

УДК 523.24

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ БЛИЗКИХ СПУТНИКОВ ЮПИТЕРА

© 2007 г. Авдюшев В.А., Баныщикова М.А.

*НИИ прикладной математики и механики Томского государственного университета,  
пр. Ленина, 36, Томск, Россия, 634050; e-mail: astrodep@niipmm.tsu.ru*

PACS: 95.10.Ce, 96.30.L-, 95.10.Eg, 91.10.Sp

### Аннотация

Исследуются некоторые проблемы в определении орбит близких спутников, которые связаны со сложным характером поведения целевой функции, сильно овражной и с многочисленными минимумами, что имеет место, когда орбита спутника определяется по ряду разрозненных наблюдений, распределенных на достаточно длительном интервале времени. Эти особенности в обратных задачах рассматриваются на примере динамики близких спутников Юпитера: Амальтеи, Тебы, Адрастеи и Метиды. Построены численные модели движения спутников, параметры которых определены по имеющимся на данный момент наземным наблюдениям. Предлагается составной подход для эффективного поиска минимума целевой функции, позволяющий даже при довольно грубых начальных приближениях получить соответствующие оценки орбитальных параметров всего за несколько десятков итераций. Показано, что при наличии двух групп наблюдений (Адрастея) формальная минимизация целевой функции дает множество решений, из которых фактически не удается выбрать наилучшее с точки зрения представления орбитального движения. Даются другие оценки, характеризующие специфику исследуемых обратных задач.

### Введение

Одна из главных трудностей в определении орбиты любого близкого спутника вызвана его быстрым движением около планеты: частота обращения спутника настолько высока, что всего за год он совершает порядка тысячи оборотов и более. Эта особенность в движении приводит к тому, что в обратных задачах целевая функция, минимизируемая по орбитальным параметрам, имеет сильно овражную структуру, что выражается в плохой обусловленности матрицы квадратичной формы, аппроксимирующей целевую функцию. Вместе с тем из теории оптимизации известно, что минимизация овражных функций весьма затруднительна и требует привлечение специальных подходов. При использовании традиционных методов типа Гаусса–Ньютона для решения таких задач итерационные схемы методов обычно плохо сходятся и причем имеют малые области

сходимости, т.е. фактически их применение возможно только при очень хороших начальных приближениях.

Другая трудность связана с неоднозначностью определения спутниковой орбиты, что имеет место, когда орбитальные параметры определяются по нескольким группам наблюдений, рассредоточенным на достаточно длительном временном интервале. В данном случае целевая функция может иметь довольно много почти равнозначных минимумов, среди которых трудно узнаваем тот, что соответствует наилучшим оценкам орбитальных параметров. Поэтому даже если итерационная схема сходится, практическая ценность полученной орбиты не может быть безусловной.

В данной работе эти особенности в обратных задачах рассматриваются на примере динамики близких спутников Юпитера: Амальтеи (J5), Тебы (J14), Адрастеи (J15) и Метиды (J16).

Уже первые наблюдатели Амальтеи, Тебы, Адрастеи и Метиды (Barnard, 1892; Jewitt et al., 1979; Synnott, 1984) предпринимали попытки определить их орбитальные элементы по немногочисленным наблюдениям. Каждые новые наблюдения стимулировали исследователей к очередному уточнению спутниковых орбит. Поэтому орбита пятого спутника Юпитера, открытого еще в 1892 г. и наблюдаемого на протяжении уже более ста лет, изучена лучше, чем орбиты трех других близких спутников, которые были обнаружены только в 1979 г. Спутник Теба в отличие от Адрастеи и Метиды имеет гораздо более плотный ряд наблюдений, обработка которых не вызывает особых затруднений, и его орбита также определяется достаточно уверенно. Вместе с тем два последних спутника наблюдались настолько редко, что на довольно длительном интервале времени моменты их наблюдений рассредоточены всего в нескольких группах. В этой связи обработка таких наблюдений с целью уточнения орбитальных параметров сопряжена с указанными выше трудностями.

Ближние спутники движутся внутри орбит галилеевых спутников по почти круговым йовиэкваториальным орбитам на расстоянии от Юпитера 1.8–3.1 его радиусов. Ввиду чрезвычайной близости спутников к Юпитеру их движение, главным образом, подчинено мощному гравитационному влиянию массивной планеты, вследствие чего частоты обращения спутников очень высоки и соответствующие им периоды находятся в пределах 0.3–0.7 сут.

Первые модели движения Амальтеи были весьма просты и учитывали лишь возмущения первого порядка от сжатия Юпитера (Tisserand, 1893; Cohn, 1897). В дальнейшем для описания орбиты спутника все чаще стали прибегать к кинематическим моделям, в которых используются формулы прецессирующих кеплеровских эллипсов (Van Woerkom, 1950; Sudbury, 1969; Jacobson, 1994). Несмотря на примитивность этих моделей, они довольно хорошо (даже в соответствии с точностью современных наблюдений) представляют движение Амальтеи и поэтому до сих пор применяются для обработки наблюдений спутника (Jacobson, 1994). Впрочем, следует заметить, что П.В. Садбери (Sudbury, 1969), используя модель прецессирующих эллипсов, потерпел неудачу в попытке объединить в рамках одной системы орбитальных параметров ранние наблюде-

ния с временным пробелом около 30 лет. Выдвигались гипотезы (Sudbury, 1969; Pascu, 1977), объясняющие причину этой неудачи, которые по сути сводились к несовершенству используемой модели. Тем не менее, на наш взгляд, наиболее вероятная причина фиаско кроется в характерной особенности обработки спутниковых наблюдений, о чем будет сказано ниже в основной части работы. Кроме того, следует заметить, что Р.А. Якобсону все же удалось преодолеть эту трудность (Jacobson, 1994), не прибегая при этом к более сложным моделям. Предпринимались также попытки создания динамических моделей на основе высокоточных аналитических теорий движения Амальтеи (Кирюшенков, 1969; Аразов, 1972; Breiter, 1996), которые, насколько нам известно, не получили широкого распространения в астрономической практике. По-видимому, аналитические теории на данный момент еще дают настолько избыточно высокую точность (в сопоставлении с точностью наблюдений), что модели, построенные на их основе, пока остаются не востребованными. Что касается спутников Тебы, Адрастеи и Метиды, то для интерпретации их движения, как правило, используют прецессирующие эллипсы (Jacobson, 1994).

В данной работе мы прибегаем к численному интегрированию спутниковых орбит (Баньщикова, Авдюшев, 2006), где в качестве определяемых параметров для каждого спутника рассматриваем компоненты вектора его начального динамического состояния в фазовом пространстве прямоугольных координат и скоростей. Численные модели основаны на высокоточных дифференциальных уравнениях движения, в которых учитываются основные гравитационные силы, а также релятивистские эффекты. Как и другие авторы мы определяем орбитальные параметры в рамках задачи наименьших квадратов по имеющимся в настоящее время наземным наблюдениям спутников, однако для эффективного поиска решения задачи мы применяем предлагаемый нами составной подход, включающий в себя известные итерационные методы Гаусса–Ньютона и градиентного спуска совместно с так называемым проекционным методом. Вместе с тем минимизируемые целевые функции задачи исследовались на предмет множественности минимумов, а также приемлемости соответствующих оценок орбитальных параметров для описания спутникового движения.

## Проблема неоднозначного определения орбит

Пусть в некотором пространстве  $\mathbf{p}$  известны  $N$  положений небесного объекта  $\mathbf{p}_i^O$  в моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), при этом орбитальное движение объекта описывается моделью

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}, E), \quad E = n(t - t_0) + E_0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}$  — орбитальные параметры, однозначно определяющие траекторию небесного тела;  $E$  — быстрая переменная;  $n$  — частота, а  $E_0$  — переменная  $E$  в эпоху  $t_0$ . При этом  $\mathbf{p}^C$   $2\pi$ -периодична по  $E$ , т.е.  $\mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}, E) = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}, E + 2\pi)$ .

Положим пока, что параметры  $\mathbf{q}$  не зависят от  $n$ , и рассмотрим квадраты расстояний  $\rho_i^2 = \rho^2(\mathbf{p}_i^O, \mathbf{p}_i^C)$  между положениями  $\mathbf{p}_i^O$  и  $\mathbf{p}_i^C$  как функции  $n$ :  $\rho_i^2 = \rho_i^2(n)$ . Нетрудно

видеть, что функции  $\rho_i^2$  периодичны по  $n$  с соответствующими периодами  $2\pi/(t_i - t_0)$ . В силу этого, очевидно, среднеквадратическая величина

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i^2, \quad (2)$$

будет иметь бесконечное множество минимумов вдоль  $n$ . Следовательно, минимизация  $\sigma^2$  по  $n$  будет давать множество решений, из которых только одно соответствует истинной частоте  $\bar{n}$ .

Орбиты близких спутников могут быть также представлены в виде (1), где, однако, некоторые из параметров  $\mathbf{q}$  (такие как, например, большая полуось или фокальный параметр) непосредственно связаны с частотой  $n$ . Поэтому, вообще говоря,  $\rho_i^2$  оказываются не периодичными по  $n$ . Тем не менее при достаточно больших величинах  $t_i - t_0$  функции  $\rho_i^2$  в окрестности истинной частоты  $\bar{n}$  будут очень близки к рассмотренным выше периодическим составляющим и, следовательно, проблема множественности минимумов для  $\sigma^2$  здесь также будет иметь место.

Характерная особенность в поведении  $\sigma^2$  относительно  $n$ , раскрывает генезис проблемы множественности решений, которая реально может возникать в обратных задачах динамики близких спутников. Действительно, на практике орбитальные параметры спутника, как правило, определяются из условия достижения минимума некоторой функции вида (2), которая выражает степень близости наблюдаемых и моделируемых положений объекта в пространстве  $\mathbf{p}$ . По крайней мере, один из параметров обязательно связан с частотой  $n$ , но это обстоятельство как раз и становится причиной неоднозначного определения спутниковой орбиты.

Рассмотрим подробнее проблему множественности решений на примере круговой задачи, где легко удастся получить довольно ясные и в то же время полезные для практики результаты, позволяющие, кроме того, оценить всю важность исследуемой проблемы.

## Круговая задача

В комплексной плоскости круговую орбиту можно представить как

$$x = ae^{iE}, \quad E = n(t - t_0) + E_0, \quad n = \sqrt{\mu/a^3}, \quad (3)$$

где  $x$  — положение точки;  $a$  — радиус орбиты (большая полуось);  $E$  — быстрая фаза (аномалия);  $n$  — частота обращения (среднее движение);  $t$  — время;  $E_0$  — фаза на начальный момент времени  $t_0$ , а  $\mu$  — гравитационный параметр.

Рассмотрим семейство орбит вида (3) и оценим величину разности положений  $x$  и  $\bar{x}$  на орбитах  $(a, E_0)$  и  $(\bar{a}, \bar{E}_0)$  соответственно. Согласно (3) разность  $\delta x$  нетрудно преобразовать к виду

$$\delta x = x(t, a, E_0) - \bar{x}(t, \bar{a}, \bar{E}_0) = \bar{a}e^{iE}[1 + \alpha - e^{-i(\lambda\nu + \beta)}], \quad (4)$$

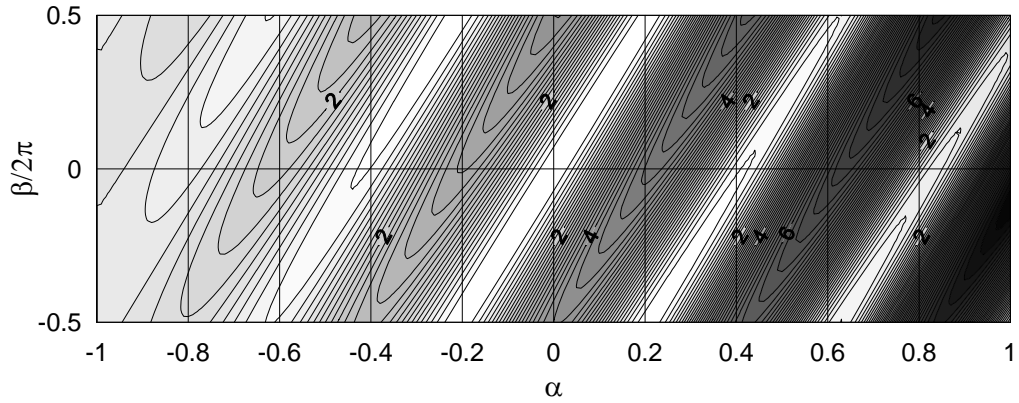


Рисунок 1 — Поведение функции  $f = \alpha^2 + 2(1 + \alpha)(1 - \cos \varphi)$  при  $\lambda = 10$

где  $\alpha = (a - \bar{a})/\bar{a}$ ;  $\beta = E_0 - \bar{E}_0$ ;  $\nu = (n - \bar{n})/\bar{n}$ , а  $\lambda = \bar{n}(t - t_0)$ . Полагая, что  $\alpha \ll 1$ , с точностью до первого порядка малости будем иметь оценку  $2\nu = -3\alpha$ . Тогда в соответствии с (4) квадрат величины  $\delta x$  будет

$$|\delta x|^2 = \bar{a}^2[\alpha^2 + 2(1 + \alpha)(1 - \cos \varphi)], \quad \varphi = \frac{3}{2}\lambda\alpha - \beta. \quad (5)$$

Отсюда видно, что поведение  $|\delta x|^2$  при малых  $\alpha$ , главным образом, будет определяться функцией

$$f = \alpha^2 + 2(1 + \alpha)(1 - \cos \varphi). \quad (6)$$

На рис. 1 показано поведение функции  $f$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\beta$  при  $\lambda = 10$ . Как видно, рельеф поверхности, задаваемый  $f$ , имеет овражную структуру. При этом следует заметить, что увеличение  $\lambda$  приводит к повышению степени овражности  $f$ .

Теперь положим, что решение  $\bar{x}$  представляет наблюдаемые положения небесного объекта на комплексной плоскости в некоторые моменты  $t_i$ , и поставим перед собой задачу отыскать такие значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , которые бы доставляли минимум целевой функции

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\delta x|_i^2, \quad (7)$$

где  $N$  — число наблюдений. Будем рассматривать такие наблюдения, для которых временная удаленность от начальной эпохи  $|\lambda| \gg 0$ . Тогда поведение  $\sigma^2$  в зависимости от  $\alpha$  и  $\beta$  будет определяться, главным образом, тригонометрическими составляющими. Поэтому фактически нас должна интересовать функция вида

$$f_{\cos} = 1 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \varphi_i, \quad \varphi_i = \frac{3}{2}\lambda_i\alpha - \beta. \quad (8)$$

Следует заметить, что при достаточно больших  $\lambda_i$ , отличающихся друг от друга на величины меньше порядка  $\alpha^{-1}$ , функция будет вести себя почти как одна тригонометрическая составляющая:

$$f_{\cos} \approx 1 - \cos \varphi,$$

где в качестве  $\lambda$  выбирается одно из значений  $\lambda_i$ . Следовательно, все наблюдения с такими  $\lambda_i$  можно объединить в группу и рассматривать как одно наблюдение. Если таких групп несколько, то поведение функции можно представить как

$$f_{\cos} \approx F \equiv 1 - \sum_{j=1}^M k_j \cos(\omega_j \alpha - \beta), \quad k_j = \frac{N_j}{N}, \quad \omega_j = \frac{3}{2} \lambda_j, \quad (9)$$

где  $M$  — число групп;  $k_j$  — вес  $j$ -группы, определяемый числом наблюдений в группе  $N_j$ , а  $\lambda_j$  — одно из значений  $\lambda$   $j$ -группы. При этом будем полагать, что  $\lambda_1 \ll \lambda_2 \ll \dots \ll \lambda_M$ .

Используя известные тригонометрические тождества,  $F$  можно переписать как

$$F = 1 - A \cos(\beta + \psi), \quad \text{где } A = \sqrt{c^2 + s^2}, \quad \psi = \arctg(s/c), \quad (10)$$

$$c = \sum_{j=1}^M k_j \cos(\omega_j \alpha), \quad s = \sum_{j=1}^M k_j \sin(\omega_j \alpha).$$

Отсюда  $F$   $2\pi$ -периодична по  $\beta$  и при фиксированном  $\alpha$  имеет единственный минимум на полуинтервале  $(\beta_0 - \pi, \beta_0 + \pi]$  для любых  $\beta_0 \in (-\infty, +\infty)$ . Следовательно, область исследования  $F$  по  $\beta$  можно ограничить до любого полуинтервала длиной в  $2\pi$ .

Введем характеристику

$$\Phi(\alpha) = \min_{\beta \in (-\pi, +\pi]} F(\alpha, \beta), \quad (11)$$

которая примечательна тем, что не зависит от выбора начальной эпохи. Действительно, изменение начальной эпохи  $t_0 \rightarrow t_0 + \Delta t$  согласно (9) приводит к преобразованию сдвига вдоль  $\beta$ :

$$F(\alpha, \beta)|_{t_0 + \Delta t} = F(\alpha, \beta + \Delta\beta)|_{t_0}, \quad \text{где } \Delta\beta \propto \alpha \Delta t.$$

Тогда ввиду указанных выше свойств  $F$

$$\min_{\beta \in (-\pi, +\pi]} F(\alpha, \beta)|_{t_0 + \Delta t} = \min_{\beta \in (-\pi, +\pi]} F(\alpha, \beta + \Delta\beta)|_{t_0} = \Phi(\alpha).$$

Заметим, что характеристика  $\Phi(\alpha)$  является однозначной функцией  $\alpha$ , поэтому минимумы  $\Phi(\alpha)$  по  $\alpha$  будут однозначно соответствовать минимумам  $F(\alpha, \beta)$  по  $\alpha$  и  $\beta \in (-\pi, +\pi]$ . Из (10) легко получить формулу для  $\Phi$ :

$$\Phi(\alpha) = 1 - A(\alpha). \quad (12)$$

Нетрудно также видеть, что коэффициенты  $c$  и  $s$  можно представить как:

$$c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\omega_i \alpha), \quad s = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\omega_i \alpha).$$

Необходимо также обратить особое внимание на то, что рельеф поверхности, задаваемой функцией  $F(\alpha, \beta)$ , в окрестностях минимумов имеет сильно овражную структуру. Это, главным образом, обусловлено большими числами  $\omega_j$ . Действительно, с точностью

до малых второго порядка поведение  $F(\alpha, \beta)$  в окрестности тривиального минимума  $\alpha = \beta = 0$  может быть представлено функцией

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\kappa_{11}\alpha^2 + 2\kappa_{12}\alpha\beta + \kappa_{22}\beta^2), \quad (13)$$

где

$$\kappa_{11} = \sum_{j=1}^M k_j \omega_j^2, \quad \kappa_{12} = - \sum_{j=1}^M k_j \omega_j, \quad \kappa_{22} = 1. \quad (14)$$

Уравнение  $Q(\alpha, \beta) = \text{const}$  описывает некоторый эллипс в плоскости  $(\alpha, \beta)$  с центром в тривиальном минимуме. Из аналитической геометрии известно, что квадрат отношения  $C$  большой полуоси эллипса к малой представим в виде

$$C^2 = \frac{\kappa_{11} + \kappa + \kappa_{22}}{\kappa_{11} - \kappa + \kappa_{22}}, \quad \text{где} \quad \kappa = \sqrt{4\kappa_{12}^2 + (\kappa_{11} - \kappa_{22})^2}.$$

Отсюда, учитывая (14), при достаточно больших  $\omega_j$  будем иметь

$$C^2 \sim \kappa_{11}. \quad (15)$$

Впрочем, степень овражности можно слегка уменьшить путем выбора начальной эпохи  $t_0$ . Согласно приближенной оценке (15) отношение  $C^2$  будет близко к минимальному при

$$t_0 = \sum_{j=1}^M k_j t_j,$$

где  $t_j$  — один из временных моментов наблюдений  $j$ -группы. Фактически это означает, что для уменьшения овражности  $F(\alpha, \beta)$  в качестве начальной эпохи следует выбирать среднее арифметическое всех моментов наблюдений. Из известных нам источников об этом впервые упоминается в (Черницов, 1975). Кстати, такой выбор начальной эпохи приводит квадратическую форму (13) к каноническому виду, поскольку  $\kappa_{12}$  обращается в нуль.

Для исследования функции  $F$  удобнее рассматривать ее в виде

$$F = 1 - \sum_{j=1}^M k_j \cos((l_j - l_0)\zeta - \beta), \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{3}{2}\alpha(\lambda_M - \lambda_1), \quad l_j = \frac{\lambda_j - \lambda_1}{\lambda_M - \lambda_1} \quad (j = 0, \dots, M), \quad \lambda_0 = 0.$$

Здесь величины  $l_0$  и  $l_j \in [0, 1]$  ( $j = 1, \dots, M$ ) представляют временное распределение соответственно начальной эпохи и групп наблюдений относительно первой группы.

Рассмотрим случай двух групп наблюдений ( $M = 2$ ) одинакового веса ( $k = 1/2$ ). Этот случай соответствует распределению имеющихся на данный момент наземных наблюдений близкого спутника Юпитера Адрастеи (J15). На рис. 2 представлено поведение функции  $F(\zeta, \beta)$  (16) при различных  $l_0 \in [0, 1/2]$ .

Из рисунка видно, что изменение параметра  $l_0$ , т.е. изменение начальной эпохи, приводит к сдвигу рельефа поверхности  $F(\zeta, \beta)$  вдоль  $\beta$ . При этом меняется и степень

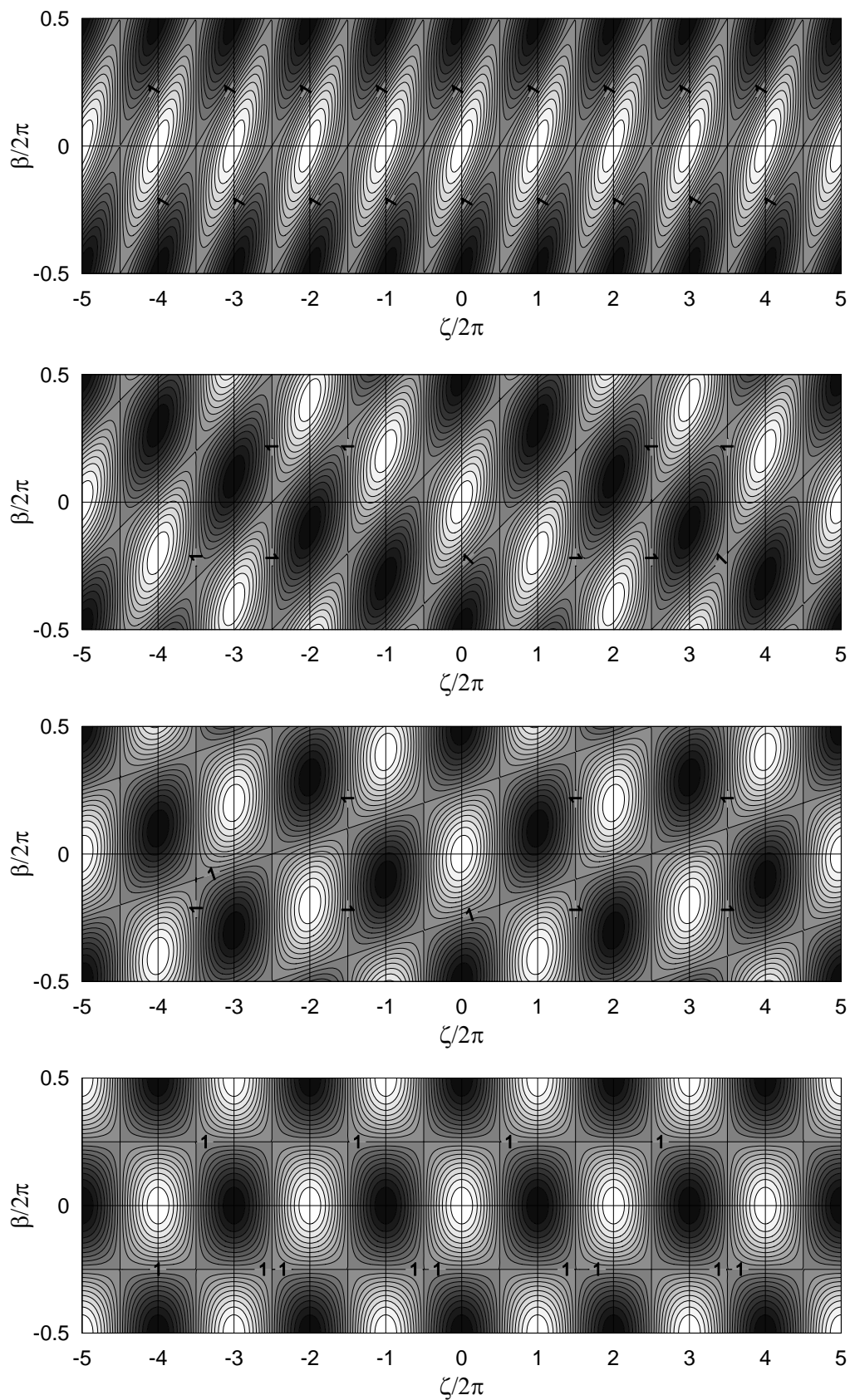


Рисунок 2 — Поведение  $F(\zeta, \beta)$  для двух групп наблюдений одинакового веса и различных  $l_0$ : 0.0, 0.2, 0.4 и 0.5 (сверху вниз соответственно) (спутник Адрастея)



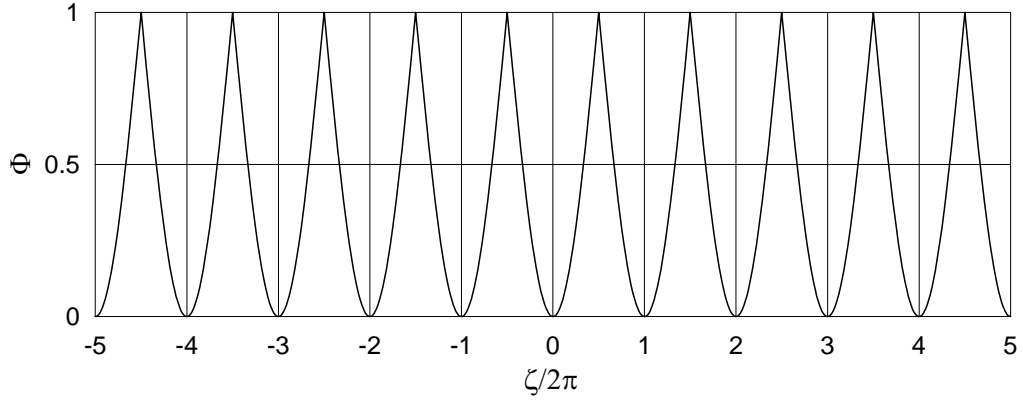


Рисунок 3 — Поведение  $\Phi(\zeta)$  для двух групп наблюдений одинакового веса (спутник Адрастея)

овражности рельефа: так, овраги при  $l_0 = 0$  (начальная эпоха вблизи моментов первой группы наблюдений) заметно более вытянутые, нежели при  $l_0 = 1/2$  (начальная эпоха находится в центре рассматриваемого временного интервала). Эти результаты подтверждают наши выводы, сделанные выше, о поведении функции  $F$ .

В то же время характеристика  $\Phi$  остается неизменной для любых  $l_0$  (рис. 3). В общем случае, при различных  $k_1 = k$  и  $k_2 = 1 - k$ , где  $k \in (0, 1)$ , характеристика  $\Phi$  согласно (10) и (12) представима как

$$\Phi = 1 - \sqrt{1 - 2k(1 - k)(1 - \cos \zeta)}.$$

Из наличия тригонометрической составляющей в характеристике  $\Phi$  следует, что для любых двух групп наблюдений существует множество равнозначных минимумов  $F$ , которые соответствуют значениям  $\zeta = 2\pi m$  или

$$\alpha = \frac{4\pi m}{3(\lambda_M - \lambda_1)} = \frac{2m}{3R}, \quad (17)$$

где  $m$  — целые числа, а  $R$  — число оборотов объекта за  $\lambda_M - \lambda_1$ .

Случай трех групп наблюдений (даже равновесных) гораздо более сложен для исследования. Поэтому рассмотрим только частный случай, соответствующий распределению наземных наблюдений спутника Метиды (J16):  $k_1 = 0.28$ ,  $k_2 = 0.16$ ,  $k_3 = 0.56$ ,  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 0.92$ ,  $l_3 = 1$ .

Характеристика  $\Phi$  (рис. 4) также как и в случае двух групп наблюдений имеет множество минимумов. Правда, отличительной особенностью характеристики для трех групп является то, что эти минимумы не равнозначны, и на рассматриваемом интервале изменения  $\zeta$  явно выделяется абсолютный минимум, который соответствует истинному решению.

Впрочем, если распределение групп наблюдений таково, что величины  $l_j$  удовлетворяют резонансному соотношению типа

$$\sum_{j=2}^M m_j l_j = 0, \quad (18)$$

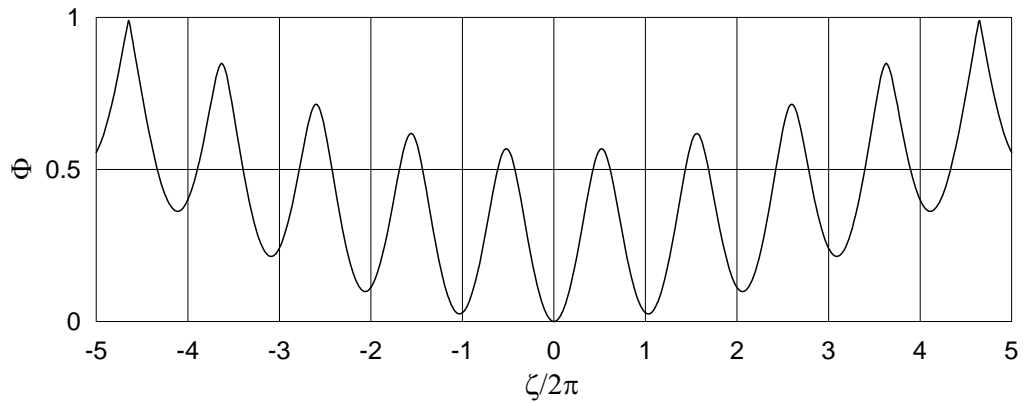


Рисунок 4 — Поведение  $\Phi(\zeta)$  для трех групп наблюдений (спутник Метиды)

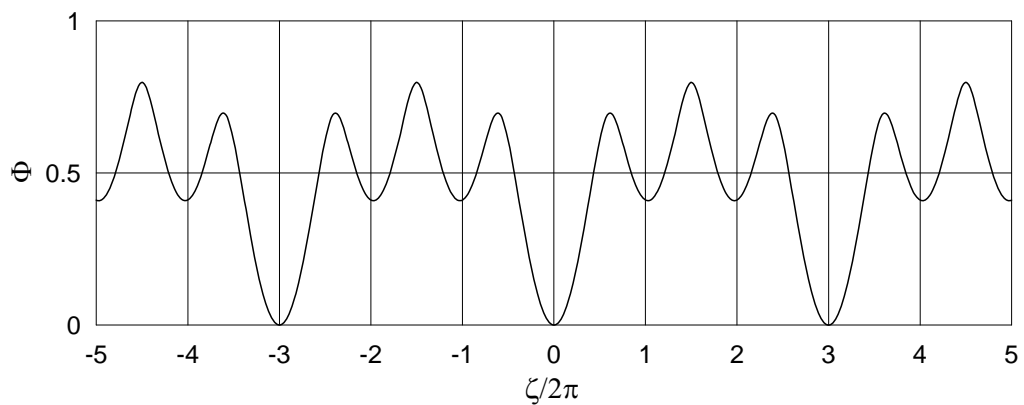


Рисунок 5 — Поведение  $\Phi(\zeta)$  для трех групп наблюдений с резонансным распределением:  $l_1 = 0$ ,  $l_2 = 2/3$ ,  $l_3 = 1$

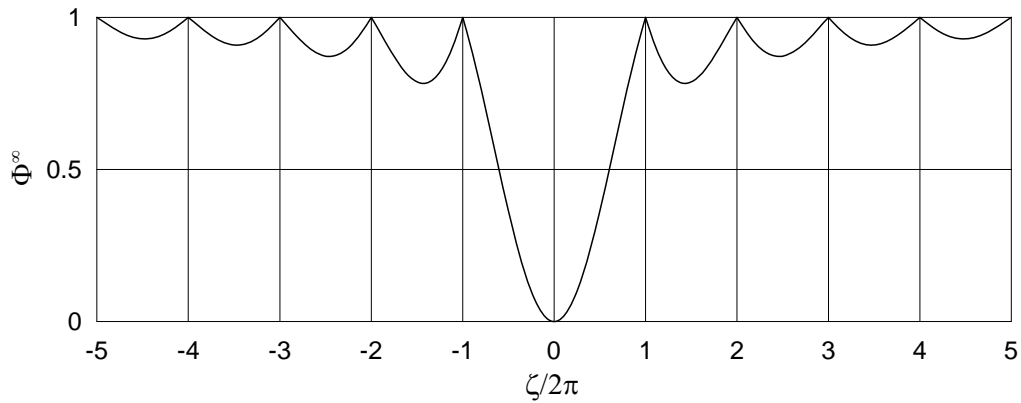
где  $m_j \neq 0$  — целые числа, то может существовать множество абсолютных минимумов  $F$ . Причем плотность распределения таких минимумов вдоль  $\zeta$  будет тем выше, чем ниже будет порядок резонанса или чем меньше будут величины  $m_j$ . Пример резонансного распределения групп наблюдений для  $M = 3$  представлен на рис. 5, где использованы те же веса, что и для наблюдений Метиды. Здесь имеет место резонанс  $l_2/l_3 = 2/3$ , который приводит к множеству равномерно распределенных вдоль  $\zeta$  абсолютных минимумов с интервалом  $6\pi$ . Очевидно, вследствие повышения порядка резонанса (18) увеличение числа разрозненных групп  $M$  будет уменьшать плотность абсолютных минимумов.

Интересен также случай многочисленных равномерно распределенных и равновесных групп. Нетрудно показать, что при достаточно большом  $M$

$$F \approx F^\infty \equiv F|_{M \rightarrow \infty} = 1 - \frac{1}{\zeta} [\sin((1 - l_0)\zeta - \beta) - \sin(-l_0\zeta - \beta)].$$

Тогда

$$\Phi \approx \Phi^\infty \equiv \Phi|_{M \rightarrow \infty} = 1 - \left| \frac{2}{\zeta} \sin \frac{\zeta}{2} \right|.$$

Рисунок 6 — Поведение  $\Phi^\infty(\zeta)$ 

Поведение  $\Phi^\infty$  представлено на рис. 6, откуда видно, что даже при плотном распределении групп наблюдений функция  $F$  также будет иметь множество минимумов, среди которых явно выделяется единственный абсолютный минимум.

Из рис. 6 можно извлечь несколько иную, но также весьма полезную для практики информацию о поведении целевой функции. Допустим, для минимизации целевой функции  $\sigma^2$  используется какой-либо численный (итерационный) метод типа Гаусса–Ньютона. Тогда график на рисунке фактически дает предельные оценки максимально возможных значений  $\zeta$ , при которых итерационный метод еще может иметь сходимость к тривиальному минимуму. Если начальное приближение орбитальных параметров таково, что  $|\zeta| > 2\pi$  или, иначе говоря, ошибка в большой полуоси настолько большая, что

$$|\alpha| > \frac{2}{3} \frac{1}{R},$$

то, скорее всего, метод не будет сходящимся даже при плотном временном распределении моментов наблюдений. Очевидно, интервал сходимости (по  $\alpha$ ) к тривиальному минимуму будет только укорачиваться при прореживании наблюдательных данных (см., например, рис. 3–5). Мы видим в этом возможную причину неудачи Садбери (Sudbury, 1969) в попытке получить единую систему элементов Амальтеи по двум группам наблюдений, разъединенных почти 30-летним временным интервалом. По-видимому, первоначальные оценки параметров были настолько грубыми, что они просто не попали в область сходимости минимизирующего метода.

Несмотря на то, что при  $|\lambda_j| \gg 0$  целевая функция  $\sigma^2$  (7) достаточно хорошо представляется ее тригонометрической составляющей  $f_{\cos}$  (8), первая в отличие от последней всегда будет иметь только один абсолютный минимум в  $\alpha = \beta = 0$ , соответствующий истинному решению  $\bar{x}$ , где целевая функция обращается в нуль. Это связано с наличием в  $\sigma^2$  квадратичного члена  $\alpha^2$ . В других минимумах целевая функция принимает самые разнообразные (ненулевые) значения. Поэтому в нашем случае за критерий истинности искомого решения  $x$  (по наблюдениям  $\bar{x}$ ) можно принять условие наименьшего значения  $\sigma^2$  на множестве всех минимумов.

Однако, заметим, что для околорезонансных распределений  $l_j$  могут иметь место такие минимумы, при которых значения функции  $\sigma^2$  будут почти нулевыми. Причем плотность их появления тем выше, чем ниже порядок их соизмеримости. Назовем эти минимумы псевдотривиальными.

Кроме того, следует иметь в виду, что если зафиксировать  $a$  и в качестве оцениваемых параметров рассматривать  $n$  (независимо от  $a$ ) и  $E_0$ , то функция  $\sigma^2$  будет подобна  $f_{\cos}$  со всеми ее особенностями, но уже относительно  $\nu$  (4) и  $\beta$ .

До сих пор мы полагали, что наблюдения, представленные решением  $\bar{x}$ , являются точными, однако при наличии (случайных) ошибок  $\delta\bar{x}$  функция  $\sigma^2$ , вообще говоря, не будет принимать нулевые значения и, кроме того, наиболее правдоподобное решение в окрестности  $\alpha = \beta = 0$  может не доставлять абсолютный минимум: вследствие ошибок статус абсолютного может перейти к одному из псевдотривиальных минимумов. Следовательно, в этом случае условие наименьшего значения  $\sigma^2$  нельзя принимать в качестве критерия максимального правдоподобия.

Весьма интересен случай наличия в аномалии  $E$  вековых ошибок  $\lambda^* = n^*(t - t_0)$ , которые проявляются на практике в результате немоделируемых эффектов, в частности, вследствие игнорирования, либо упрощения некоторых моделей сил. Нетрудно показать, что влияние вековых ошибок  $\lambda^*$  приводит к сдвигу функции  $f_{\cos}$  (8) вдоль  $\alpha$ , тогда как соответствующие значения минимумов функции сохраняются. При этом параметр  $\varphi$  преобразуется к виду

$$\varphi = \lambda \left( \frac{3}{2}\alpha - \frac{n^*}{\bar{n}} \right) - \beta.$$

Отсюда, например, следует, что даже если упрощенная (грубая) и усложненная (более точная) модели дают одни и те же значения минимумов целевой функции  $\sigma^2$ , это еще не может являться основанием в пользу выбора первой, так как определяемые при минимизации  $\sigma^2$  значения  $\alpha$  будут принципиально разными.

Наконец, заметим, что множество минимумов  $\sigma^2$  имеет место только для  $M > 1$ . В случае одной группы достаточно близких наблюдений

$$\min_{\beta \in (-\pi, +\pi]} \sigma^2 = \alpha^2.$$

Отсюда видно, что целевая функция для  $M = 1$  должна иметь единственный минимум в  $\alpha = \beta = 0$ .

Итак, целевая функция  $\sigma^2$  (7) (для  $M > 1$ ) имеет множество минимумов. Поэтому при использовании численных (итерационных) методов для минимизации  $\sigma^2$  по  $a$  и  $E_0$  (3) получаемое решение будет непосредственно зависеть от выбираемого начального приближения. При этом из всех минимумов не всегда узнаваем тот, что соответствует истинному решению  $\bar{x}$ . В особенности, это может иметь место, когда  $|\lambda_j| \gg 0$ .

## Метод Гаусса–Ньютона

Пусть имеем  $N$  наблюдаемых положений  $\mathbf{p}_i^O$  в  $L$ -мерном пространстве на моменты времени  $t_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Требуется по наблюдениям  $\mathbf{p}_i^O$  определить  $K$  орбитальных параметров  $\mathbf{q}$ .

Обычно определение  $\mathbf{q}$  сводится к минимизации функционала

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho^2(\mathbf{p}_i^O, \mathbf{p}_i^C), \quad (19)$$

где  $\rho$  — метрика в пространстве  $\mathbf{p}$ , а  $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$  — численное представление наблюдений  $\mathbf{p}_i^O$  по  $\mathbf{q}$  на основе моделирования орбитального движения. Зададим метрику как

$$\rho(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sqrt{(p_{11} - p_{12})^2 + \dots + (p_{L1} - p_{L2})^2},$$

где  $p_{11}, \dots, p_{L1}$  и  $p_{12}, \dots, p_{L2}$  — компоненты векторов  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$  соответственно. Тогда (19) можно переписать в виде

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N (p_{ij}^O - p_{ij}^C)^2. \quad (20)$$

Минимум функционала (20) находится из необходимого условия экстремума по  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_K)$ :

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N (p_{ij}^O - p_{ij}^C) \frac{\partial p_{ij}^C}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (21)$$

Чтобы решить систему уравнений (21) относительно параметров  $\mathbf{q}$ , прибегают к итерационным методам. Согласно итерационной схеме Ньютона поправка к текущему приближению  $\mathbf{q}$  определяется как

$$\Delta \mathbf{q} = - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} \right)^{-1} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad (22)$$

где  $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$  — матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\partial p_{ij}^C}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial p_{ij}^C}{\partial \mathbf{q}} - (p_{ij}^O - p_{ij}^C) \frac{\partial^2 p_{ij}^C}{\partial \mathbf{q}^2} \right]. \quad (23)$$

В схеме (22) начальное приближение  $\mathbf{q}$  обычно берется из предварительного определения орбиты по нескольким наблюдениям в рамках задачи двух тел.

Ввиду проблематичного вычисления вторых производных в (23) на практике их опускают и, таким образом, используют упрощенную схему так называемого метода Гаусса–Ньютона, который относится к широкому классу квазиньютоновских методов.

Введем матрицы

$$\mathbf{A}_{LN \times K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{11}^C}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p_{11}^C}{\partial q_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{L1}^C}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p_{L1}^C}{\partial q_K} \\ \frac{\partial p_{12}^C}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p_{12}^C}{\partial q_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_{LN}^C}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p_{LN}^C}{\partial q_K} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B}_{LN \times 1} = \begin{pmatrix} p_{11}^O - p_{11}^C \\ \vdots \\ p_{L1}^O - p_{L1}^C \\ p_{12}^O - p_{12}^C \\ \vdots \\ p_{LN}^O - p_{LN}^C \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Тогда поправку (22) можно переписать как

$$\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad (25)$$

где  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$  — нормальная матрица, которая в минимуме  $S(\mathbf{q})$  при достаточно малых невязках  $\mathbf{B}$  близка к матрице Гессе, а  $\mathbf{G} = -\mathbf{A}^T \mathbf{B}$  — градиент функции  $S$  по  $\mathbf{q}$ .

На практике часто наблюдаются две угловые координаты объекта: прямое восхождение  $p_1^O$  и склонение  $p_2^O$ . В этом случае расстояния между наблюдаемыми и вычисленными положениями на небесной сфере вычисляются по формуле:

$$\rho(\mathbf{p}_i^O, \mathbf{p}_i^C) = \sqrt{(p_{1i}^O - p_{1i}^C)^2 \cos^2 p_{2i}^O + (p_{2i}^O - p_{2i}^C)^2},$$

тогда как в качестве функционала (20) рассматривают

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(p_{1i}^O - p_{1i}^C)^2 \cos^2 p_{2i}^O + (p_{2i}^O - p_{2i}^C)^2]. \quad (26)$$

## Задача двух тел

Чтобы детально исследовать возможности метода Гаусса–Ньютона, мы сначала применили его к простой модели, основанной на формулах задачи двух тел. Модель представляла движение спутника Адрастеи в пространстве угловых координат. В качестве орбитальных параметров были взяты компоненты начального вектора динамического состояния  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , предварительно полученные из наблюдений методом Лапласа (Escobal, 1965). При этом параметры  $\mathbf{q}$  соответствовали почти круговой орбите с большой полуосью  $\bar{a} = 8.68 \cdot 10^{-4}$  а.е. и эксцентриситетом  $\bar{e} = 0.0161$ . На основе вектора  $\mathbf{q}$  мы моделировали (точные) наблюдаемые положения  $\mathbf{p}^O = (p_1^O, p_2^O)$  (угловые координаты спутника) в моменты реальных наблюдений ( $N = 90$ ), рассредоточенных на концах интервала времени 12 лет как две почти равновесные группы. Начальная эпоха  $t_0$  была взята в середине временного интервала.

Варьируя элементы  $a$  и  $e$  и получая различные начальные приближения  $\mathbf{q}_0$ , мы определяли орбитальные параметры  $\mathbf{q}$  по  $\mathbf{p}^O$  в соответствии со схемой (25) применительно

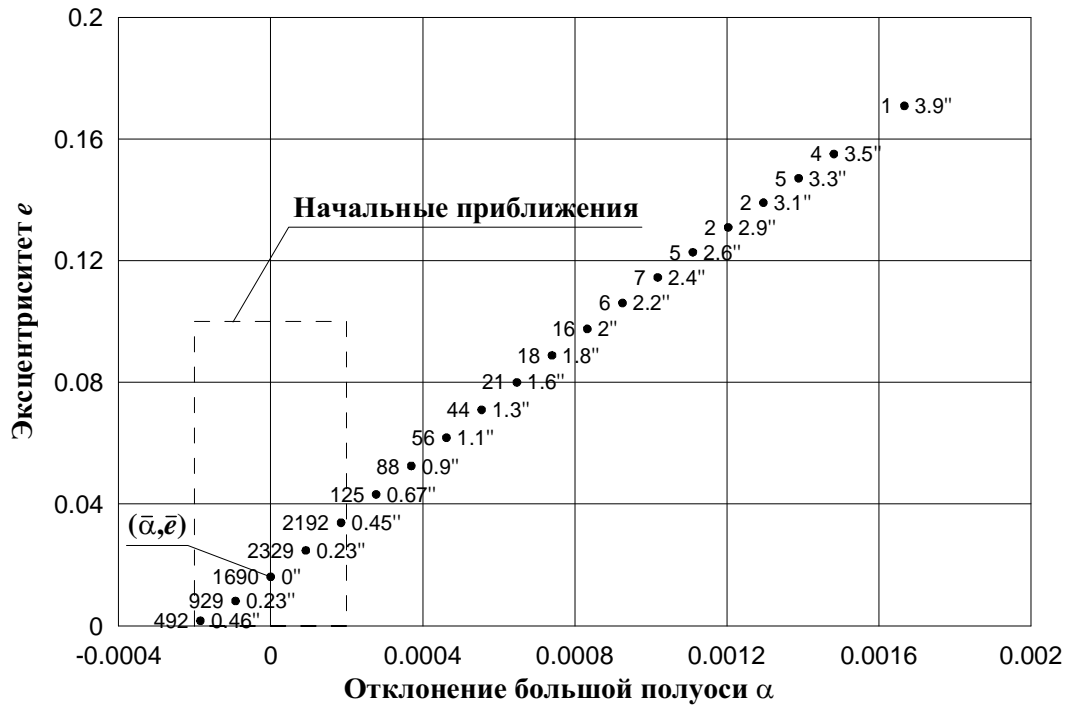


Рисунок 7 — Множество решений в плоскости  $(\alpha, e)$

к (26). Таким образом, выполнив многочисленный ряд экспериментов, мы обнаружили, что итерационный процесс сходится далеко не при всех  $\mathbf{q}_0$ , а если и сходится, то не всегда к истинному решению. Причем область сходимости к ожидаемым элементам  $\bar{a}$  и  $\bar{e}$  оказывается довольно малой. По-видимому, причина расходимости итерационного процесса (даже при хороших начальных приближениях  $\mathbf{q}_0$ , обеспечивающих малые значения целевой функции), главным образом, связана здесь с сильной овражностью и сложной структурой гиперповерхности, задаваемой  $S(\mathbf{q})$ .

Впрочем, сходимость практически всегда может быть достигнута путем уменьшения величины поправки (25), т.е. по схеме

$$\Delta \mathbf{q} = -h \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad \text{где } h < 1. \quad (27)$$

На рис. 7 показаны результаты, полученные при  $h = 0.01$ . Здесь  $\alpha$  — относительное отклонение большой полуоси  $a$  от истинного значения  $\bar{a}$ , т.е.  $a = \bar{a}(1 + \alpha)$ . Точками обозначены решения, к которым сходился итерационный процесс при различных начальных вариациях  $\alpha$  и  $e$  (внутри прямоугольника с пунктирной границей). Числа слева от точек означают, сколько раз итерационный процесс сходился к соответствующему решению, тогда как числа справа представляют среднеквадратическую ошибку  $\sigma = \sqrt{S/N}$ , получаемую в этом решении. При этом рассматривалось 2000000 начальных приближений, из которых сошло только 0.4%, а из них, в свою очередь, большая часть к решениям внутри области варьирования элементов.

Итак, в рассматриваемой задаче также имеет место множество решений, среди которых, однако, доставляет абсолютный минимум только соответствующее исходным орби-

тальным элементам  $\bar{a}$  и  $\bar{e}$ . Следует заметить, что почти все минимумы вдоль  $\alpha$  распределены равномерно с шагом  $\Delta\alpha \approx 9.23 \cdot 10^{-5}$ . Нетрудно проверить, что это распределение хорошо согласуется с оценкой (17) при четных  $m$ . Причина отсутствия минимумов для нечетных  $m$  состоит в особом выборе начальной эпохи. Вернемся к рис. 2. Его нижний график показывает, что в круговой задаче при начальной эпохе, находящейся в середине временного интервала (как в нашем случае), решения, доставляющие минимум целевой функции, должны лежать на орбите в почти диаметрально противоположных точках. Варьируя только большую полуось и эксцентриситет, мы фактически исключили те начальные приближения, которые могли бы дать минимумы в противоположной части орбиты, соответствующие нечетным  $m$  в оценке (17). В то же время верхний график на рис. 2 показывает, что выбор эпохи внутри одной из групп локализует минимумы, что естественно удобно для их поиска.

Далее, поскольку мы предполагаем, что моделируемые наблюдения безошибочны, в абсолютном минимуме  $\sigma = 0$ . В соседних минимумах  $\sigma = 0.23''$ . Поэтому при наличии в наблюдениях случайных ошибок с дисперсией порядка этой среднеквадратической величины, минимум  $\sigma$  для истинной орбиты может быть сравним с соседними аналогами, причем настолько, что среди них он не будет узнаваем как соответствующий истинной орбите.

Многokrатно выполнив процедуру определения орбиты при различных выборках нормально распределенных ошибок, вносимых в моделируемые наблюдения, мы сравнили значения минимумов для истинной орбиты и одного из соседних аналогов. На рис. 8 показаны вероятностные плотности  $P$  их разностей  $\Delta\sigma$  в случаях трех дисперсий ошибок  $s = 0.23'', 0.46'', 0.67''$ . Положительное значение разности означает, что минимум, соответствующий истинной орбите, меньше соседнего.

В частности, из рисунка видно, что при достаточно малых ошибках ( $s = 0.23''$ ) разности  $\Delta\sigma$  принимают положительные значения, среди которых наиболее вероятны  $\Delta\sigma = 0.02-0.03''$ . То есть, таким образом, параметры, доставляющие наименьший минимум, могут рассматриваться как наилучшие оценки истинных орбитальных параметров. В отличие от этого случая в двух других имеют место отрицательные разности, вероятности появления которых сравнимы с вероятностями положительных разностей. Это как раз говорит о том, что по значениям двух близких минимумов невозможно с уверенностью оценивать степень правдоподобности соответствующих им параметров.

Установить статусы соседних минимумов удастся, если имеется большое количество (причем достаточно точных) наблюдений. В противном случае это предприятие оказывается ненадежным. На том же рис. 8 приведены результаты эксперимента для 20 моментов наблюдений (по 10 на каждую группу). Отсюда мы видим, что большая часть разностей во всех случаях ( $N = 20$ ) концентрируется около нуля. При этом вероятность появления отрицательных разностей довольно высока.

Как отмечалось выше, сходимость итерационной схемы Гаусса–Ньютона может быть достигнута, если в нее ввести уменьшающий множитель  $h$  (27). Для получения численных результатов в предыдущем разделе мы использовали  $h = 0.01$ . Однако, учитывая



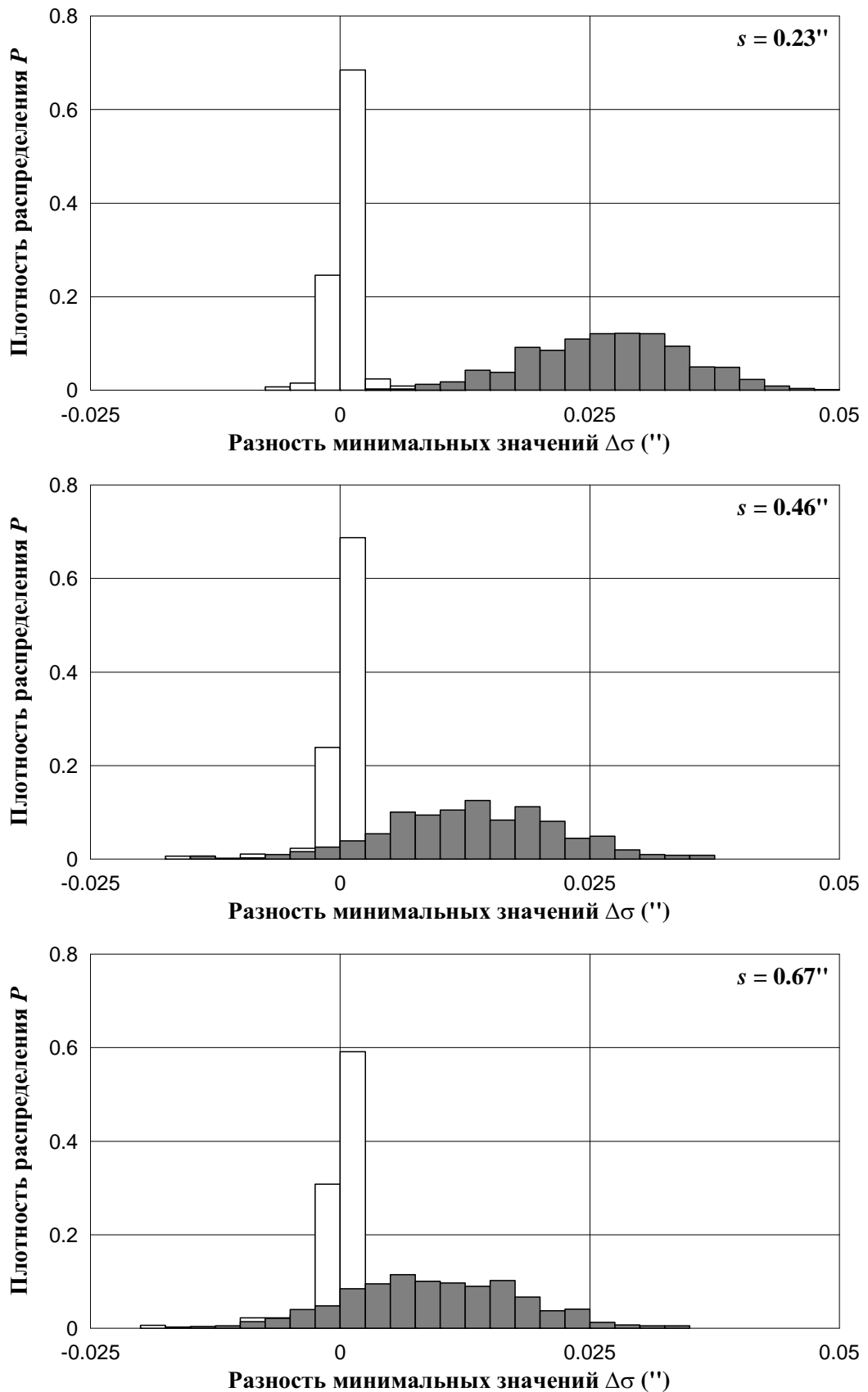


Рисунок 8 — Вероятностная плотность разностей минимальных значений  $\Delta\sigma$  при различных выборках ошибок наблюдений с дисперсиями  $s = 0.23''$ ,  $0.46''$ ,  $0.67''$  (серая заливка —  $N = 90$ ; белая заливка —  $N = 20$ )

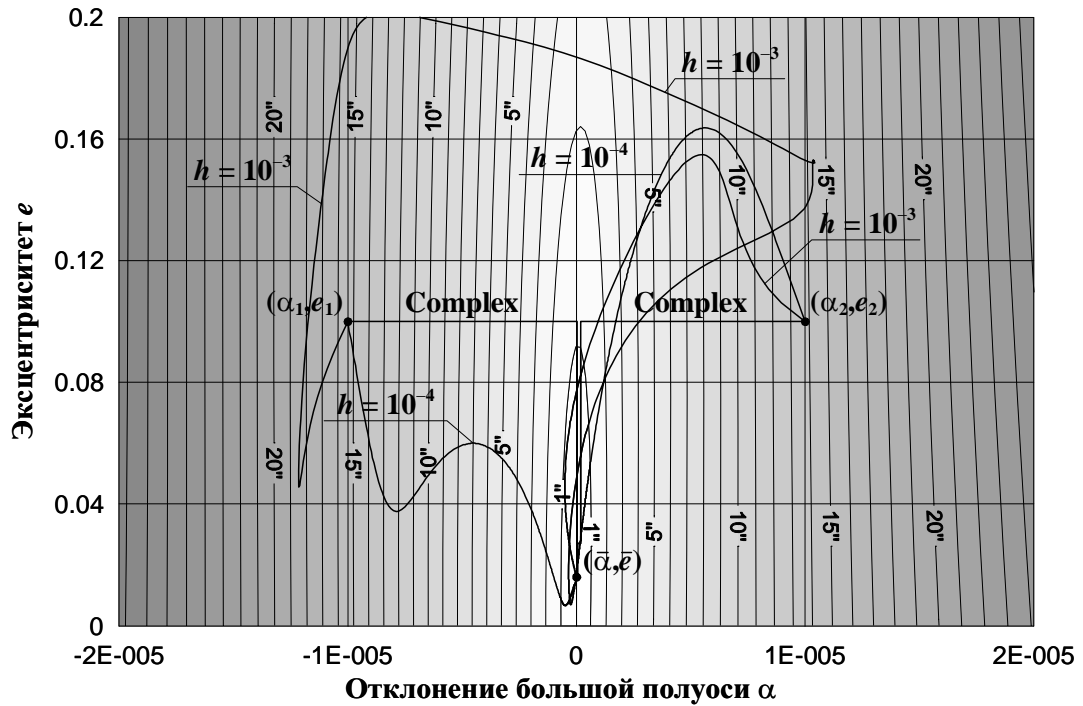


Рисунок 9 — Сходимость методов (точные наблюдения,  $N = 90$ )

низкий процент сходимости решений (0.4%), можно полагать, что для более уверенного получения параметрических оценок  $\mathbf{q}$ , минимизирующих целевую функцию  $S$ , следует выбирать существенно меньший множитель.

Мы оценили характер и скорость сходимости схемы Гаусса–Ньютона с разными множителями  $h$  на примере двух довольно грубых начальных приближений  $\mathbf{q}_{01}$  и  $\mathbf{q}_{02}$ , соответствующих параметрам:  $\alpha_1 = -10^{-5}$ ,  $e_1 = 0.1$ ; и  $\alpha_2 = 10^{-5}$ ,  $e_2 = 0.1$ . Мониторинг итерационного процесса проводился в плоскости  $(\alpha, e)$ . Результаты приведены на рис. 9. Здесь также представлен график изолиний  $S$  как функции  $\alpha$  и  $e$  при истинных значениях других орбитальных параметров.

В частности, из рисунка видно, что даже для  $h = 0.001$  последовательные приближения с начальным  $\mathbf{q}_{01}$  ( $\alpha_1, e_1$ ) определяются весьма непредсказуемым образом, хотя итерационный процесс все же сходится. В то же время существенное уменьшение множителя ( $h = 0.0001$ ) как для  $\mathbf{q}_{01}$ , так и для  $\mathbf{q}_{02}$  приводит к желаемой релаксационной последовательности приближений. Наконец, следует отметить, что при  $h = 0.01$  итерационный процесс расходится в обоих случаях.

Несмотря на столь простой подход в решении проблемы сходимости, он все же неприемлем для определения орбит реальных близких спутников, поскольку в силу специфики обратной задачи сопряжен с очень низкой скоростью сходимости. Так, при использовании схемы с множителем  $h = 0.001$  для сходимости итерационного процесса (с координатной точностью  $10^{-10}$  а.е.) нам потребовалось выполнить более 10000 итераций.

## Градиентный спуск и проекционный метод

С целью достижения быстрой сходимости итерационного процесса можно совместно с методом Гаусса–Ньютона использовать другие методы вычисления поправок  $\Delta \mathbf{q}$ . В нашем случае достаточно прибегнуть к известному методу градиентного спуска и так называемому проекционному методу (Himmelblau, 1972).

В методе градиентного спуска поправка вычисляется как (Аттетков и др., 2001)

$$\Delta \mathbf{q} = -\frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}{(\mathbf{Q}\mathbf{G}) \cdot \mathbf{G}} \mathbf{G}. \quad (28)$$

Здесь точкой обозначено скалярное произведение  $K$ -мерных векторов. В процессе последовательного использования схемы (28) приближенное решение достаточно быстро (за несколько итераций) сваливается на дно оврага  $S$ , но в дальнейшем невероятно медленно сходится к минимуму  $S$ . На этом этапе можно было бы воспользоваться методом Гаусса–Ньютона. Однако, как показывает практика, если приближенное решение оказывается довольно далеко от минимума  $S$ , схема (25) будет давать такие поправки, которые способны выкинуть решение из области сходимости метода. Впрочем, плохие поправки можно улучшить, если использовать априорную информацию о свойствах орбитального движения.

В движении близких спутников Юпитера доминирующую роль играет гравитационное поле планеты. При моделировании его можно рассматривать как консервативное. Поэтому полная энергия  $H(\mathbf{q})$ , определяемая притяжением планеты, будет почти постоянной. Учитывая это свойство, наложим ограничение на  $\Delta \mathbf{q}$ : поправки должны быть такими, чтобы  $H(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}) = H(\mathbf{q})$ , т.е. чтобы приближенное решение оставалось на одном энергетическом уровне.

В общем случае налагаемое ограничение определяет множество поправок, однако из них целесообразно использовать лишь ортогональную проекцию поправки (25) на поверхность  $H(\mathbf{q})$ . Алгоритмически это возможно по следующей итерационной схеме:

$$\Delta \mathbf{q}_{i+1} = \Delta \mathbf{q}_i - \frac{H(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}_i) - H(\mathbf{q})}{\mathbf{G}_H \cdot \mathbf{G}_H} \mathbf{G}_H \quad (i = 0, 1, \dots), \quad (29)$$

где  $\mathbf{G}_H = \partial H / \partial \mathbf{q}$  — градиент  $H$  по  $\mathbf{q}$ , а  $\Delta \mathbf{q}_0$  определяется из (25).

Как только приближенное решение становится достаточно близким к минимуму, что определяется малостью величины  $\Delta \mathbf{q}_0$ , заканчиваем процесс минимизации  $S$  по схеме Гаусса–Ньютона (25).

Составной подход с использованием итерационных схем (25), (28) и (29) также был опробован для начальных приближений  $\mathbf{q}_{01}$  и  $\mathbf{q}_{02}$ . Результаты тестирования приведены на рис. 9 (Complex). Горизонтальные траектории здесь соответствуют градиентному спуску (28), тогда как вертикальные — схеме метода Гаусса–Ньютона совместно с проекционной схемой (29), где в качестве  $H$  была взята кеплеровская энергия. Самым примечательным является то, что для итерационного процесса в обоих случаях понадобилось всего 27 итераций до сходимости.

## Модель спутникового движения

Формально численную модель спутникового движения  $\mathbf{p}^C$  в пространстве угловых координат  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$  относительно стандартного земного экватора J2000 можно представить в виде

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q}^{DT}) = \mathbf{T}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{q}^D), \mathbf{q}^T). \quad (30)$$

Здесь  $t$  — эфемеридное время;  $\mathbf{q}^{DT} = (\mathbf{q}^D, \mathbf{q}^T)$  — вектор всех параметров модели;  $\mathbf{T}$  — преобразование перехода от йовицентрической системы координат к топоцентрической;  $\mathbf{q}^D = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, t_0, q_8, \dots)$  и  $\mathbf{q}^T$  — параметрические векторы, связанные соответственно с движением спутника относительно йовицентра и с координатным преобразованием;  $\mathbf{x}$  — йовицентрическое положение спутника;  $\mathbf{x}_0$  и  $\dot{\mathbf{x}}_0$  — векторы динамического состояния спутника в начальный момент времени  $t_0$ .

В модели (30) положение  $\mathbf{x}$  определяется путем численного интегрирования дифференциальных уравнений движения

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{q}^D) = \mathbf{P}_J + \mathbf{P}_G + \mathbf{P}_{SP} + \mathbf{P}_R \quad (31)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0), \quad (32)$$

где учитываются влияние гравитационного поля Юпитера  $\mathbf{P}_J$ , притяжение от галилеевых спутников  $\mathbf{P}_G$ , от Солнца и планет  $\mathbf{P}_{SP}$ , а также релятивистские эффекты  $\mathbf{P}_R$  в рамках задачи Шварцшильда. Уравнения интегрируются методом Гаусса–Эверхарта (Everhart, 1974; Авдюшев, 2006).

Координатное преобразование  $\mathbf{T}$  можно представить как последовательность преобразований

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{p_1, p_2} \circ \mathbf{T}_{top} \circ \mathbf{T}_{geo}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{T}_{geo}$  и  $\mathbf{T}_{top}$  — переходы соответственно от йови- к геоцентру и от гео- к топоцентру;  $\mathbf{T}_{p_1, p_2}$  — получение угловых координат относительно наблюдателя (топоцентра). Преобразование перехода к топоцентру  $\mathbf{T}_{top} \circ \mathbf{T}_{geo}$  формально можно записать в виде

$$\mathbf{T}_{top} \circ \mathbf{T}_{geo}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_{JS} - \mathbf{x}_{ES} - \mathbf{x}_{TE},$$

где  $\mathbf{x}_{JS}$  и  $\mathbf{x}_{ES}$  — соответственно гелиоцентрические положения Юпитера и Земли, которые определяются из фонда координат больших планет DE405 (Standish, 1998); а  $\mathbf{x}_{TE}$  — геоцентрическое положение наблюдателя, вычисляемое по его сферическим координатам: геоцентрическому расстоянию  $b$ , широте  $\psi_E$  и местному звездному времени  $s^*$ , как

$$x_{TE1} = b \cos \psi_E \cos s^*, \quad x_{TE2} = b \cos \psi_E \sin s^*, \quad x_{TE3} = b \sin \psi_E.$$

Наземные наблюдения  $\mathbf{p}_i^O = (p_{1i}^O, p_{2i}^O)$ , как правило, отнесены к моментам  $t_i^O$  всемирного времени, поэтому при использовании численной модели (30) требуется предварительный переход к эфемеридному времени  $t_i$ . Кроме того, для получения видимых положений спутника  $\mathbf{p}_i^C = (p_{1i}^C, p_{2i}^C)$  относительно земного наблюдателя необходимо также

учитывать эффект запаздывания света. Таким образом, имеем временное преобразование  $t_i = t_i^O + \Delta t_i$ , где  $\Delta t_i$  — поправка для соответствующего  $t_i^O$  за эфемеридное время и за эффект запаздывания света.

В качестве определяемых параметров принимаются компоненты 6-мерного вектора начального динамического состояния  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$  (32) (хотя теоретически можно определять совместно все компоненты параметрического вектора  $\mathbf{q}^{DT}$ ). Параметры находят из условия минимума функционала (26)

$$S(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(p_{1i}^O - p_{1i}^C)^2 \cos^2 p_{2i}^O + (p_{2i}^O - p_{2i}^C)^2].$$

Изложенный выше составной подход для минимизации  $S(\mathbf{q})$  с использованием итерационных схем (25), (28) и (29) предполагает вычисление производных  $\partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$ . Согласно (30) их можно представить как

$$\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (34)$$

Производные  $\partial \mathbf{T} / \partial \mathbf{x}$  в динамической модели (30) определяются аналитически из дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \rho^C dT_1 \cos p_2^C &= dx_1 \sin p_1^C + dx_2 \cos p_1^C, \\ \rho^C dT_2 &= dx_1 \cos p_1^C \sin p_2^C + dx_2 \sin p_1^C \sin p_2^C + dx_3 \cos p_2^C; \end{aligned}$$

тогда как производные  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  находятся численно из дифференциальных уравнений в вариациях

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \quad (35)$$

с начальными условиями

$$\left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)_0 = \mathbf{E}, \quad \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_0} \right)_0 = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)_0 = \mathbf{0}, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_0} \right)_0 = \mathbf{E}.$$

Здесь  $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ ;  $\rho$  — топоцентрическое расстояние спутника;  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размера  $3 \times 3$ . Уравнения (35) интегрируются численно совместно с уравнениями движения (31). Таким образом, при моделировании интегрируется система 42-го порядка. Заметим, что в разделе использовалась та же модель (30), где, однако, координаты  $\mathbf{x}$  и производные  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$  вычислялись по формулам задачи двух тел.

В модели Юпитер рассматривался как сфероид, притяжение которого учитывалось с точностью до шестой зональной гармоники. Формально притяжение планеты можно представить в виде

$$\mathbf{P}_J = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \quad \text{где} \quad U = -\mu \sum_i J_i \frac{b_J^i}{|\mathbf{x}|^{i+1}} L_i(\sin \psi_J), \quad \sin \psi_J = \frac{x_{J3}}{|\mathbf{x}|},$$

$\mu$  — гравитационный параметр планеты;  $J_i$  — коэффициенты зональных гармоник, причем  $J_0 = -1$ ;  $b_J$  — экваториальный радиус Юпитера;  $L_i$  — полиномы Лежандра;  $\psi_J$  и  $x_{J3}$  — широта и апликата спутника соответственно относительно экватора планеты. При этом апликата  $x_{J3}$  определялась из координатного преобразования  $\mathbf{x}_J = \mathbf{T}_J \mathbf{x}$  (Seidelmann et al., 2002), где  $\mathbf{T}_J$  — матрица перехода от гео- к йовиэкватору.

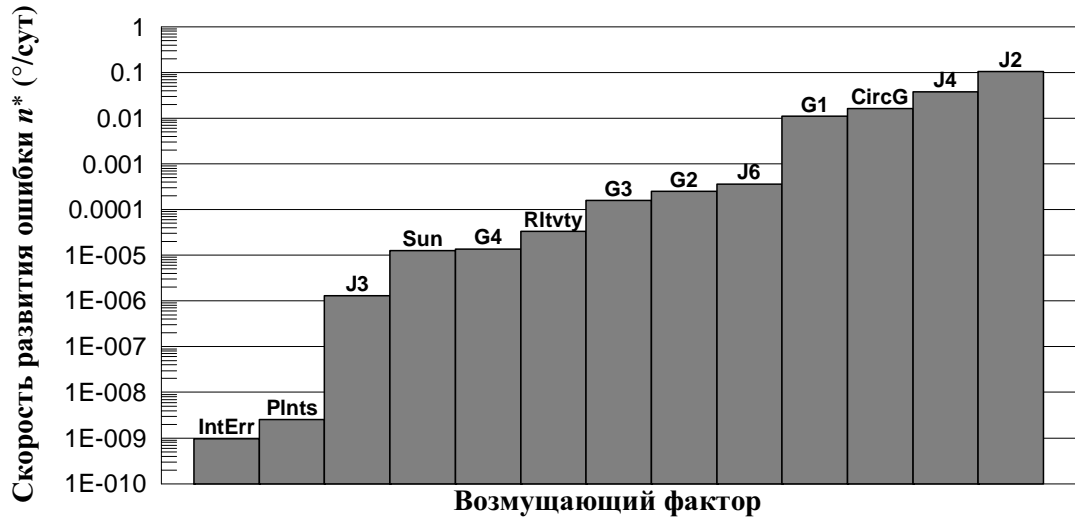


Рисунок 10 — Скорость распространения ошибки  $n^*$  в средней долготе вследствие игнорирования возмущающих факторов (Амальтея)

Ввиду малых размеров гравитирующих тел: галилеевых спутников, Солнца и планет (за исключением Юпитера), по отношению к их расстояниям от близких спутников они рассматривались как материальные точки, а притяжение каждого тела в  $\mathbf{P}_G$  и  $\mathbf{P}_{SP}$  (31) вычислялось по формуле

$$\mathbf{P}_i = \mu_i \left( \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}|^3} - \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|^3} \right),$$

где  $\mu_i$  и  $\mathbf{x}_i$  — соответственно гравитационный параметр и йовицентрический вектор положения  $i$ -го тела. Координаты галилеевых спутников вычислялись по теории Ленея L1 (Lainey et al., 2004), а координаты Солнца и планет — из эфемериды DE405. Для оптимизации вычислительного процесса орбитальные параметры близких спутников предварительно определялись с использованием упрощенной теории галилеевых спутников, где их положения вычислялись по формулам кругового движения с константами из (Lieske, 1998). Такой поэтапный подход позволил повысить быстродействие численного определения параметров почти в 15 раз.

Константы гравитационного поля Юпитера, а также массы галилеевых спутников были взяты из теории Лиске Е5, тогда как массы сторонних планет — из DE405.

Релятивистские эффекты определялись в рамках задачи Шварцшильда по формуле (Брумберг, 1972)

$$\mathbf{P}_R = 4 \frac{\mu^2}{c^2 |\mathbf{x}|^4} \mathbf{x} + \frac{\mu}{c^2 |\mathbf{x}|^3} [4(\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \dot{\mathbf{x}} - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{x}],$$

где  $c$  — скорость света.

Степень влияния возмущающих факторов на орбитальное движение Амальтеи представлена на рис. 10. Результаты на рисунке получены путем численной оценки скорости вековых ошибок в средней долготе вследствие игнорирования тех или иных вышеописанных возмущающих сил. Как показывают результаты, наиболее весомыми являются

влияния от первых двух четных гармоник гравитационного поля Юпитера (J2, J4), а также от притяжения наиболее близкого галилеевого спутника Ио (G1). В частности, уже через 10 лет возмущение в быстрой переменной от сжатия Юпитера становится порядка одного оборота. Возмущения от других галилеевых спутников (G2, G3, G4), очевидно, уменьшаются по мере их удаленности от планеты. Степень влияния притяжений Солнца (Sun) и наиболее далекого галилеева спутника Каллисто (G4), а также релятивистских эффектов (Rltvty) приблизительно одного порядка. Наименьший вклад в движение Амальтеи вносят возмущения от сторонних планет. Их влияния оказались настолько малыми, что мы решили вовсе исключить их из уравнений (31). Кроме того, на рисунке приведены оценки возмущений, обусловленных ошибками численного интегрирования (IntErr) и упрощением орбитальной модели галилеевых спутников до круговой (CircG). Видно, что влияние ошибок интегрирования, как и полагается, существенно меньше учитываемых возмущений. В то же время оценка CircG показывает, что ошибка вследствие упрощения орбитальной модели спутников-гигантов настолько велика, что ее использование для итоговой обработки наблюдений близких спутников совершенно недопустимо.

## Наблюдения спутников

Для определения орбитальных параметров спутников использовались в основном наземные наблюдения, хронология которых приведена в табл. 1. Графически плотность временного распределения спутниковых наблюдений представлена на рис. 11. Здесь каждая группа наблюдений помечена соответствующим кодом обсерватории;  $t_0$  — начальный момент времени, на который оцениваются орбитальные параметры.

Как видно, многочисленные и достаточно плотные ряды наблюдений имеют спутники Амальтея ( $N = 707$ ) и Теба ( $N = 465$ ). Более того, наблюдения Амальтеи покрывают довольно длительный интервал времени порядка 50 лет. Следует отметить, что большая часть всех наблюдений этих спутников получена на обсерватории 874 Itajuba (Veiga, Vieira Martins, 2005) за период 1995–2001 гг. Кроме того, имеются несколько наблюдений со спутника Hubble Space Telescope (Mallama et al., 2004). Все наблюдения до 1978 г. фотографические, после — полученные с помощью ПЗС-приемников; и представлены либо в абсолютных координатах  $(p_1, p_2)$  (A), либо в относительных  $(\Delta p_1 \cos p_2, \Delta p_2)$ , где в качестве опорных объектов выступают Юпитер (J), либо один из галилеевых спутников (G).

Существенно меньше наблюдательных данных имеют спутники Адрастея ( $N = 90$ ) и Метида ( $N = 178$ ). Все наблюдения получены с помощью ПЗС-приемников на двух обсерваториях (675 Palomar Mountain и B18 Terskol) и представлены относительно Юпитера, галилеевых спутников, а также спутников Амальтеи и Тебы (I).

Все наблюдательные данные были взяты из Центра данных естественных спутников планет <http://www.sai.msu.ru/neb/nss/nssnsdcmr.htm> (Емельянов и др., 2006). Подробную информацию об используемых наблюдениях можно найти в работах (Van

Таблица 1 — Временное распределение спутниковых наблюдений

$N$	Тип		Интервал (д.м.г–д.м.г)	Обсерватория	
Амальтея					
41	Фото	A	14.02.1954–22.02.1954	711	McDonald
90	Фото	A	11.01.1967–07.02.1967	88	Kottomia
20	Фото	A	29.09.1976–09.12.1977	711	McDonald
2	Фото	A	17.12.1977	780	Leander McCormick
10	Фото	A	07.01.1978–09.01.1978	711	McDonald
16	ПЗС	J	03.12.1988	675	Palomar Mountain
8	ПЗС	J	15.07.1994–25.08.1994	250	Hubble Space Telescope
203	ПЗС	A	23.05.1995–14.09.1995	874	Itajuba
2	ПЗС	J	15.05.1996	250	Hubble Space Telescope
63	ПЗС	A	21.06.1996–23.08.1996	874	Itajuba
64	ПЗС	G	26.09.1998–20.11.2000	B18	Terskol
188	ПЗС	A	25.10.2001–27.10.2001	874	Itajuba
Теба					
193	ПЗС	A	23.05.1995–23.08.1996	874	Itajuba
84	ПЗС	G	19.09.1998–02.11.1999	B18	Terskol
188	ПЗС	A	25.10.2001–27.10.2001	874	Itajuba
Адрастея					
48	ПЗС	J	03.12.1988	675	Palomar Mountain
42	ПЗС	I	05.11.2000–21.11.2000	B18	Terskol
Метида					
50	ПЗС	J	03.12.1988	675	Palomar Mountain
128	ПЗС	G, I	08.10.1999–20.11.2000	B18	Terskol

Biesbroeck, 1955; Sudbury, 1969; Mulholland et al., 1979; Ianna et al., 1979; Nicholson, Matthews, 1991; Mallama et al., 2004; Veiga, Vieira Martins, 1996; Veiga, Vieira Martins, 2005; Ledovskaya et al., 1999; Kulyk et al., 2002).

Для обработки относительных наблюдений координаты опорных объектов Юпитера и галилеевых спутников определялись из эфемерид DE405 и L1 соответственно, тогда как координаты близких спутников Амальтеи и Тебы вычислялись с использованием нашей численной модели (30) на основе параметров, определенных по вышеописанным наблюдательным данным.

Ввиду малого количества групп спутниковых наблюдений проблема неоднозначного определения орбитальных параметров для случая Адрастеи и Метиды вполне может иметь место. На рис. 12 для каждого спутника приведены графики функций  $\Phi$  (12), формально вычисленные по всем моментам наблюдений. Так как функции  $\Phi$  четные, они представлены только для  $\zeta \geq 0$ .



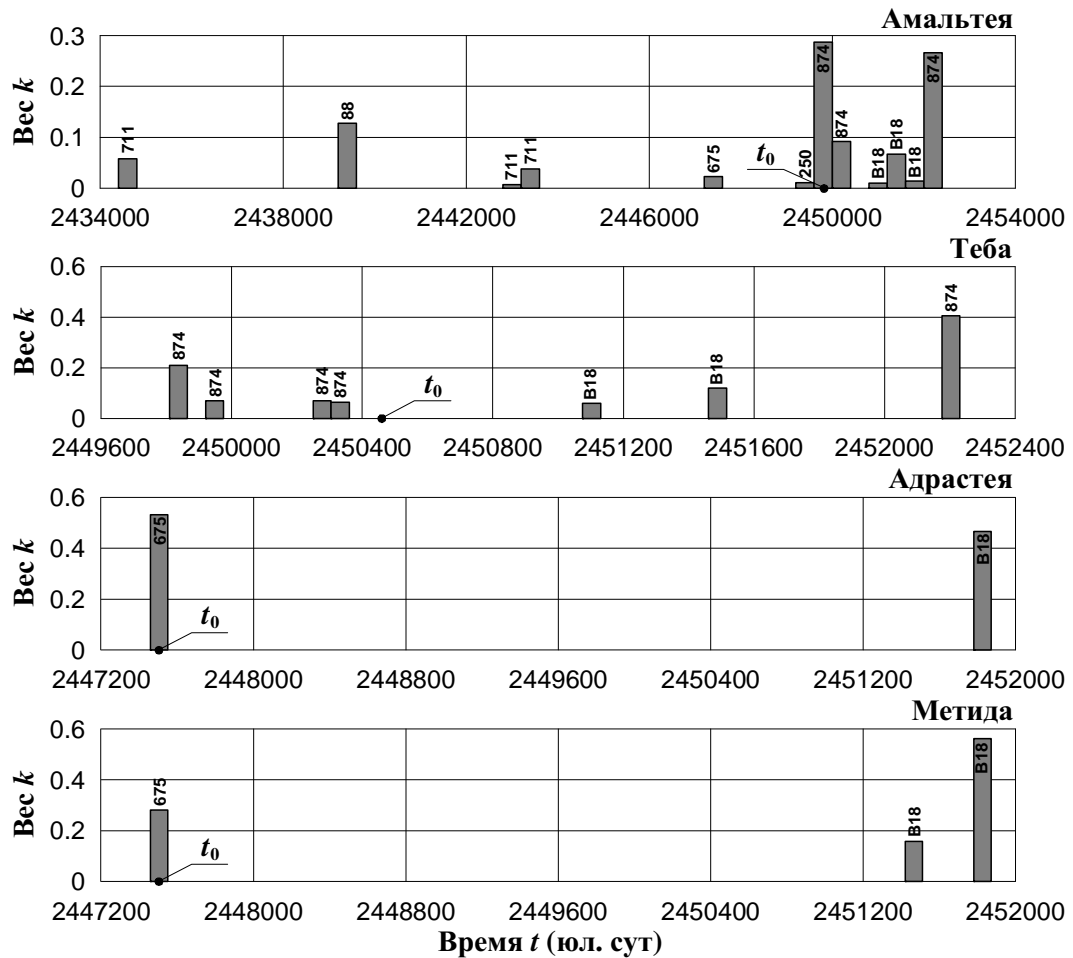


Рисунок 11 — Временное распределение спутниковых наблюдений

В частности, для Адрастеи и Метиды видно, что существуют минимумы  $\Phi$ , близкие к тривиальному  $\zeta = 0$ . Это обстоятельство дискредитирует критерий добротности определяемых параметров по признаку малости целевой функции  $S$ , поскольку, как нам уже известно, при наличии ошибок в наблюдениях наилучшие (более близкие к истинным) параметры не всегда доставляют абсолютный минимум целевой функции, в особенности, если наблюдений достаточно мало. Для Метиды таких минимумов два:  $\zeta/2\pi \approx \pm 11$ , тогда как для Адрастеи их оказывается довольно много. В то же время для Амальтеи и Тебы проблема неоднозначного определения орбит вряд ли может возникнуть, поскольку все (нетривиальные) минимумы существенно отличаются от тривиального.

Наконец, заметим, что минимумы  $\Phi$  для Адрастеи возрастают по мере удаления от тривиального минимума, хотя выше было показано, что при наличии всего двух групп наблюдений все минимумы равнозначны (рис. 3). Это несоответствие на самом деле объясняется тем, что моменты второй группы наблюдений (B18 Terskol, табл. 1) сосредоточены на достаточно большом временном отрезке, длиной которого при скрупулезном анализе не стоит пренебрегать.

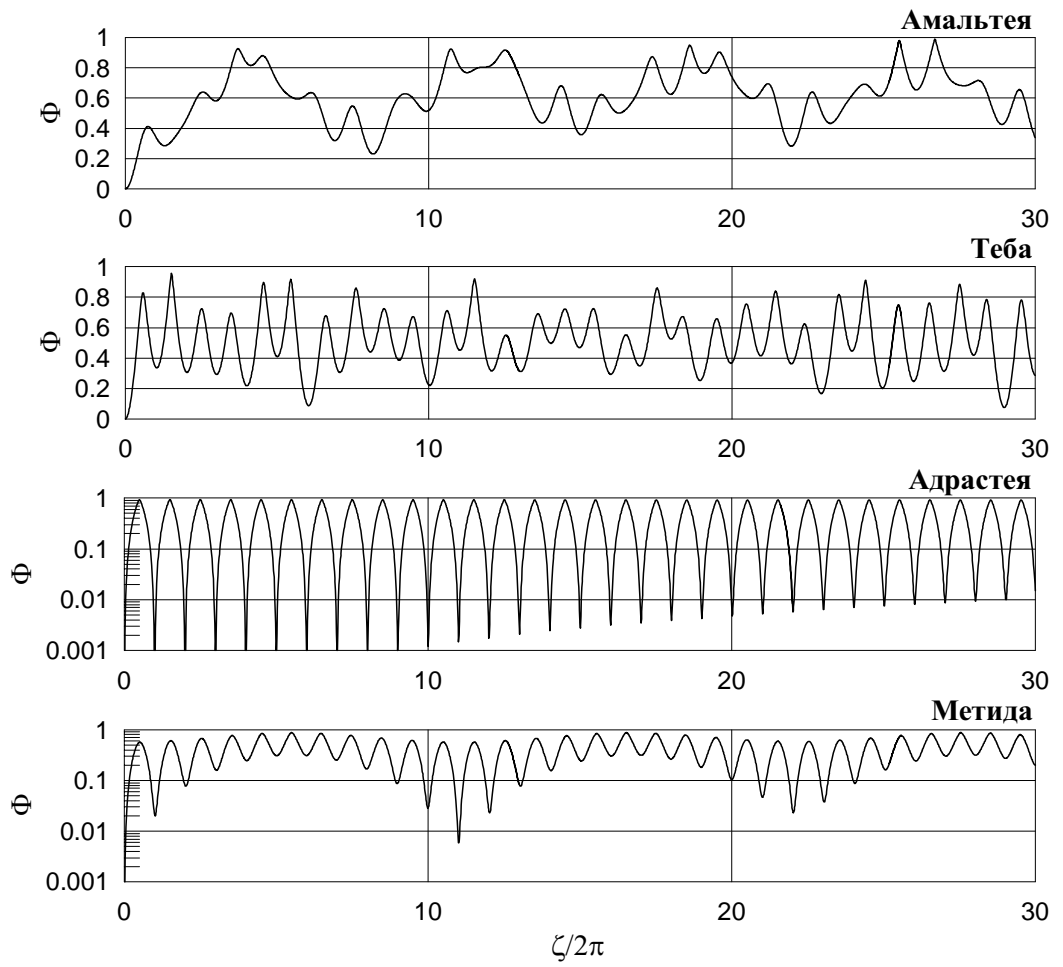


Рисунок 12 — Поведение  $\Phi(\zeta)$  для близких спутников

## Определение орбитальных параметров

Начальные оценки орбитальных параметров  $\mathbf{q}_0$  предварительно были получены из наблюдений методом Лапласа. Начальные моменты времени  $t_0$  относительно моментов наблюдений показаны на рис. 11. Несмотря на то, что наименьшая обусловленность нормальных матриц  $\mathbf{Q}$  достигается при выборе  $t_0$  внутри интервала, для Адрастеи и Метиды моменты  $t_0$  намеренно были оставлены внутри крайней группы (675 Palomar Mountain), по наблюдениям которой, кстати, были получены начальные оценки  $\mathbf{q}_0$ . Как было показано выше на примере круговой задачи, именно такой выбор удобен для поиска минимумов целевой функции  $S$  при малом количестве групп наблюдений, поскольку решения  $\mathbf{q}$ , доставляющие минимум  $S$ , находятся достаточно близко друг от друга в фазовом пространстве оцениваемых параметров (рис. 2).

Используя составной подход для минимизации  $S(\mathbf{q})$  с итерационными схемами (25), (28) и (29) и отправляясь от начальных приближений  $\mathbf{q}_0$ , всего за несколько десятков итераций мы получили оценки орбитальных параметров  $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)$ , которые приведены в табл. 2. Соответствующие им орбитальные элементы в усеченной форме даны в табл. 3. Здесь  $i$  — наклонение (отнесенное к экватору Юпитера);  $\tau$  — орбитальный период, а  $\sigma_a$  — элонгация спутника.

Процесс уточнения параметров начинался со схемы (25) (градиентный спуск) до сходимости среднеквадратической ошибки  $\sigma$  с точностью до  $0.001''$ , затем применялась схема (29) (метод Гаусса–Ньютона). Если поправки в координатах  $\Delta\mathbf{x}$  превосходили по величине  $10^{-7}$  а.е., решение  $\mathbf{q}$  исправлялось за его отклонение от энергетической поверхности по схеме (28) (проекционный метод). Таким образом, процесс продолжался до тех пор, пока поправки в координатах по величине не достигали значения  $10^{-10}$  а.е. Все предельные величины, используемые в качестве критерия для использования той или иной схемы, подбирались опытным путем. Наконец, следует заметить, что для обращения нормальной матрицы в схеме (25) использовался известный метод Гаусса.

Полученные оценки параметров доставляют среднеквадратические ошибки  $\sigma = \sqrt{S/N}$ , не превышающие величину  $0.4''$  (табл. 4), что говорит о хорошем согласии с внешней точностью наземных наблюдений. (В табл. 4 приведены также числа обусловленности нормальных матриц  $\text{cond}\mathbf{Q}$  и временные интервалы  $\Delta t$  и  $\Delta E$ , покрывающие моменты наблюдений, соответственно в годах и в оборотах спутника.) Невязки  $\Delta p_1 \cos p_2$  и  $\Delta p_2$ , определяющие величины ошибок  $\sigma$ , представлены на рис. 13–16. При этом необходимо упомянуть, что в процессе определения параметров производилась отбраковка наблюдений, невязки которых превышали по величине  $3\sigma$ . Таким образом, из базы данных было исключено несколько десятков таких наблюдений.

Уже отмечалось, что для повышения оперативности вычислительного процесса оценки орбитальных параметров определялись в два этапа: сначала с упрощенной круговой моделью галилеевых спутников, а затем с использованием высокоточной теории Леней L1. В связи с этим интересно отметить, что на обоих этапах мы получали почти одни и те же среднеквадратические ошибки, хотя при этом определяемые параметры

Таблица 2 — Оценки орбитальных параметров спутников

$\mathbf{x}_0$ (а.е.)	$\dot{\mathbf{x}}_0$ (а.е./сут)
Амальтея ( $t_0 = 2449860.5$ JD)	
$5.904259045649335 \cdot 10^{-4}$	$1.335508654469120 \cdot 10^{-2}$
$-9.649762725788387 \cdot 10^{-4}$	$6.580573675959994 \cdot 10^{-3}$
$-4.443404841108547 \cdot 10^{-4}$	$3.311479208243125 \cdot 10^{-3}$
Теба ( $t_0 = 2450464.5$ JD)	
$-6.267081178161467 \cdot 10^{-4}$	$1.233321360075275 \cdot 10^{-2}$
$-1.230794598107236 \cdot 10^{-3}$	$-5.441693601047646 \cdot 10^{-3}$
$-5.898550029039168 \cdot 10^{-4}$	$-2.105071658282438 \cdot 10^{-3}$
Адрастея ( $t_0 = 2447498.5$ JD)	
$-7.303981301488080 \cdot 10^{-4}$	$9.634657321571694 \cdot 10^{-3}$
$-4.031887607701157 \cdot 10^{-4}$	$-1.410217512755373 \cdot 10^{-2}$
$-1.986950951223992 \cdot 10^{-4}$	$-6.455413514235597 \cdot 10^{-3}$
Метида ( $t_0 = 2447498.5$ JD)	
$1.859819984557366 \cdot 10^{-4}$	$-1.780689855999936 \cdot 10^{-2}$
$7.521256414899649 \cdot 10^{-4}$	$3.659703433891211 \cdot 10^{-3}$
$3.622658670920554 \cdot 10^{-4}$	$1.474969016967715 \cdot 10^{-3}$

Таблица 3 — Оскулирующие орбитальные элементы спутников

Спутник	$a \cdot 10^3$ (а.е.)	$e$	$i$ ( $^\circ$ )	$\tau$ (сут)	$\sigma_a$ ( $''$ )
Амальтея	1.2165	0.0036	0.3063	0.5016	59.7
Теба	1.4866	0.0145	1.1248	0.6776	73.8
Адрастея	0.8682	0.0129	0.4613	0.3024	42.1
Метида	0.8615	0.0074	0.0621	0.2989	42.0

Таблица 4 — Статистические данные

Спутник	$\sigma$ ( $''$ )	$N$	$\Delta t$ (г.)	$\Delta E$ (об.)	$\lg \text{cond} \mathbf{Q}$
Амальтея	0.284	707	47.7	34731	12.9
Теба	0.161	465	6.4	3467	11.1
Адрастея	0.386	90	12.0	14453	13.1
Метида	0.333	178	12.0	14620	13.5

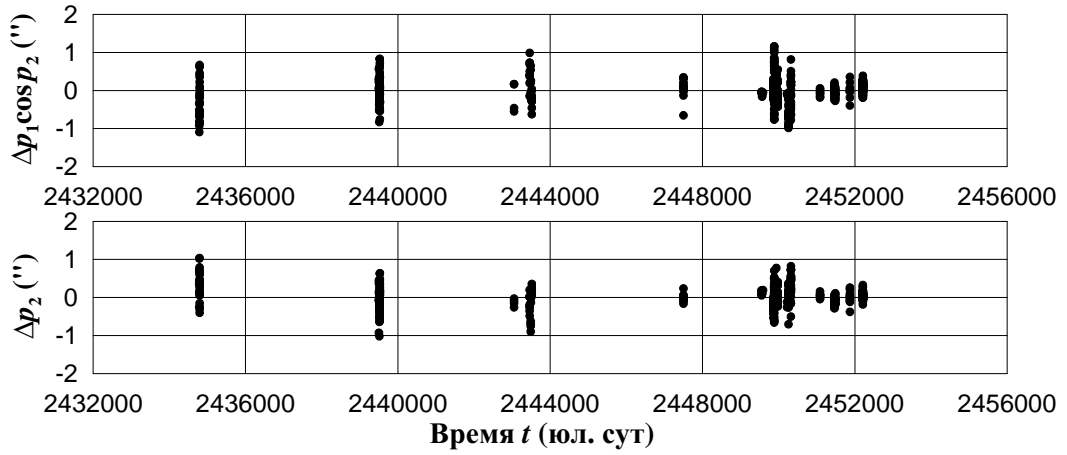


Рисунок 13 — Невязки модели для Амальтеи

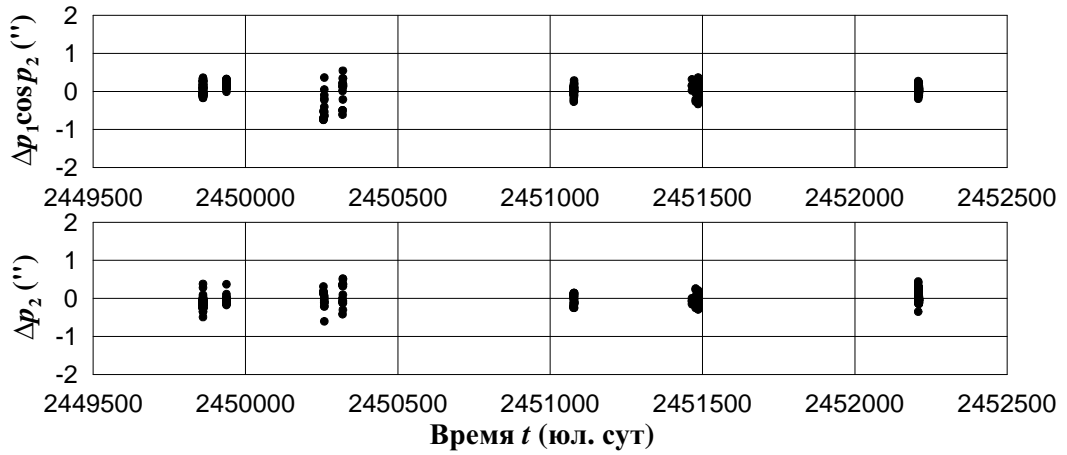


Рисунок 14 — Невязки модели для Тебы

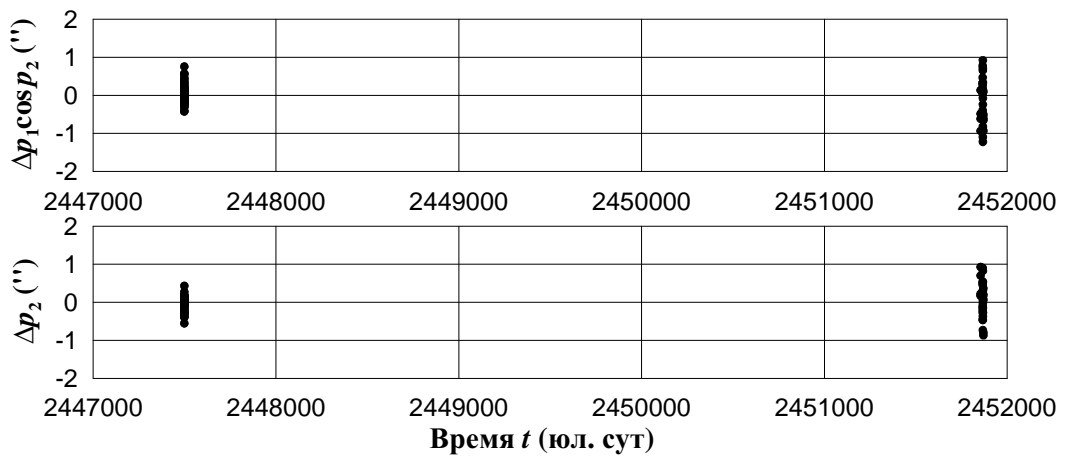


Рисунок 15 — Невязки модели для Адрастеи

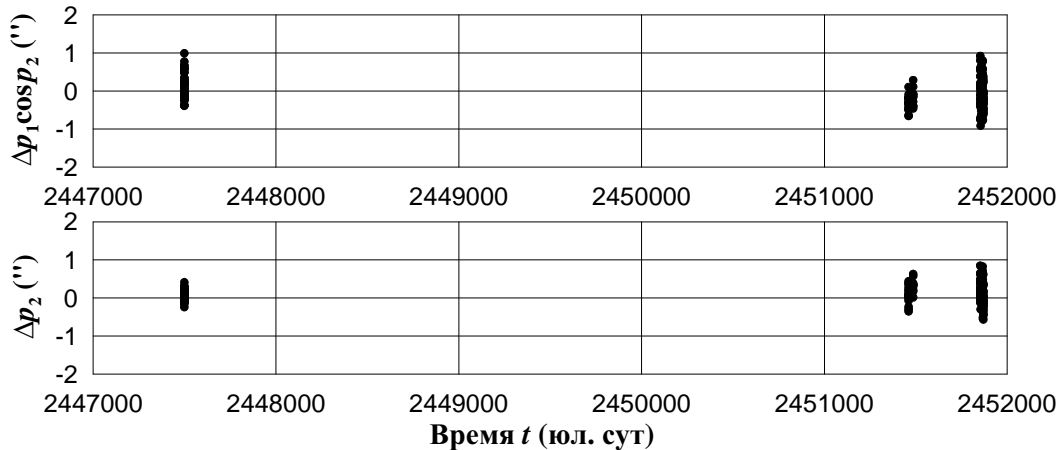


Рисунок 16 — Невязки модели для Метиды

были принципиально разными. Причина этого явления состоит в том, что огрубление модели орбит галилеевых спутников внутри динамической модели близких спутников приводит, главным образом, к вековой ошибке в долготе  $\lambda^*$ , что фактически влечет сдвиг целевой функции  $S$  вдоль параметров, непосредственно связанных с частотой обращения близкого спутника, причем минимальные значения  $S$  сохраняются. Это мы показывали выше на примере круговой задачи.

В результате определения орбитальных параметров нами также были получены их ковариационные матрицы  $\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1}$ , которые, как известно, характеризуют распределение параметрических ошибок. С практической точки зрения матрицы  $\mathbf{C}$  удобно представить в виде

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{W}^T \mathbf{V} \mathbf{W},$$

где  $\mathbf{W}$  и  $\mathbf{V}$  — ортогональная и диагональная квадратные матрицы, составленные соответственно из направляющих косинусов собственных векторов нормальной матрицы  $\mathbf{Q}$  и ее обратных собственных чисел, которые в усеченной форме даны в табл. 5 и 6. В частности, как показывает табл. 6, нормальные матрицы (впрочем, как и ковариационные) имеют большие числа обусловленности (см. также табл. 4). Это вызвано прежде всего тем фактом, что наблюдательные данные распределены на достаточно больших интервалах времени в сопоставлении с орбитальными периодами спутников  $\tau$  (табл. 3). Связь между обусловленностью и длиной временного интервала фактически нами уже была показана на примере круговой двухпараметрической задачи, где в качестве нормальной выступала матрица, определяющая квадратичную форму (13):

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{12} & \kappa_{22} \end{pmatrix}.$$

Сопоставляя формулы (14) и (15), мы видим, что обусловленность  $\mathbf{Q}$  непосредственно зависит от суммы квадратических отклонений моментов наблюдений относительно

начальной эпохи. Поэтому наилучшая обусловленность достигается при выборе среднеарифметической величины всех моментов наблюдений в качестве начальной эпохи.

Известно также, что плохая обусловленность нормальной матрицы неблагоприятно сказывается на точности ее обращения (главным образом, за счет усиления ошибок округления) и, как следствие, на сходимости итерационной схемы Гаусса–Ньютона. Тем не менее в нашем случае числа обусловленности оказываются все же еще не столь большими, чтобы это могло существенно отразиться на точности обращения нормальной матрицы.

## Другие оценки

Несмотря на малость среднеквадратических ошибок для Адрастеи и Метиды (табл. 4), существуют все же другие минимумы функционала  $S$ , в которых ошибки принимают близкие значения. (Поскольку ниже мы будем рассматривать множество различных решений, доставляющих минимумы  $S$ , для удобства изложения все переменные, относящиеся к полученным выше оценкам орбитальных параметров, будем обозначать тильдой.) Чтобы найти эти минимумы, в соответствии с формулой (17) мы проваририровали значения полной энергии  $H$  с шагом  $\Delta H = 2\tilde{H}/3\tilde{R}$ , затем по схеме (29) нашли приближенные значения параметров  $\mathbf{q}_0$  и, наконец, с использованием каждого приближения  $\mathbf{q}_0$  провели уже описанную выше процедуру улучшения параметров. Всего для Адрастеи были исследованы 50 соседних решений, тогда как для Метиды — 2, соответствующие минимумам  $\zeta/2\pi \approx \pm 11$  функции  $\Phi(\zeta)$  (рис. 12).

Примечательно, что для Адрастеи абсолютный минимум среднеквадратической ошибки достигается именно в решении  $\tilde{\mathbf{q}}$  (табл. 2). Однако, в его окрестности имеются другие близкие минимумы  $\sigma$ , значения которых отличаются от  $\tilde{\sigma}$  на величины меньше  $0.01''$  (рис. 17). Поэтому у нас есть веское основание подозревать, что наилучшие (в смысле ближайшие к истинным параметрам) оценки вполне вероятно могут находиться в соседних минимумах.

Разумеется, возникает соблазн привлечь некую дополнительную априорную информацию о спутниковых орбитах, для того чтобы среди представленных оценок выделить наилучшие. Например, учитывая, что спутниковые орбиты почти круговые и экваториальные, можно выбирать из возможных кандидатов  $\mathbf{q}$  те, которые соответствуют наименьшему эксцентриситету, либо наклонению. Однако, как было показано на примере задачи двух тел (рис. 7), оценки, далекие от истинных, могут давать вполне хорошие элементы с априорной точки зрения.

На рис. 18–20 показано распределение решений в орбитальных элементах вдоль  $H$ . Изначально полученное решение  $\tilde{\mathbf{q}}$ , данное в табл. 2, помечено на рисунках кольцом. В частности, например, если сопоставить рис. 17 и 19, видно, что наименьшее значение эксцентриситета ( $e = 8 \cdot 10^{-4}$ ) соответствует далеко не самой лучшей среднеквадратической ошибке ( $\sigma = 0.87''$ ). Впрочем, та же ситуация имеет место и для наклонения ( $i = 0.18^\circ$ ,  $\sigma = 0.64''$ ) (рис. 20).

Таблица 5 — Матрицы  $\mathbf{W}$  для различных спутников

Амальтея					
0.8271	0.5494	-0.0916	0.0468	-0.0526	-0.0278
-0.4842	0.7915	0.3644	-0.0694	-0.0342	-0.0172
0.2724	-0.2593	0.9261	0.0161	-0.0251	0.0037
-0.0373	0.0623	0.0287	0.7777	0.5536	0.2875
0.0766	0.0239	0.0131	-0.6218	0.7156	0.3077
0.0009	0.0051	-0.0133	-0.0355	-0.4206	0.9064
Теба					
0.8998	-0.3920	-0.1250	-0.0152	-0.1296	-0.0635
0.4149	0.8147	0.3904	-0.0977	0.0431	0.0167
-0.0514	-0.4110	0.9101	-0.0051	0.0099	-0.0025
-0.0170	0.1107	0.0588	0.8271	-0.5157	-0.1845
0.1236	-0.0369	-0.0136	0.5507	0.7380	0.3678
0.0016	-0.0061	0.0041	-0.0542	-0.4131	0.9090
Адрастея					
0.8507	0.4697	0.2313	-0.0249	0.0364	0.0167
-0.5225	0.7958	0.3022	0.0304	0.0350	0.0147
-0.0422	-0.3788	0.9245	0.0012	0.0037	-0.0083
0.0396	0.0094	0.0049	0.9078	-0.3958	-0.1322
0.0026	-0.0495	-0.0211	0.4172	0.8473	0.3243
-0.0026	-0.0058	0.0073	-0.0163	-0.3505	0.9364
Метида					
0.9750	-0.2004	-0.0846	-0.0105	-0.0386	-0.0210
0.2172	0.8784	0.4231	-0.0457	0.0094	0.0038
-0.0106	-0.4320	0.9018	-0.0037	-0.0008	0.0039
0.0073	0.0294	0.0141	0.6769	-0.4841	0.5534
0.0448	-0.0056	-0.0018	0.3001	0.8684	0.3922
-0.0026	-0.0272	-0.0191	-0.6704	-0.1001	0.7345

Таблица 6 — Компоненты диагональных матриц  $\mathbf{V}$  (собственные числа  $\mathbf{Q}^{-1}$ )

Спутник	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$
Амальтея	$5.259 \cdot 10^{-2}$	$5.709 \cdot 10^{-12}$	$5.008 \cdot 10^{-2}$	6.595	48.56	12.23
Теба	$4.237 \cdot 10^{-2}$	$4.161 \cdot 10^{-10}$	$9.838 \cdot 10^{-2}$	7.339	47.96	8.202
Адрастея	$9.023 \cdot 10^{-11}$	0.183	0.505	1092	483.5	167.7
Метида	0.128	$1.823 \cdot 10^{-11}$	0.222	76.81	511.8	79.14



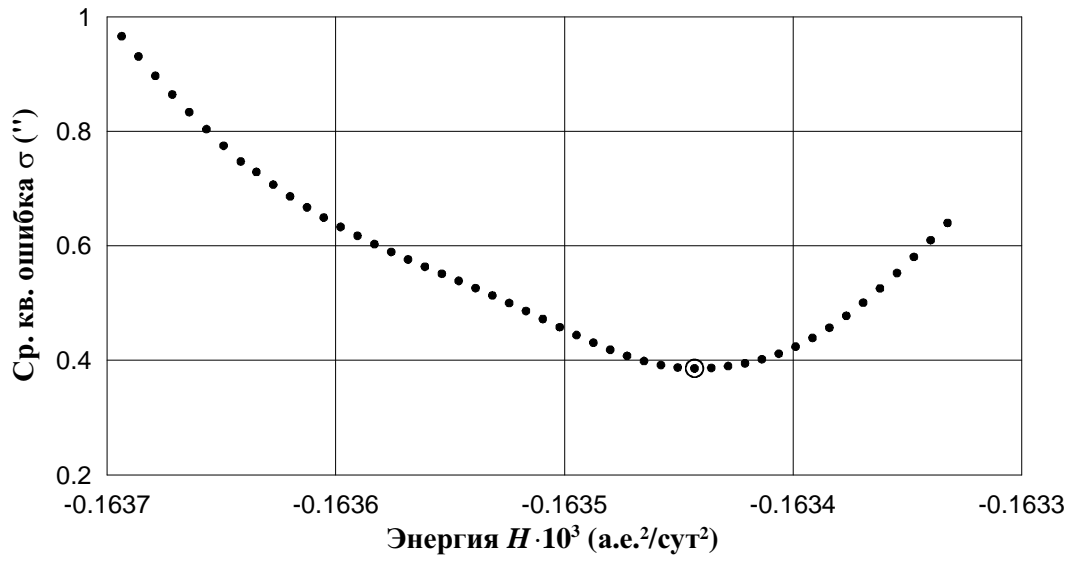


Рисунок 17 — Среднеквадратические ошибки для различных решений (Адрастея)

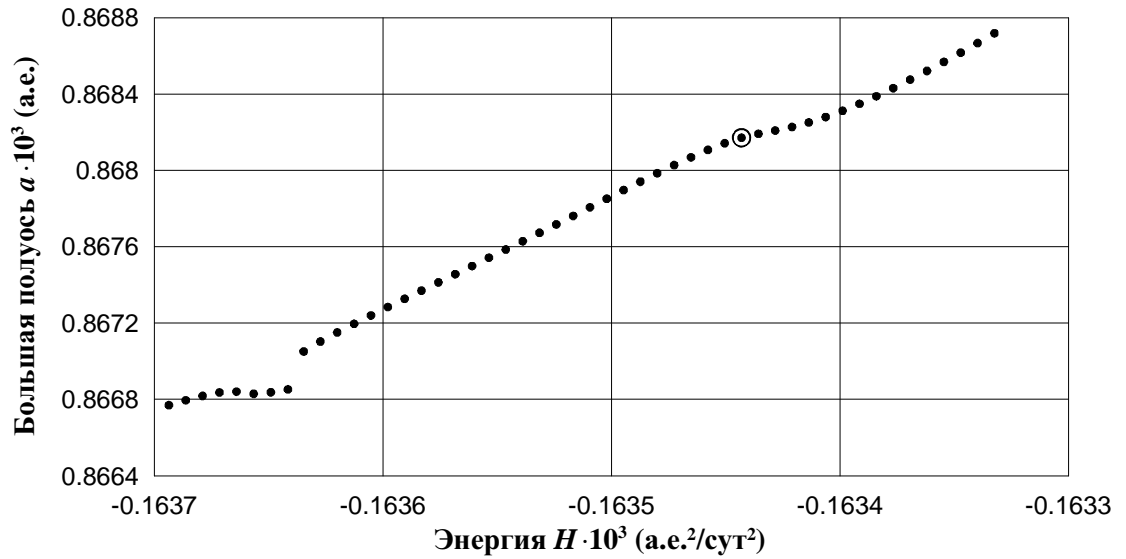


Рисунок 18 — Значения большой полуоси для различных решений (Адрастея)

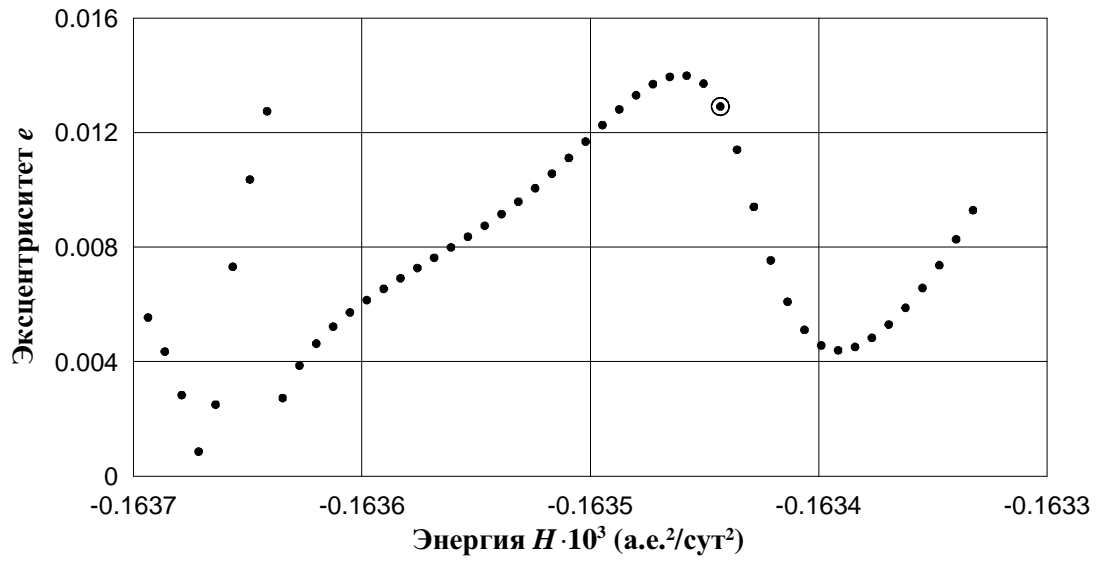


Рисунок 19 — Значения эксцентриситета для различных решений (Адрастея)

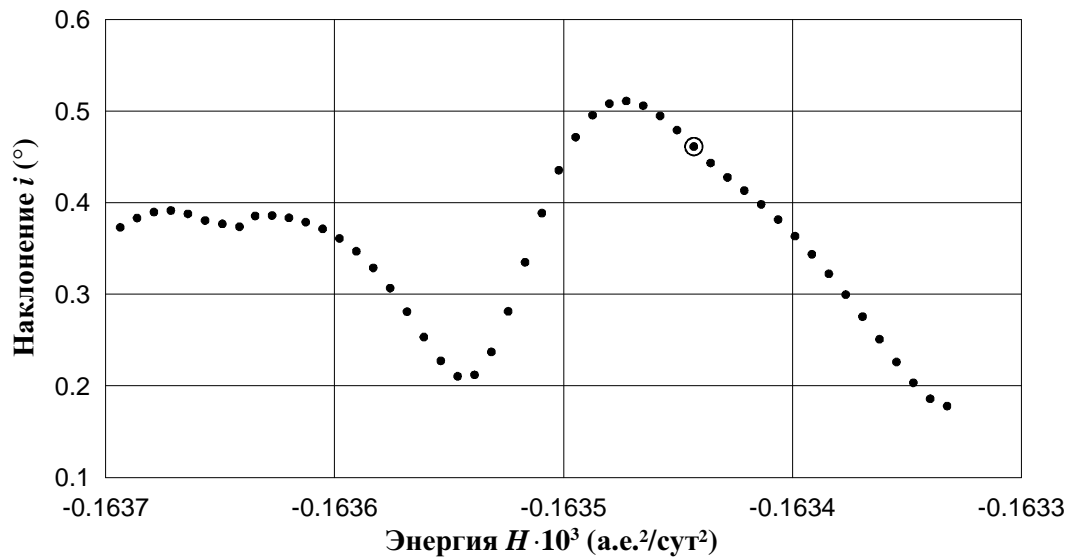


Рисунок 20 — Значения наклонов для различных решений (Адрастея)

Таблица 7 — Орбитальные элементы Метиды и среднеквадратические ошибки для смежных решений

$\zeta/2\pi$	$a \cdot 10^3$ (а.е.)	$e$	$i$ (°)	$\tau$ (сут)	$\sigma$ (")
-11	0.8618	0.0120	0.2002	0.2991	0.987
11	0.8609	0.0101	0.2325	0.2986	1.119

Таблица 8 — Орбитальные элементы Метиды и среднеквадратические ошибки для смежных решений в случае двух групп наблюдений

$\zeta/2\pi$	$a \cdot 10^3$ (а.е.)	$e$	$i$ (°)	$\tau$ (сут)	$\sigma$ (")
-1	0.8615	0.0069	0.1933	0.2990	0.280
0	0.8615	0.0100	0.1682	0.2990	0.257
1	0.8615	0.0132	0.1488	0.2990	0.245

Что касается Метиды, то результаты исследования двух подозрительных решений окончательно развеяли сомнения по поводу их принадлежности к потенциально приемлемым решениям для описания спутниковой орбиты: данные в табл. 7 показывают, что среднеквадратические ошибки смежных решений существенно больше ошибки изначально полученного решения  $\tilde{\mathbf{q}}$  (табл. 4). Кроме того, интересно заметить, что эксцентриситет и наклонение для  $\tilde{\mathbf{q}}$  принимают наименьшие значения (табл. 3).

Пользуясь случаем, что у спутника Метиды три группы наблюдений (рис. 11), мы провели весьма любопытный эксперимент, результаты которого наглядно демонстрируют важность проблемы неоднозначного определения орбит с точки зрения планирования наблюдений спутников в будущем. Мы определяли орбитальные параметры по двум группам наблюдений (675 Palomar Mountain, B18 Terskol) на интервале 1988–1999 гг, а затем делали прогноз положений спутника на моменты наблюдений третьей группы.

По двум группам можно получить множество решений  $\mathbf{q}$ , минимизирующих целевую функцию  $S$ , но мы рассмотрели только три соседних  $\zeta/2\pi = -1, 0, 1$  (нулевое решение соответствует  $\tilde{\mathbf{q}}$ ). Орбитальные элементы для этих решений даны в табл. 8. Важно заметить, что минимальное значение среднеквадратической ошибки  $\sigma$  имеет место для решения  $\zeta/2\pi = 1$ , хотя, как нам известно из результатов определения орбиты по трем группам наблюдений, наилучшая оценка параметров соответствует  $\zeta/2\pi = 0$ .

Прогнозируемые по двум соседним решениям положения спутника (С) на небесной сфере для третьей группы наблюдений (О) показаны на рис. 21. Как видно из рисунка, численный прогноз элонгации спутника очень грубый. Таким образом, используя динамическую модель объекта для планирования его наблюдения в любой другой предвычисленный момент элонгации, на самом деле мы можем не обнаружить его не только в ожидаемом месте, но и вообще, поскольку он возможно окажется либо перед Юпитером, либо за ним, либо в мощной засветке планеты вблизи нее. Очевидно, другие соседние решения будут давать более грубый прогноз.

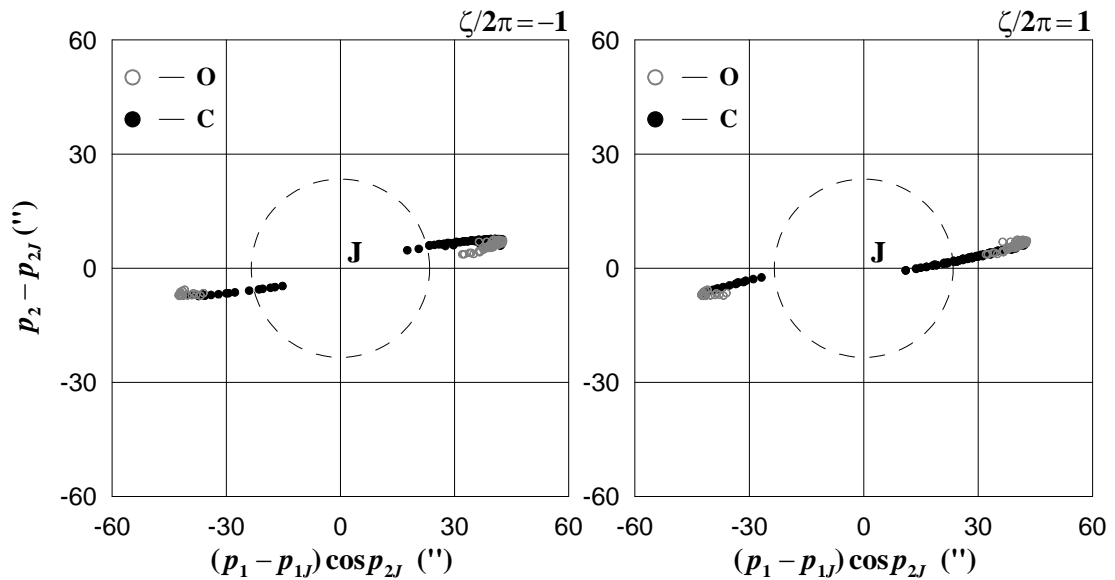


Рисунок 21 — Распределение наблюдаемых (O) и вычисленных (C) положений Метиды на небесной сфере для третьей группы наблюдений (B18 Terskol) (пунктирной линией показана граница видимого с Земли диска Юпитера)

### Сравнение с эфемеридами JUP230

Результаты моделирования мы сравнили с эфемеридами JUP230 (Jacobson, 1994), которые доступны на сайте Лаборатории реактивного движения (JPL NASA): <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>. Используя эфемериды JUP230, на двадцатилетнем интервале времени, от 1980 по 2000 г., мы сгенерировали наблюдения близких спутников с интервалом 30 сут. По этим наблюдениям мы оценили среднеквадратическую ошибку  $\sigma$  нашей модели с параметрами  $\tilde{\mathbf{q}}$  (табл. 2), а затем провели процедуру уточнения параметров. Результаты приведены в табл. 9. Здесь индексом *jac* обозначены величины, полученные в результате подгонки численной модели к эфемериде JUP230.

Сразу следует заметить, что решение  $\tilde{\mathbf{q}}$  для Адрастеи показало очень плохое согласие с JUP230. Мы проверили соседние решения, и оказалось, что эфемерида JUP230 хорошо согласуется с решением, соответствующим  $\zeta/2\pi = -1$ . Именно для него даны оценки в таблице. При этом мы все же не стали бы поспешно утверждать, что это решение является наилучшей оценкой орбитальных параметров.

Насколько нам известно, для построения эфемериды JUP230 использовались не только наземные наблюдения, но и наблюдения, полученные с космических аппаратов. Поэтому, казалось бы, при построении эфемериды не должно было возникать особенностей, связанных с неоднозначностью определения орбиты. Тем не менее об этом еще нельзя говорить с уверенностью до тех пор, пока данный вопрос не будет тщательно исследован.

Итак, возвращаясь к табл. 9, мы видим, что наши результаты для Амальтеи очень хорошо согласуются с эфемеридой НАСА, тогда как для других спутников — несколько

Таблица 9 — Среднеквадратические отклонения эфемерид и оскулирующие орбитальные элементы спутников, полученные по JUP230

Спутник	$\sigma$ (")	$\sigma_{jac}$ (")	$a_{jac} \cdot 10^3$ (а.е.)	$e_{jac}$	$i_{jac}$ (°)	$\tau_{jac}$ (сут)
Амальтея	0.076	0.035	1.2165	0.0036	0.3817	0.5016
Теба	0.217	0.037	1.4865	0.0160	1.0845	0.6776
Адрастея	0.272	0.036	0.8681	0.0065	0.0096	0.3024
Метида	0.168	0.039	0.8615	0.0071	0.0043	0.2989

хуже. Это объясняется тем, что у давно известного спутника очень много наблюдательных данных, охватывающих более длительный интервал времени, нежели у спутников, открытых только в 1979 г. Как известно, увеличение временного интервала равноточных наблюдений уменьшает степень неопределенности в оцениваемых по наблюдениям параметрах. Тем не менее, несмотря на большие среднеквадратические ошибки для Тебы, Адрастеи и Метиды, они все же остаются в пределах внешней точности наземных наблюдений.

После подгонки модели к эфемериде JUP230 мы получили достаточно малые среднеквадратические величины  $\sigma_{jac}$  порядка  $0.04''$  (табл. 9), которые, по-видимому, связаны с тем, что в эфемериде отсутствуют короткопериодические возмущения, поскольку положения спутников в JUP230 вычисляются по формулам прецессирующих эллипсов (Jacobson, 1994). При этом периоды спутников изменились не существенно, что в то же время нельзя сказать об эксцентриситетах и наклонениях, в особенности, для Адрастеи и Метиды: значения этих элементов стали заметно меньше. Однако, из этого еще нельзя делать какие-либо выводы о добротности эфемериды НАСА, поскольку модель, лежащая в ее основе, принципиально отличается от нашей.

## Заключение

В заключение перечислим основные результаты работы.

1. Сформулирована проблема неоднозначного определения орбит, которая часто возникает в обратных задачах динамики близких спутников, когда их орбиты определяются по нескольким группам наблюдений, распределенным на достаточно длительных временных интервалах.
2. Проблема неоднозначного определения орбит детально исследована на примере круговой задачи двух тел. В частности, показано, что рассматриваемая неприятная особенность в обратных задачах становится наиболее актуальной в случае двух групп наблюдений, моменты которых рассредоточены на концах длительного интервала времени: в данных условиях целевая функция имеет множество почти равнозначных минимумов и выбор наилучших решений среди тех, в которых достигаются минимумы, становится практически невозможным, в особенно-

- сти, когда наблюдений очень мало и они содержат большие ошибки. Проблема также может иметь место при так называемом резонансном распределении групп наблюдений, что является одним из благоприятных условий для появления почти равнозначных минимумов целевой функции.
3. Введена характеристика  $\Phi$ , наглядно демонстрирующая приближенное распределение минимумов целевой функции вдоль параметра, непосредственно связанного с частотой обращения спутника. Характеристика удобна для исследования обратных задач на предмет наличия множества решений.
  4. На примере круговой задачи также показано, что овражность минимизируемой функции (обусловленность матрицы аппроксимирующей квадратичной формы) непосредственно зависит от суммы квадратических отклонений моментов наблюдений относительно начальной эпохи. Отсюда наименьшая степень овражности (наилучшая обусловленность) достигается при выборе в качестве начальной эпохи среднеарифметической величины всех моментов наблюдений.
  5. Применительно к динамической модели, основанной на формулах задачи двух тел, исследованы возможности метода Гаусса–Ньютона. В результате многочисленных экспериментов показано, что метод в рассматриваемых обратных задачах малоэффективен: в частности, область сходимости итерационной схемы Гаусса–Ньютона настолько мала, что с прикладной точки зрения применение схемы часто оказывается совершенно бесполезной. В этой связи нами предложен составной подход для определения орбитальных параметров, который позволяет достаточно быстро получать минимум целевой функции даже при весьма грубых начальных приближениях. Данный подход предполагает использование известного метода градиентного спуска и так называемого проекционного метода для модификации схемы Гаусса–Ньютона.
  6. Построена численная модель орбитального движения близких спутников, где учитываются основные возмущающие факторы: несферичность гравитационного поля Юпитера (до шестой зональной гармоники), притяжение от галилеевых спутников, Солнца и сторонних планет, а также релятивистские эффекты в рамках задачи Шварцшильда.
  7. По имеющимся наблюдательным данным спутников (Амальтеи, Тебы, Адрастеи и Метиды) получены оценки их орбитальных параметров, а также соответствующие ковариационные матрицы, характеризующие распределение параметрических ошибок.
  8. Исследованы смежные оценки орбитальных параметров Адрастеи и Метиды на предмет их принадлежности к потенциально приемлемым для описания спутниковых орбит. Ввиду того, что Адрастея имеет всего две группы наблюдений, оказывается невозможным получить уверенные оценки орбитальных параметров

спутника. В то же время, несмотря на то, что спутник Метида также наблюдался не столь часто, у нас нет сомнений в том, что изначально полученные оценки орбитальных параметров являются наилучшими и могут быть рекомендованы для численного моделирования спутниковой орбиты.

Наконец, заметим, что все полученные в работе теоретические результаты могут быть обобщены на любую спутниковую систему. Например, проблема неоднозначного определения орбит, по крайней мере, будет иметь место в том случае, когда множество решений по параметру, связанному с частотой обращения спутника, будет лежать в области его допустимых значений. Если взять в качестве такого параметра большую полуось  $a$ , а в качестве предельной вариации —  $\delta a = a\sigma/\sigma_a$ , то в соответствии с (17) при двух группах наблюдений множество решений можно получить уже при условии

$$R > \frac{3\sigma_a}{2\sigma},$$

где  $R$  — число оборотов спутника, которые укладываются во временной интервал, определяемый наблюдениями;  $\sigma_a$  — элонгация спутника, а  $\sigma$  — характерная величина ошибок наблюдений.

Авторы признательны проф. А.М. Черницову и проф. Т.В. Бордовицкой за обсуждение результатов, а также за ценные замечания и предложения. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 05-02-17043.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Авдюшев В.А. Интегратор Гаусса–Эверхарта. Новый фортран-код // Материалы все-росс. конф. "Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики", г. Томск, 3–5 октября 2006 г. Томск: Изд-во ТГУ, 2006. С. 413–414.
- Аразов Г.Т. Аналитическая теория движения пятого спутника Юпитера // Изв. АН АЗССР. Серия физ.-тех и мат. наук. 1972. Т. 2. С. 75–81.
- Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. М: Изд-во МГТУ, 2001.
- Баньщикова М.А., Авдюшев В.А. Численное моделирование динамики спутников Юпитера // Изв. вузов. Физика. Приложение "Небесная механика и прикладная астрономия". Томск: Изд-во ТГУ, 2006. Т. 49. Вып. 2. С. 74–82.
- Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М: Наука. 1972.
- Емельянов Н.В., Арло Ж.Ю., Варфоломеев М.И., Вашковьяк С.Н., Кантер А.А., Кудрявцев С.М., Насонова Л.П., Уральская В.С. Создание теорий движения, эфемерид и баз данных для естественных спутников планет // Космические исследования Томск: Изд-во ТГУ, 1975. Т. 44. С. 136–145.
- Кирюшенков В.Н. Аналитическая теория движения пятого спутника Юпитера // Дисс. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1969.

- Черницов А.М. Анализ некоторых упрощенных схем определения оценок параметров движения небесных тел // *Астрономия и геодезия*. Томск: Изд-во ТГУ, 1975. Вып. 5. С. 6–19.
- Barnard E.E. Discovery and Observations of a Fifth Satellite to Jupiter // *Astron. J.* 1892. V. 12. I. 11. P. 81–85.
- Breiter S. The Theory of Motion of JV Amalthea // *Astron. Astrophys.* 1996. V. 314. P. 966–976.
- Cohn F. Bestimmung der Bahnelemente des V. Jupitersmondes // *Astron. Nachr.* 1897. V. 142. P. 289–338.
- Escobal P. *Methods of Orbit Determination*. New York–London–Sydney: John Wiley and Sons, Inc. 1965.
- Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* 1974. V. 10. P. 35–55.
- Himmelblau D.M. *Applied Nonlinear Programming*. Austin: the University of Texas. 1972.
- Ianna P.A., Seitzer P., Levinson F. Astrometric Observations of the Satellites of the Outer Planets. I — The Galilean Satellites in 1977 // *Astron. J.* 1979. V. 84. P. 429–435.
- Jacobson R.A. Revised Ephemerides of the Inner Jovian Satellites // *JPL IOM*. 1994. V. 314. P. 10–101.
- Jewitt D.C., Danielson G.E., Synnott S.P. Discovery of a New Jupiter Satellite // *Science*. 1979. V. 206. P. 951.
- Kulyk I., Jockers K., Karpov N., Sergeev A. Astrometric CCD Observations of the Inner Jovian Satellites in 1999–2000 // *Astron. Astrophys.* 2002. V. 383. P. 724–728.
- Lainey V., Duriez L., Vienne A. New Accurate Ephemerides for the Galilean Satellites of Jupiter. I. Numerical Integration of Elaborated Equations of Motion // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 420. P. 1171–1183.
- Lainey V., Arlot J.E., Vienne A. New Accurate Ephemerides for the Galilean Satellites of Jupiter. II. Fitting the Observations // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 427. P. 371–376.
- Ledovskaya I.V., Jockers K., Karpov N.V., Sergeev A.V. Astrometric CCD Observations of Jupiter's Inner Satellites Thebe (JXIV) and Amalthea (JV) and Saturn's Satellite Phoebe (SIX) in the 1998 Opposition // *Kinematika i Fizika Nebesnykh Tel.* 1999. V. 15. I. 6. P. 483–488.
- Lieske J. Galilean Satellites Ephemerides E-5 // *Astron. Astrophys.* 1998. V. 129. P. 205–217.
- Mallama A., Aelion M., Mallama C.A. Jovian Satellite Positions from Hubble Space Telescope Images // *Icarus*. 2004. V. 167. I. 2. P. 320–329.
- Mulholland J.D., Benedict G.F., Shelus P. J. Absolute and Relative Positions of Jupiter V (Amalthea) and the Galilean Satellites 1976–1978 // *Astron. J.* 1979. V. 84. P. 668–670.
- Nicholson P.D., Matthews K. Near-infrared Observations of the Jovian Ring and Small Satellites // *Icarus*. 1991. V. 93. P. 331–346.
- Pascu D. *Astrometric Techniques for the Observation of Planetary Satellites* // In: *Planetary satellites*. Tucson: University of Arizona Press, 1977. P. 63–86.
- Seidemann P.K., Abalakin V.K., Bursa M., Davies M.E., de Bergh C., Lieske J.H., Oberst



- J., Simon J.L., Standish E.M., Stooke P., Thomas P.C. Report of the IAU/IAG Working Group on Cartographic Coordinates and Rotational Elements of the Planets and Satellites: 2000 // *Cel. Mech.* 2002. V. 82. I. 1. P. 83–111.
- Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405 // *Interoffice Memorandum*. 1998. V. 312. F-98-048. P. 1–18.
- Sudbury P.V. The Motion of Jupiter's Fifth Satellite // *Icarus*. 1969. V. 10. P. 116–143.
- Synnott S.P. Orbits of the Small Inner Satellites of Jupiter // *Icarus*. 1984. V. 58. P. 178–181.
- Tisserand M.F. Sur le mouvement du cinquieme satellite de Jupiter // *Academie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'Academie des sciences*. 1893. V. 117. P. 1024–1027.
- Van Biesbroeck G. Observations of Jupiter's Fifth Satellite // *Astron. J.* 1955. V. 60. P. 275.
- Van Woerkom A.J.J. The Motion of Jupiter's Fifth Satellite, 1892–1949 // *Astronomical papers prepared for the use of the American ephemeris and nautical almanac*. 1950. V. 13. P. 1–77.
- Veiga C.H., Vieira Martins R. Astrometric Observations of Amalthea and Thebe // *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Serie de Conferencias, VIII Reunion Regional Latinoamericana de Astronomia Union Astronomica Internacional, Montevideo, Uruguay, Nov. 27–Dec. 1, 1995*. 1996. V. 4. P. 118.
- Veiga C.H., Vieira Martins R. CCD Astrometric Observations of Amalthea and Thebe // *Astron. Astrophys.* 2005. V. 437. I. 3. P. 1147–1150.