 2) численный метод интегрирования дифференциальных уравнений; и 3) аппаратное средство (персональный компьютер), на котором реализуется численный процесс.

Эффективность численной модели характеризуется ее точностью и быстродействием. Очевидно, что развитие и усовершенствование каждого из трех названных "китов" независимо друг от друга способны влиять на эффективность численного моделирования. Действительно, ведь точность и быстродействие модели могут зависеть, например, от малости и гладкости правых частей уравнений, от порядка численного метода, от величины разрядной сетки (компьютерной арифметики) или быстродействия компьютера.

Быстродействие процесса моделирования определяется, главным образом, объемностью вычисления правых частей, сложностью программной реализации численного метода, а также оперативностью персонального компьютера.

Ошибки численной модели, определяющие ее точность, могут быть следующими: 1) параметрическими; 2) вызванными неадекватностью математической модели физическому процессу (орбитальному движению); 3) округления в компьютерной арифметике или 4) усечения аппроксимирующих формул в численном методе. Будем полагать, что физическая постановка задачи корректна: параметры заданы точно, а модель описывает орбиту адекватно; и в данной работе мы сфокусируем наше внимание только на ошибках 3) и 4), т.е ошибках численного интегрирования.

Предметом нашего исследования будут методы получения таких дифференциальных уравнений, которые способны значительно повысить эффективность численных моделей орбитального движения. Эти методы называются методами теории специальных возмущений. Среди этих методов в небесно-механической практике широко применяются такие как: линеаризация и регуляризация, стабилизация Баумгарта, вариация координат (метод Энке) и постоянных, а также методы сглаживания. Именно их мы и рассмотрим в данной работе.

2. Трудности интегрирования классических уравнений

Уравнения орбитального движения в системе координат, связанной с массивным центральным телом, можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} + \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{F} + \mathbf{P}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор положения исследуемого тела, t — время, μ — гравитационный параметр, $\mathbf{F}$ — кеплеровский член, а $\mathbf{P}$ — возмущающие силы, причем $|\mathbf{P}| \ll |\mathbf{F}|$.

Интегрирование этих уравнений связано со следующими трудностями.

1. Правые части уравнений (1) представляют собой большие и быстроизменяющиеся функции даже для круговых орбит. Как известно, вычисляемые на компьютере большие величины содержат большие ошибки округления. Поэтому пошаговое численное интегрирование классических уравнений будет сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления.

2. Уравнения (1) имеют особенность в начале координат ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$). Для сильно эксцентричных эллиптических орбит в перицентре, при сближении с центральным телом, величины правых частей уравнений значительно и быстро возрастают. Поэтому интегрирование орбиты вблизи перицентра выполняется с малым шагом и большими ошибками.

3. Уравнения (1) неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом.

Предлагаемые в работе методы теории специальных возмущений полностью решают каждую из перечисленных проблем. Изложим общие идеи этих методов.

3. Методы теории специальных возмущений

3.1. Линеаризация и регуляризация

Цель методов линеаризации и регуляризации состоит в том, чтобы представить уравнения движения в линейном и, самое главное, в регулярном виде.

Рассмотрим сначала уравнения невозмущенного движения

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Предположим, что уравнения (2) имеют интегралы

$$\begin{array}{l} \mathbf{G}_i(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}_i \equiv \mathbf{0} \quad (i = 1, n) \\ H_j(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - h_j \equiv 0 \quad (j = 1, m). \end{array} \tag{3}$$

Условие независимости интегралов (3) не обязательно. Здесь $\mathbf{G}_i$ и H_j — векторные и скалярные интегральные функции соответственно, а $\mathbf{g}_i$ и h_j — интегральные параметры, которые в невозмущенном движении постоянны.

Далее введем временное и координатное преобразования:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad \mathrm{d}t = f(\mathbf{x})\mathrm{d}s, \tag{4}$$

которые позволяют перейти к новым переменным $\mathbf{u}$ и s.

Главная идея линеаризации и регуляризации состоит во введении в уравнения, записанные в новых переменных, интегральных соотношений (3). В результате уравнения принимают вид (Шефер В.А., 1991)

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{A}^{-1}(f^2\mathbf{F} + f^{-1}f'(\mathbf{A}\mathbf{u}' + \mathbf{A}'\mathbf{u}) - 2\mathbf{A}'\mathbf{u}' - \mathbf{A}''\mathbf{u}) +$$
$$+ \mathbf{A}^{-1}\sum_{i=1}^{n} N_i(\mathbf{G}_i - \mathbf{g}_i) + \mathbf{A}^{-1}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{M}_j(H_j - h_j), \tag{5}$$

где штрих означает производную по s, а N_i и $\mathbf{M}_j$ — неопределенные коэффициенты, которые задаются таким образом, чтобы уравнения принимали линейный и регулярный вид (Шефер В.А., 1991)

$$\mathbf{u}'' = \underbrace{k_1(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, h_1, \ldots, h_m)}_{\text{const}}\,\mathbf{u} + \underbrace{\mathbf{k}_2(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, h_1, \ldots, h_m)}_{\mathbf{const}}. \tag{6}$$

В возмущенном случае, применяя вышеизложенные преобразования, будем иметь слабонелинейные уравнения вида

$$\mathbf{u}'' = k_1(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, h_1, \ldots, h_m)\mathbf{u} + \mathbf{k}_2(\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n, h_1, \ldots, h_m) + \mathbf{A}^{-1}f^2\mathbf{P}. \tag{7}$$

Поскольку здесь интегральные параметры уже не являются постоянными и, кроме того, вследствие появления $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ правая часть становится функцией времени, систему (7) необходимо дополнить уравнениями

$$\mathbf{g}_i' = f\frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{P}, \quad h_j' = f\frac{\partial H_j}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{P}, \quad t' = f \quad (i = 1, n; j = 1, m).$$

Таким образом, в результате подбора преобразований (4), а также коэффициентов N_i и $\mathbf{M}_j$ можно получить многочисленное семейство систем дифференциальных уравнений вида (7). Среди таких систем широко используются на практике системы уравнений в переменных Шперлинга-Боде (Сильвер М.А., 1975) и Кустаанхеймо-Штифеля (Штифель Э.Л., Шейфеле Г., 1971). В первой

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}, \quad \mathrm{d}t = |\mathbf{x}|\mathrm{d}s,$$

а в качестве интегралов выступают интегралы энергии и Лапласа; во второй

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{u})\mathbf{u}, \quad \mathrm{d}t = |\mathbf{x}|\mathrm{d}s,$$

где $\mathbf{L}$ — так называемая матрица Кустаанхеймо-Штифеля; а приведение уравнений к виду (7) оказывается возможным при использовании лишь интеграла энергии.

3.2. Сглаживающие преобразования

Сглаживающие преобразования применяют к дифференциальным уравнениям для того, чтобы понизить скорость изменения их правых частей, что позволяет заметно повысить точность численного интегрирования.

Сглаживающие преобразования имеют вид (Баумгарт Й., Штифель Э.Л., 1974)

$$\mathrm{d}t = f(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\mathrm{d}s. \tag{8}$$

Применение преобразования (8) фактически предполагает переход к новой независимой переменной s. После преобразования уравнения принимают вид

$$\mathbf{x}'' = f^2(\mathbf{F} + \mathbf{P}) + f^{-1}f'\mathbf{x}'. \tag{9}$$

Для приведения в соответствие координат $\mathbf{x}$ с физическим временем t систему (9) необходимо пополнить уравнением $t' = f$.

Среди небесных механиков широко используются такие преобразования, где в качестве f выбираются следующие величины: $|\mathbf{x}|$ (эксцентрическая аномалия); $|\mathbf{x}|^{3/2}$ (эллиптическая аномалия); $|\mathbf{x}|^2$ (истиная аномалия); $|\dot{\mathbf{x}}|^{-1}$ (дуга орбиты).

3.3. Метод Энке

Основная идея метода Энке (1852) состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка к реальной эволюционирующей орбите. Для отклонений координат реальной орбиты от соответствующих величин на опорной траектории составляется система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численно.

По существу в методе Энке предпринимается попытка интегрировать малые возмущения, с тем чтобы увеличить шаг интегрирования и получить дополнительные разряды, чтобы ослабить, таким образом, влияние ошибок округления на приближенное решение.

В классическом методе Энке в качестве опорной выбирается кеплеровская орбита $\mathbf{x}_F = \mathbf{x}_F(t)$, описываемая уравнениями

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}_F}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_F). \tag{10}$$

Тогда дифференциальные уравнения для возмущений $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_F$ (в возмущенном случае) принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_F + \delta\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_F) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x}_F + \delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_F + \delta\dot{\mathbf{x}}). \tag{11}$$

Следует заметить, что при малых $\delta\mathbf{x}$ кеплеровские члены в (11) — близкие величины. В то же время их малая разность будет значительно меньше каждого из них и, следовательно, она будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Для разрешения этой проблемы проводят дополнительные преобразования, которые приводят разность кеплеровских членов к некой функции $\mathbf{\Phi}$, пропорциональной возмущениям $\delta\mathbf{x}$, либо $|\delta\mathbf{x}|$; и уравнения приобретают окончательный вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\delta\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{\Phi}(\delta\mathbf{x}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{x}_F + \delta\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_F + \delta\dot{\mathbf{x}}). \tag{12}$$

Хотелось бы отметить, что методика Энке не ограничена классическими уравнениями. С тем же успехом ее можно применить, например, к уравнениям (7) (Бордовицына Т.В. и др., 2001).

3.4. Метод Баумгарта

Стабилизация Баумгарта (1973) направлена на то, чтобы ослабить (или в лучшем случае устранить) влияние ляпуновской неустойчивости на ошибки численного интегрирования. Также как и в случае линеаризации и регуляризации, основная идея стабилизирующих методов заключается в привлечении к численному интегрированию известных интегралов движения как дополнительной информации о решении.

Известно, что при интегрировании орбитального движения очень важно, чтобы сохранялось интегральное соотношение для энергии h, т.е. чтобы выполнялось условие

$$\Delta H \equiv H(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - h = \frac{|\dot{\mathbf{x}}|^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} - h = 0. \tag{13}$$

Обычные численные методы интегрирования "ничего не знают" об этом соотношении и ошибки интегрирования таковы, что оно, вообще говоря, не сохраняется и ΔH со временем неограниченно возрастает по величине. С другой стороны, показано, что именно через отклонение ΔH в энергетическом соотношении проявляется, главным образом, влияние ляпуновской неустойчивости на численный процесс (Авдюшев В., 2003).

Согласно стабилизации Баумгарта в дифференциальные уравнения движения искусственно вводятся возмущающие члены, призванные сохранять соотношение (13). В результате стабилизированные уравнения принимают вид (Баумгарт Й., 1973)

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{P} - \gamma(H - h)\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right)^{-1}, \tag{14}$$

где γ — неопределенный параметр, который выбирается опытным путем[1].

Поскольку в возмущенном случае интегральный параметр h не постоянен, система (14) должна быть дополнена уравнением

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{P}.$$

Представленный вид дифференциальных уравнений (14) общий, поэтому их также можно использовать для любых других интегралов. В нашем же случае уравнения приобретают конкретный и более компактный вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \mathbf{F} + \mathbf{P} - \gamma\Delta H\frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|^2} \quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P},$$

где ΔH вычисляется по формуле (13).

[1] Хотя экспериментально показано, что для эффективного интегрирования слабовозмущенных орбит γ должно быть равно среднему движению (Авдюшев В., 2003).

3.5. Метод вариации постоянных

Наконец рассмотрим известный метод вариации постоянных, изначально применяемый в теории общих возмущений.

Кеплеровское решение, описываемое уравнениями (2), можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{c}), \tag{15}$$

где $\mathbf{c}$ — некоторый вектор постоянных, определяемый из начальных условий задачи.

Согласно методу вариации постоянных возмущенное решение системы (1) также представляется в виде (15) с той лишь разницей, что компоненты вектора $\mathbf{c}$ здесь рассматриваются как переменные, описываемые своими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{C}(t, \mathbf{c}, \mathbf{P}). \tag{16}$$

Технология метода как раз и состоит в получении этих дифференциальных уравнений.

В слабовозмущенном движении $\mathbf{c}$ — медленноменяющиеся переменные, поэтому их дифференциальные уравнения (16) будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения (1).

4. Рекомендации по использованию

Безусловно, все рассмотренные нами преобразования усложняют систему дифференциальных уравнений движения и, кроме того, в некоторых случаях увеличивают ее порядок. Конечно же, это сказывается на быстродействие численного моделирование. Однако с практической точки зрения все эти усложнения не существенны в сравнении со сложностью возмущающей части $\mathbf{P}$, которая присутствует во всех уравнениях.

В данном разделе мы бы хотели выделить классы задач, в которых целесообразно использование изложенных методов.

Методы линеаризации и регуляризации могут быть полезны при интегрировании сильновытянутых орбит на длительных интервалах времени, где имеют место многочисленные тесные сближения исследуемого объекта с центральным телом (астероидные задачи). Интересно отметить, что эти методы в большинстве случаев приводят уравнения к виду гармонического осциллятора, невозмущенное решение которого, как известно, устойчиво по Ляпунову. Следовательно, в этом случае методы линеаризации и регуляризации будут обладать стабилизирующим эффектом и их использование должно быть эффективно даже при численном исследовании кругового движения (спутниковые задачи).

Применение сглаживающих преобразований целесообразно лишь при численном моделировании сильноэксцентричного движения, например, в задачах динамики особых астероидов. Для почти круговых орбит сглаживающие преобразования не эффективны.

Как показывают численные эксперименты, стабилизация Баумгарта эффективна лишь в спутниковых задачах, причем на длительных интервалах времени, порядка 1000 оборотов объекта и больше. При высоком быстродействии она позволяет повысить точность интегрирования на несколько порядков и выше.

Метод вариации постоянных весьма полезен при интегрировании малых и гладких возмущений (вариаций), какие, например, имеют место в задачах спутниковой динамики. В таких задачах уравнения в вариациях можно интегрировать с большим шагом, что позволяет существенно повысить быстродействие численного процесса.

Методы стабилизации, линеаризации и регуляризации, а также методы сглаживания при использовании численных методов высокого порядка не позволяют повысить уровень наивысшей точности, определяемой влиянием ошибок округления, поскольку применение названных методов несущественно изменяет поведение этих ошибок. Однако, следует заметить, что этот уровень точности при интегрировании преобразованных уравнений достигается значительно быстрее, чем в классическом случае. Поэтому применение данных методов целесообразно, если необходимо повысить быстродействие численного моделирования.

Применение метода Энке как раз направлено на борьбу с ошибками округления и в силу своей специфики метод в отличии от вышеназванных способен влиять на уровень наивысшей точности и, как показывает практика, с его помощью удается повысить этот уровень на несколько порядков независимо от типа исследуемой задачи.

Литература

Шефер В.А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов. // Астрон. журн. 1991. Т. 68. P. 197–205.

Сильвер М.А. (Silver M.A.) A Short Derivation of the Sperling-Burdet Equations // Cel. Mech. 1975. Vol. 11 (4). P. 339–341.

Штифель Э.Л., Шейфеле Г. (Stiefel E.L., Scheifele G.) Linear and Regular Celestial Mechanics. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York. 1971.

Баумгарт Й., Штифель Э.Л. (Baumgarte J., Stiefel E.L.) Examples of Transformations Improving the Numerical Accuracy of the Integration of Differential Equations // Lect. Notes in Math. 1974. Vol. 362. P. 207–236.

Энке Й.Ф. (Encke J.F.) Über eine neue Methode der Berechung der Planetenstörungen // Astr. Nach. 1852. Vol. 33. P. 377–398.

Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А., Черницов А.М. (Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A.) New Trends in Numerical Simulation of the Motion of Small Bodies of the Solar System // Cel. Mech. 2001. Vol. 80 (3). P. 227–247.

Баумгарт Й. (Baumgarte J.) Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion // Cel. Mech. 1973. Vol. 5 (4). P. 490–501.

Авдюшев В. (Avdyushev V.) Numerical Stabilization of Orbital Motion // Cel. Mech. 2003. Vol. 87 (4). P. 383–409.