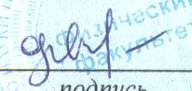


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Физический факультет

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ООП
канд. физ.-мат. наук


подпись О.М. Сюсина

« 15 » июня 2021 г.

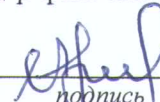
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ИСЗ
В ОРБИТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ РОЯ

по направлению подготовки 09.03.02 — Информационные системы и технологии
профиль «Информационные системы и технологии в геодезии и картографии»

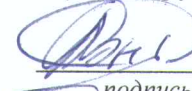
Гонтарев Роман Алексеевич

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук


подпись В.А. Авдюшев

« 15 » июня 2021 г.

Автор работы
студент группы № 051771


подпись Р.А. Гонтарев

« 15 » июня 2021 г.

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа «Численное моделирование динамики ИСЗ в орбитальных элементах Роя» состоит из 29 страниц, 16 рисунков, 4 таблиц, 9 источников.

Ключевые слова: искусственные спутники Земли, орбитальное движение, дифференциальные уравнения, орбитальные элементы Кеплера, Лагранжа и Роя.

Объект исследования — Орбитальное движение искусственных спутников Земли.

Предмет исследования — Дифференциальные уравнения орбитального движения в элементах Роя.

Цель исследования — Исследование эффективности применения дифференциальных уравнений в элементах Роя для численного моделирования орбитального движения искусственных спутников Земли (ИСЗ).

В работе рассматривается вопрос о возможности применения дифференциальных уравнений в элементах Роя для численного моделирования движения ИСЗ. На примере КА ГЛОНАСС, КА Молния, а также геостационарного спутника показано, что моделирование в элементах Роя столь же высокоэффективно, как и в регулярных элементах Лагранжа. Таким образом, учитывая простоту и элегантность уравнений Роя, авторы настоящей работы рекомендуют их в качестве формализации орбитального движения при компьютерном расчете эфемерид навигационных спутников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ.....	5
1.1 Возмущения от сжатия Земли	5
1.2 Притяжение Луны и Солнца	6
1.3 Световое давление	7
2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОРБИТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ	9
2.1 Уравнения в элементах Кеплера	9
2.2 Уравнения в элементах Лагранжа	10
2.3 Уравнения в элементах Роя.....	11
3 ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА.....	12
4 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	14
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ.....	29

ВВЕДЕНИЕ

Орбитальное движение искусственных спутников Земли (ИСЗ) описывается весьма сложными дифференциальными уравнениями, которые не поддаются решению аналитическими способами, поэтому для моделирования спутниковых орбит прибегают к численным методам.

Классическая и традиционная формализация орбитального движения — это дифференциальные уравнения в прямоугольных координатах. Однако их численное интегрирование сопряжено с рядом трудностей, что приводит к низкой эффективности моделирования. Функции дифференциальных уравнений орбитального движения — периодические и быстроизменяющиеся. Поэтому для обеспечения высокой точности спутниковых эфемерид дифференциальные уравнения необходимо интегрировать с малым шагом, что требует больших объемов вычислений, которые сопровождаются быстрым накоплением ошибок округления. Эта трудность усугубляется наличием в уравнениях сингулярности при нулевом геоцентрическом расстоянии, что в случае высоко эллиптических орбит становится причиной сильно неравномерного поведения функций дифференциальных уравнений. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову и, как известно, неустойчивость усиливает всевозможные ошибки, неизбежно сопровождающие любой численный процесс.

Разрешение этих трудностей — формализация спутникового движения в орбитальных элементах, которые при слабых возмущениях, вообще говоря, — медленно изменяющиеся величины. Кеплеровы элементы — неподходящий выбор для моделирования орбит многих функционирующих спутников, поскольку их дифференциальные уравнения сингулярны при нулевых значениях эксцентриситета и наклона. При численном моделировании почти круговых и геоэкваториальных орбит это приводит к большим возмущениям в долготе восходящего узла и аргументе перицентра и быстрым изменениям функций их дифференциальных уравнений даже при слабых возмущающих факторах. Поэтому эти дифференциальные уравнения могут интегрироваться с низкой эффективностью.

Впрочем, регуляризация уравнений возможна путем введения комбинированных орбитальных элементов, каковыми, например, являются широко используемые на практике элементы Лагранжа. Однако их уравнения не лишены другого недостатка уравнений в кеплеровых элементах: они — очень сложные и, кроме того, при интегрировании на каждом шаге многократно требуют преобразование возмущающих сил из прямоугольной системы координат к орбитальной.

Наиболее удачным, на наш взгляд, выбором для численного моделирования спутниковых орбит являются элегантные и простые уравнения в элементах Роя, каковыми являются известные в орбитальной динамике величины. Это — вектор момента количества движения и вектор Лапласа, а также истинная долгота. Целью выпускной работы было исследование эффективности применения дифференциальных уравнений в элементах Роя для численного моделирования орбитального движения ИСЗ.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи: 1) освоить принципы конструирования дифференциальных уравнений в орбитальных элементах, в том числе и в регулярных элементах Роя; 2) изучить теорию методов Рунге–Кутты, а также коллокационного метода Эверхарта для численного решения дифференциальных уравнений; 3) составить алгоритм численной модели орбитального движения на основе дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах и регулярных элементах с использованием для их численного интегрирования классического метода Рунге–Кутты 4-го порядка и метода Эверхарта; 4) написать программы численного моделирования орбитального движения на основе разных дифференциальных уравнений; 5) провести эксперимент по исследованию эффективности численных моделей на примере КА ГЛО-НАСС, геостационарного спутника и КА Молния; 6) выполнить анализ численных результатов эксперимента.

Содержательная часть работы состоит из четырех глав. В первой главе представлены дифференциальные уравнения в прямоугольных координатах, а также изложена основная теория о возмущающих факторах, действующих на ИСЗ. Во второй главе описываются дифференциальные уравнения в орбитальных элементах: в Кеплеровых элементах, в элементах Лагранжа, в элементах Роя. Третья глава разъясняет какие методы и процедуры использовались в программном комплексе. Четвертая глава посвящена исследованию численных результатов. В ней описываются постановка эксперимента и полученные численные результаты.

Результаты исследовательской работы были апробированы на X Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики-2020» (18 – 20 ноября 2020 г., Томск).

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ СИЛ

Пусть искусственный спутник Земли (ИСЗ) движется в поле тяготения планеты под действием сил притяжения Луны и Солнца, а также силы светового давления. Тогда в геоцентрической экваториальной системе координат, отнесенной на эпоху J2000, орбитальное движение спутника будет описываться дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{P}_J + \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_M + \mathbf{P}_L, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ — вектор положения спутника, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)^T$ — вектор скорости спутника, t — время, \mathbf{P}_J — сила от сжатия Земли, \mathbf{P}_S — сила притяжения Солнца, \mathbf{P}_M — сила притяжения Луны, \mathbf{P}_L — сила светового давления.

1.1 Возмущения от сжатия Земли

Возмущающая сила от сжатия Земли \mathbf{P}_J моделировалась с точностью до второй зональной гармоники. Ее можно определить как

$$\mathbf{P}_J = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right)^T, \quad (2)$$

где потенциальная функция имеет вид

$$U = -\frac{\mu J_2 b_E^2}{|\mathbf{x}|^3} L_2(\sin \varphi), \quad \sin \varphi = \frac{x_3}{|\mathbf{x}|}. \quad (3)$$

Здесь J_2 — коэффициент при второй зональной гармонике; b_E — экваториальный радиус Земли; φ — широта спутника; $L_2(z)$ — полином Лежандра второй степени. Дифференцируя потенциальную функцию U (3) по координатам \mathbf{x} , получаем возмущающую силу от сжатия Земли (2):

$$\mathbf{P}_J = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = -\frac{3\mu J_2}{|\mathbf{x}|^3} \left[\frac{\sin \varphi}{|\mathbf{x}|} \left(\mathbf{a} - \sin \varphi \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \right) - L_2(\sin \varphi) \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2} \right],$$

где $\mathbf{a} = (0, 0, 1)^T$ — орт оси аппликат. Значения гравитационных параметров Земли приведены в таблице 1.

Таблица 1 — Гравитационные параметры Земли

Параметр	μ	J_2	b_E
Значение	398600.43560 км ³ /сек ²	0.0010826	6378.14 км

1.2 Притяжение Луны и Солнца

Луна и Солнце довольно отдаленные от спутника тела, поэтому их притяжение можно моделировать как от гравитирующих материальных точек, т.е.

$$\mathbf{P}_P = -\mu_P \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_P}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_P|^3} - \mu_P \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}, \quad (4)$$

где $\mathbf{x}_P = (x_{1P}, x_{2P}, x_{3P})^T$ — положение тела P , а μ_P — его гравитационный параметр.

Положения Луны и Солнца в (4) вычислялись по формулам кругового движения. Их параметры получены методом наименьших квадратов по высокоточным эфемеридам DE406 [1] на 10-летнем интервале времени. На рисунке 1 показаны относительные ошибки положений гравитирующих тел на 100-летнем временном интервале. Несмотря на то что ошибки достаточно большие, в контексте поставленной перед нами задачи точность рассчитываемых положений Луны и Солнца для моделирования возмущающих сил вполне приемлемая.

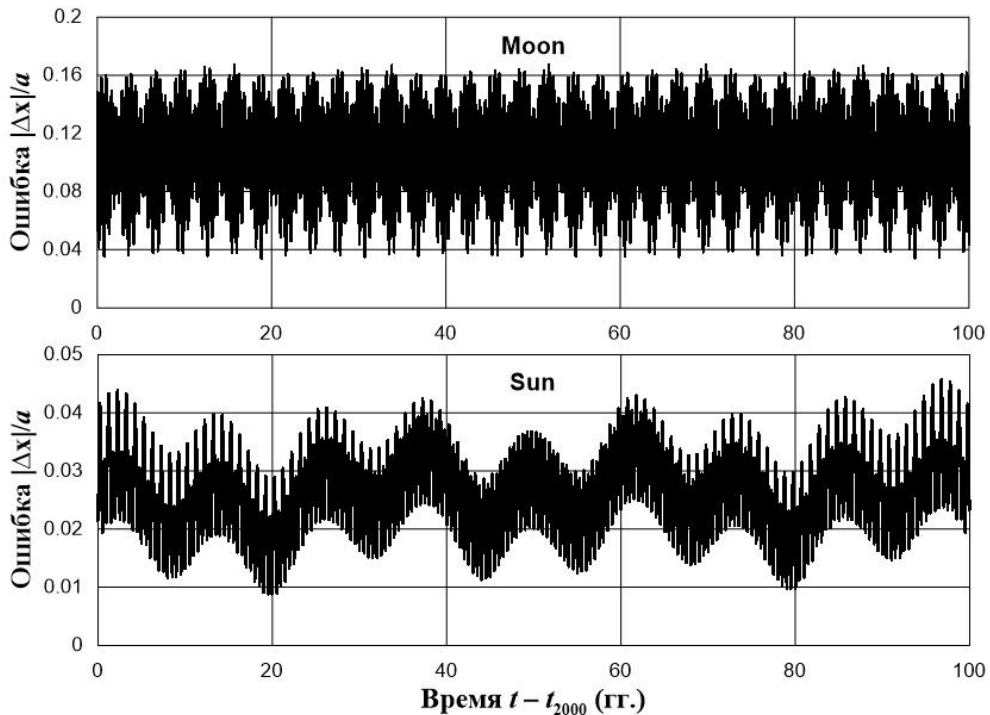


Рисунок 1 — Относительные ошибки в положениях Луны (**Moon**) и Солнца (**Sun**)

Формулы кругового движения для определения положений Луны и Солнца представимы в виде

$$\mathbf{x}_P = a_P (\mathbf{e}_{P1} \cos v_P + \mathbf{e}_{P2} \sin v_P), \quad v_P = n_P (t - t_0), \quad (5)$$

где \mathbf{e}_{P1} и \mathbf{e}_{P2} — взаимно перпендикулярные орты, определяющие орбитальную плоскость тела P ; a_P, v_P и n_P — его большая полуось, аномалия и среднее движение соответственно; $t_0 = 2451545$ — эпоха J2000. Значения используемых в (5) параметров приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Параметры для расчёта положения Луны (M) и Солнца (S)

Параметр	Значение
\mathbf{e}_{M1}	(-0.781828867, -0.662735076, -0.189098618)
\mathbf{e}_{M2}	(0.684636126, -0.662034129, -0.303143777)
a_M , км	384400.0
n_M	0.229970839
\mathbf{e}_{S1}	(0.187697338, -0.901092508, -0.390898965)
\mathbf{e}_{S2}	(0.982206403, 0.172203218, 0.074665066)
a_S , км	149597871.0
n_S	0.0172024238

1.3 Световое давление

Значительное влияние на спутник также могут оказывать радиационные силы, в частности сила светового давления. Будем предполагать, что мощность потока солнечной радиации постоянна, а сила светового давления направлена по линии Солнце–спутник. Тогда силу светового давления можно представить в виде

$$\mathbf{P}_L = k\theta a_E^2 \frac{\sigma}{m} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|^3}, \quad (6)$$

где $k = 4.56 \cdot 10^{-6}$ Н/м² — солнечная постоянная, θ — постоянная, которая характеризует отражающие свойства объекта, a_E — астрономическая единица σ и m — площадь миделева сечения и масса исследуемого объекта соответственно.

Для учета прохождения тени Земли в (6) как множитель вводится так называемая функция тени Φ . Она представляет собой площадь видимой части светила, перекрываемого Землей. Предположим, что Солнце и Земля имеют форму шара. Введем радиусы r_S и r_E видимых со спутника дисков Солнца и Земли, а также угловое расстояние между ними r [2]:

$$r_S = \arcsin \frac{b_S}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|}, \quad r_E = \arcsin \frac{b_E}{|\mathbf{x}|}, \quad r = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)}{|\mathbf{x}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|},$$

где b_S и b_E — соответствующие радиусы светила и перекрывающего тела.

Функция тени вводится при условии затмения:

$$r < r_S + r_E \quad \text{и} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S| > |\mathbf{x}|.$$

Ее можно представить в виде

$$\Phi = 1 - \frac{s}{s_S},$$

где s — площадь ущерба:

$$s = \begin{cases} s_{SE}, & \text{если } r > |r_S - r_E|, \\ s_E, & \text{если } r \leq |r_S - r_E| \text{ и } r_E < r_S, \\ s_S, & \text{если } r \leq |r_S - r_E| \text{ и } r_E \geq r_S; \end{cases}$$

а s_S , s_P и s_{SE} — площади дисков Солнца и Земли, а также их пересечения:

$$s_S = \pi R_S^2, \quad s_P = \pi r_E^2, \quad s_{SE} = \frac{r_S^2}{2} (\theta_S - \sin \theta_S) + \frac{r_E^2}{2} (\theta_E - \sin \theta_E).$$

Величины θ_S и θ_E — это углы между радиальными направлениями из центров дисков в точки пересечения их границ. Они определяются по формулам:

$$\theta_S = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_S^2 - r_E^2}{2rr_S} \right), \quad \theta_E = 2 \arccos \left(\frac{r^2 + r_E^2 - r_S^2}{2rr_E} \right).$$

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОРБИТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

2.1 Уравнения в элементах Кеплера

Численное интегрирование дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах (1) сопряжено с рядом трудностей, что приводит к низкой эффективности моделирования. Функции дифференциальных уравнений — периодические и быстро изменяющиеся. Поэтому для обеспечения высокой точности спутниковых эфемерид дифференциальные уравнения необходимо интегрировать с малым шагом, что требует больших объемов вычислений, которые сопровождаются быстрым накоплением ошибок округления. Эта трудность усугубляется наличием в уравнениях сингулярности при нулевом геоцентрическом расстоянии, что в случае высоко эллиптических орбит становится причиной сильно неравномерного поведения функций дифференциальных уравнений. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову и, как известно, неустойчивость усиливает всевозможные ошибки, неизбежно сопровождающие любой численный процесс.

Разрешение этих трудностей — формализация спутникового движения в орбитальных элементах, которые при слабых возмущениях, вообще говоря, — медленно изменяющиеся величины. Один из вариантов — это использование элементов Кеплера. Дифференциальные уравнения в этих элементах имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= \frac{2a^2 e \sin v}{p} S + \frac{2a^2}{|\mathbf{x}|} T, \\
 \frac{de}{dt} &= S \sin v + \left[\cos v + (\cos v + e) \frac{|\mathbf{x}|}{p} \right] T, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{|\mathbf{x}|}{p} \cos u W, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{|\mathbf{x}| \sin v}{p \sin i} W, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos v}{e} S + \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{|\mathbf{x}|}{p} \right) T - \frac{|\mathbf{x}|}{p} \sin u \operatorname{ctg} i W, \\
 \frac{dv}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu p}}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{\cos v}{e} S - \frac{\sin v}{e} \left(1 + \frac{|\mathbf{x}|}{p} \right) T,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где a — большая полуось; e — эксцентриситет; v — истинная аномалия; $p = a(1 - e^2)$ — фокальный параметр; $u = v + \omega$ — аргумент широты; Ω — долгота восходящего узла; i — наклонение; ω — аргумент перицентра.

$$|\mathbf{x}| = \frac{p}{1 + e \cos v}, \quad (S, T, W)^T = \sqrt{p/\mu} \mathbf{RP}, \quad u = v + \omega.$$

S, T, W — величины, пропорциональные проекциям возмущающего ускорения на оси орбитальной системы координат; \mathbf{P} — равнодействующая возмущающих сил; \mathbf{R} — матрица перехода от исходной системы координат к орбитальной:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i & \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i & \sin u \sin i \\ -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i & -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i & \cos u \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{pmatrix};$$

2.2 Уравнения в элементах Лагранжа

Недостаток уравнений в элементах Кеплера (7) состоит в том, что они сингулярны в нулевых значениях эксцентриситета и наклона. При моделировании почти круговых и геоэквиаториальных орбит это может приводить к быстрому и нерегулярному изменению долготы восходящего узла Ω и аргумента перигея ω и, следовательно, к такому же поведению правых частей их дифференциальных уравнений, которые будут интегрироваться с низкой эффективностью.

Впрочем, регуляризация этих уравнений возможна путем введения комбинированных орбитальных элементов, каковыми, например, являются широко используемые на практике элементы Лагранжа [4]

$$\begin{aligned} p &= a(1-e^2), \quad g = e \sin(\Omega + \omega), \quad h = e \cos(\Omega + \omega), \\ f &= \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega, \quad q = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega, \quad \lambda = \omega + \Omega + v. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение движения в элементах Лагранжа представимы в виде

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 2pHT, \\ \frac{dg}{dt} &= [(1+H) \sin \lambda + gH]T - S \cos \lambda + GhW, \\ \frac{dh}{dt} &= [(1+H) \cos \lambda + hH]T + S \sin \lambda + GgW, \\ \frac{df}{dt} &= H\theta W \sin \lambda, \\ \frac{dq}{dt} &= H\theta W \cos \lambda, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\sqrt{\mu/p^3}}{H^2} + GW, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} G &= H(q \sin \lambda - f \cos \lambda), \quad |\mathbf{x}| = pH, \\ H &= (1 + h \cos \lambda + g \sin \lambda)^{-1}, \quad \theta = \frac{1}{2}(1 + f^2 + q^2). \end{aligned}$$

Переход к прямоугольным координатам осуществляется при помощи формул

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(r_{11}, r_{12}, r_{13})^T, \quad \dot{\mathbf{x}} = V_1(r_{11}, r_{12}, r_{13})^T + V_2(r_{21}, r_{22}, r_{23})^T,$$

$$V_1 = \sqrt{\mu/p}(h \sin \lambda - g \cos \lambda), \quad V_2 = \sqrt{\mu/p}(1 + g \sin \lambda + h \cos \lambda),$$

где r_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) — элементы матрицы перехода к орбитальной системе координат

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\theta} \begin{pmatrix} (\theta - f^2) \cos \lambda + qf \sin \lambda & (\theta - q^2) \sin \lambda + qf \cos \lambda & q \sin \lambda - f \cos \lambda \\ qf \cos \lambda - (\theta - f^2) \sin \lambda & (\theta - q^2) \cos \lambda - qf \sin \lambda & q \cos \lambda + f \sin \lambda \\ f & -q & 1 - \theta \end{pmatrix}.$$

2.3 Уравнения в элементах Роя

Несмотря на то что введение элементов Лагранжа (8) устраняет сингулярности уравнений в элементах Кеплера, регулярные уравнения (9) не лишены другого недостатка уравнений (7): они очень сложные, содержат много тригонометрических функций и, кроме того, при интегрировании на каждом шаге многократно требуют преобразование возмущающих сил из прямоугольной системы координат к орбитальной.

А. Рой предложил использовать в качестве орбитальных элементов известные в небесной механике величины: это — вектор количества момента движения \mathbf{c} и вектор Лапласа \mathbf{g} , а также истинную долготу λ .

В итоге он получил следующие уравнения в элементах [5]

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{x} \times \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{g}}{dt} = \mathbf{P} \times \mathbf{c} + \dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{c}}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{x}|^2} + \frac{c_1 \dot{c}_2 - c_2 \dot{c}_1}{|\mathbf{c}|(|\mathbf{c}| + c_3)}. \quad (10)$$

Переход от элементов Роя к прямоугольным координатам осуществляется по формулам

$$\begin{aligned} \gamma &= g_1 - \frac{g_3 c_1}{|\mathbf{c}| + c_3}, \quad \delta = g_2 - \frac{g_3 c_2}{|\mathbf{c}| + c_3}, \\ |\mathbf{g}| \cos v &= \gamma \cos \lambda + \delta \sin \lambda, \quad |\mathbf{g}| \sin v = \gamma \sin \lambda - \delta \cos \lambda, \\ |\mathbf{x}| &= \frac{|\mathbf{c}|^2}{\mu + |\mathbf{g}| \cos v}, \quad \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{|\mathbf{x}| |\mathbf{g}| \sin v}{|\mathbf{c}|}, \\ x_1 &= |\mathbf{x}| \cos \lambda = \frac{x_3 c_1}{|\mathbf{c}| + c_3}, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \sin \lambda + \frac{x_3 c_2}{|\mathbf{c}| + c_3}, \\ x_3 &= -\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{c}|} (c_1 \cos \lambda + c_2 \sin \lambda), \\ \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{x} + (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}. \end{aligned}$$

3 ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА

Программный комплекс для различных численных моделей уравнений реализован с помощью открытой среды разработки программного обеспечения Lazarus на языке Object Pascal в компьютерной арифметике с двойной точностью. Опишем структуру разработанной программы.

Вначале считываем из входного файла начальные условия для исследуемого объекта, т.е. кеплеровы элементы $a, e, i, \Omega, \omega, \nu$:

```
while not EOF(source_file) do begin  
  readln(source_file, start_param[counter]);  
  counter := counter + 1;  
end;  
for i := 1 to 6 do  
  start_elem[i] := start_param[i];
```

а также масса m , площадь поперечного сечения спутника σ и количество оборотов n_{circle} . По описанным выше формулам были составлены процедуры перехода от прямоугольных координат к элементам и наоборот для различных вариантов моделей:

```
procedure COOR2ELEM(m:extended; x:mas6; var EL:mas6);  
procedure ELEM2COOR(m:extended; EL:mas6; var x: mas6);
```

Для модели на основе уравнений в элементах Лагранжа написана дополнительная процедура перехода от элементов Кеплера к равноденственным элементам по формулам (8):

```
procedure ELEM_LAGR(EL_kep: mas6; var OU: mas6);
```

Кроме того, автором данной работы написаны процедуры и функции всех возмущений, которые рассматриваются в работе:

```
function SHADOW(XS: mas3; X: mas6): extended;  
procedure SUNFORCE(t, m: extended; x_beg: mas6; var p_sun: mas3);  
procedure MOONFORCE(t, m: extended; x_beg: mas6; var p_moon: mas3);  
procedure OBLATENESS(mas:mas6; var p_earth: mas3);  
procedure SUNLITE(t:extended; EL:mas6; var P_sunlite: mas3);
```

Для расчета положений Луны и Солнца использовались формулы (5), которые программно реализованы в процедурах

```
procedure GEOSUN(T:extended; var X:mas3);  
procedure GEOMOON(T:extended; var X:mas3);
```

После инициализации элементов Кеплера переводим их в прямоугольные координаты, чтобы использовать их в качестве эталонных для оценивания методической точности del_r . Далее с помощью процедуры COOR2ELEM переводим прямоугольные координаты в соответствующие интегрируемые переменные. Затем выполняется численное интегрирование уравнений (1), (9) или (10) в зависимости от выбранной модели.

В первой версии программ рассматривалось интегрирование классическим методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Численное моделирование выполнялось на интервале 10

орбитальных периодов. Мы варьировали количество шагов за оборот $nstep$, начиная с 16 и умножая на 2 до тех пор, пока $nstep$ не станет больше 150000, и выполняли прямое и обратное интегрирование. Сравнивая получаемые координаты с эталонными, оценивали точность интегрирования del_r . В качестве характеристики быстродействия принимали количество обращений к процедуре правых частей дифференциальных уравнений NCF. Полученные результаты записывались в выходной файл.

Кроме классического метода Рунге–Кутты использовалась Delphi-версия интегратора Эверхарта [6]:

```
procedure rada27(ti,tf,xl:extended;var x,v:mas7;ll,nv,ni:integer;
                var nf,ns:longint;nclass,nor:integer);
```

Описание входных и выходных параметров приведено в таблице 3.

Таблица 3 — Входные и выходные переменные интегратора Эверхарта

Параметры	Описание
ti	Начальный момент времени
tf	Конечный момент времени
xl	Величина шага интегрирования
x	Массив интегрируемых переменных
ll	Параметр, отвечающий за локальную точность
nv	Количество интегрируемых уравнений
ni	Количество итераций для реализации неявной схемы интегрирования
nf	Количество обращений к функциям уравнений
ns	Количество выполненных шагов
nclass	Тип системы уравнений
nor	Порядок интегратора

Для версии программы, которая использует интегратор Эверхарта, порядок действий почти тот же самый. При круговой или почти круговой орбите мы проводили интегрирование с постоянным шагом ($ll < 0$). Варьируем $nstep$, начиная от $nstep=15$ и умножаем на каждом шаге на 1.2 до тех пор, пока $nstep$ не станет больше 120. В случае интегрирования высокоэллиптических орбит необходимо указывать порядок локальной точности ($ll \geq 0$). При таком значении параметра шаг будет переменным, интегратор сам подбирает его в соответствии с задаваемой точностью. После интегрирования вычисляем del_r и записываем результат в файл вместе с NCF.

4 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для тестирования дифференциальных уравнений движения мы выбрали три объекта с разным типом орбит: КА ГЛОНАСС, геостационарный спутник и КА Молния.

ГЛОНАСС (глобальная навигационная спутниковая система) разработана в Российской Федерации. Состоит из 24 спутников, которые равномерно распределены в трех орбитальных плоскостях. Предназначены спутники для обеспечения бесперебойного доступа к навигационной системе для всех потребителей, как российского, так и иностранного гражданства, на безвозмездной основе. ГЛОНАСС позволяет в любой точке Земного шара, определять точные координаты точек на местности, а также скорость объекта, вести наблюдения движения тектонических плит и т.д. [7]. Каждый космический аппарат навигационной системы находится на средневысокой почти круговой орбите. Полный оборот совершает примерно за 11 часов 15 минут. Характеристики КА ГЛОНАСС приведены в таблице 4.

Геостационарные спутники располагаются на высоте 35786 км в экваториальной плоскости Земли (таблица 4). Период движения каждого спутника 23 часа 56 минут 4 секунды (звездные сутки), что обеспечивает ему стационарное положение во вращающейся координатной системе, связанной с Землей. Эти космические аппараты используются для междугородней и международной телефонной связи. Они обеспечивают также передачу данных, телевизионное вещание, выход в интернет. В настоящее время на геостационарной орбите находится около 500 ИСЗ. Около половины из них — действующие спутники [8].

Таблица 4 — Орбитальные и физические параметры ИСЗ [9]

Параметр	ГЛОНАСС	Геостационарный	Молния
Большая полуось, км	25778	42164	26600
Эксцентриситет	0.0001	0	0.74
Наклонение, °	64.8	0	63.4
Аргумент перицентра, °	0	0	270
Масса, кг	1500	3000	1600
Площадь миделева сечения, м ²	17.67	28.27	32

Изначальное предназначение спутников Молния — это обеспечение телерадиовещания на всей территории СССР. Они также используются для телефонно-телеграфной и других видов связи между Москвой и Владивостоком. Орбита КА Молния сильно вытянутая, имеет критическое наклонение (таблица 4). За сутки спутник совершает два оборота. На рисунке 2 изображены схематические орбиты исследуемых объектов.

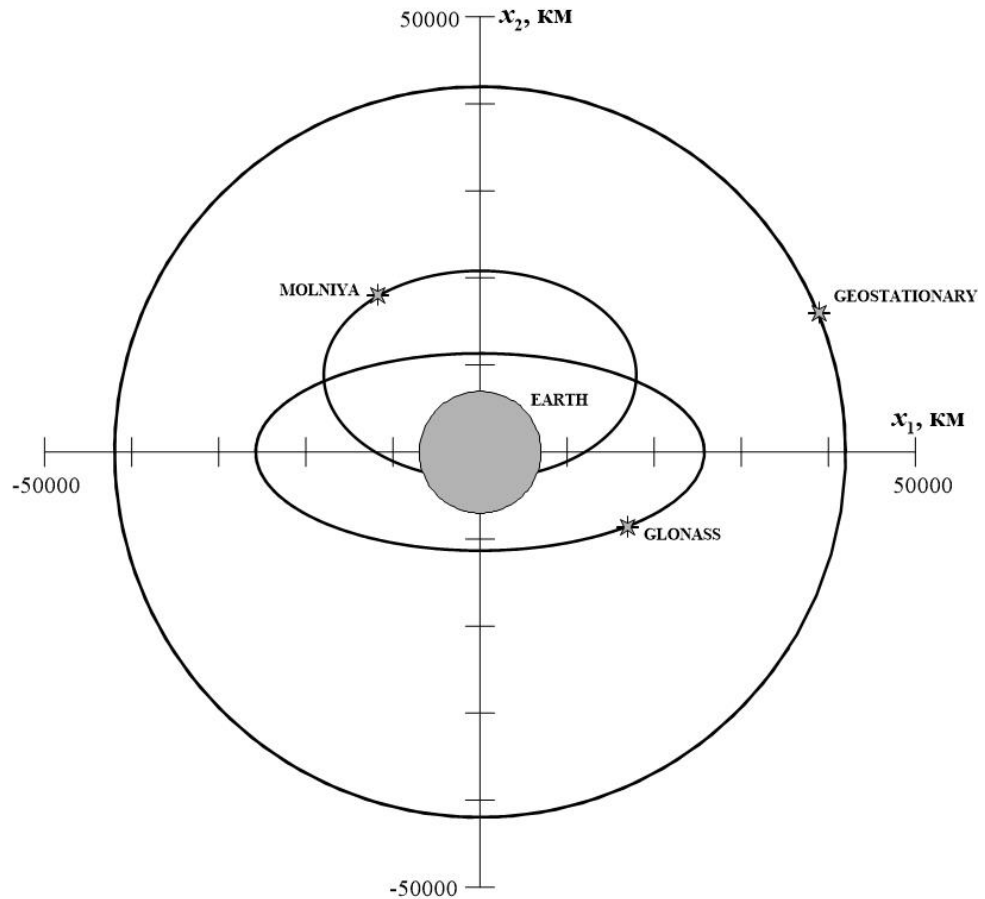


Рисунок 2 — Орбиты спутников ГЛОНАСС (GLONASS), геостационарного (GEOSTATIONARY) и Молнии (MOLNIYA)

Возмущения в орбитальных элементах КА ГЛОНАСС приведены на рисунке 3. Как видно, возмущения большой полуоси и эксцентриситета очень слабые, следовательно, размер и форма орбиты остается почти без изменений. Наклонение также претерпевает малые изменения, поэтому орбитальная плоскость практически не меняется. Изменения в долготе восходящего узла носят вековой характер, что указывает на регулярную прецессию орбиты, причем с достаточно большой скоростью. В то же время изменения в аргументе перигея весьма значительные. Высокоамплитудные периодические возмущения в аргументе перигея обусловлены, главным образом, сильной чувствительностью углового элемента к возмущающим силам в почти круговом движении. Кстати, это является аргументом не прибегать к уравнениям в элементах Кеплера (7), поскольку уравнение для аргумента перигея может интегрироваться с низкой эффективностью.

Рисунок 4 показывает, что большая полуось и эксцентриситет орбиты геостационарного спутника, как и у ГЛОНАСС, слабо изменяются. Наклонение также возмущается

незначительно и носит, скорее всего, долгопериодический характер. Периодические и большие возмущения в аргументе перицентра, как и в случае ГЛОНАСС, связаны с большой неопределенностью угловой величины в почти круговом движении. Возмущения в долготе восходящего узла ведут себя в основном вековым образом. Всплеск на начальном участке объясняется малым начальным наклоном, при котором угловая величина становится очень чувствительной к возмущающим факторам.

На рисунке 5 представлены возмущения в кеплеровых элементах для спутника Молния. Как видно из рисунка, возмущения в большой полуоси достаточно большие и достигают 160 км, хотя носят периодический характер со всплесками при стремительном прохождении спутником перицентра. Такого же характера возмущения в эксцентриситете и наклоне, однако их амплитуды незначительные. Вековые изменения в долготы восходящего узла говорят о том, что орбита быстро прецессирует. Аргумент перицентра слабо колеблется около начального значения. Это объясняется, главным образом, тем, что орбита имеет критическое наклонение.

На рисунках 6–8 показаны также возмущения в элементах Роя, а именно в векторах Лапласа и момента количества движения. Они, в отличие от возмущений в кеплеровых элементах, — слабо изменяющиеся величины. Это свидетельствует о том, что регулярные элементы Роя хорошо подходят для формализации орбитального движения небесных тел, поскольку слабые возмущения в элементах гарантируют эффективное интегрирование их дифференциальных уравнений.

Мы исследовали эффективность численных моделей орбитального движения ИСЗ на основе дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах, а также в регулярных элементах Лагранжа и Роя. Дифференциальные уравнения интегрировались численно классическим методом Рунге–Кутты 4-го порядка и неявным коллокационным методом Эверхарта 15-го порядка. Ошибка интегрирования ($|\Delta x|$) оценивалась в векторе положения как максимальная величина разности между расчетным положением и точным на всем интервале интегрирования. В качестве показателя быстродействия рассматривалось количество вычислений функций дифференциальных уравнений (NCF). Характеристики эффективности получены по результатам многократных расчетов при варьировании задаваемой величины постоянного шага интегрирования либо задаваемой величины локальной ошибки (в методе Эверхарта для интегрирования орбиты Молнии).

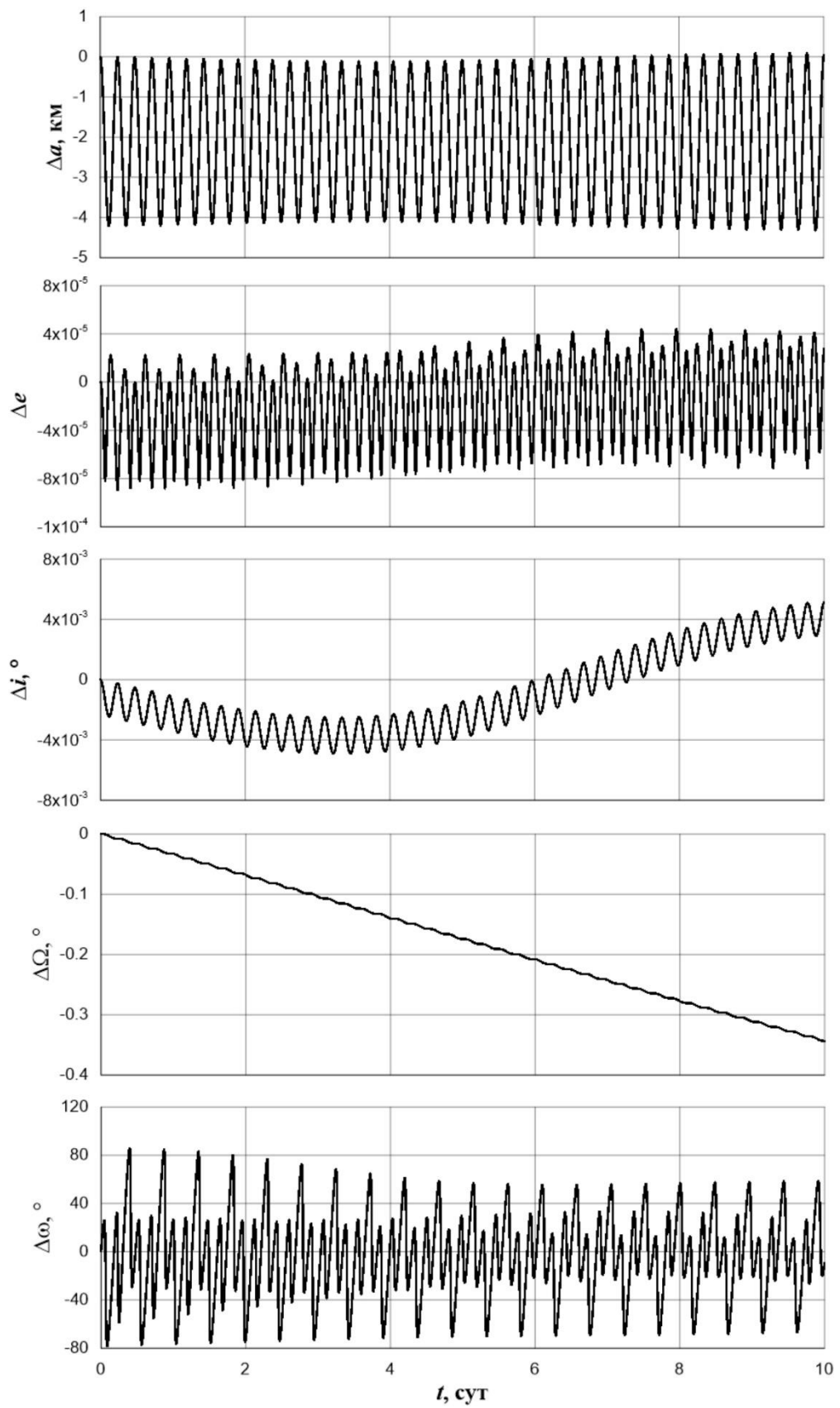


Рисунок 3 — Возмущения в элементах Кеплера для КА ГЛОНАСС

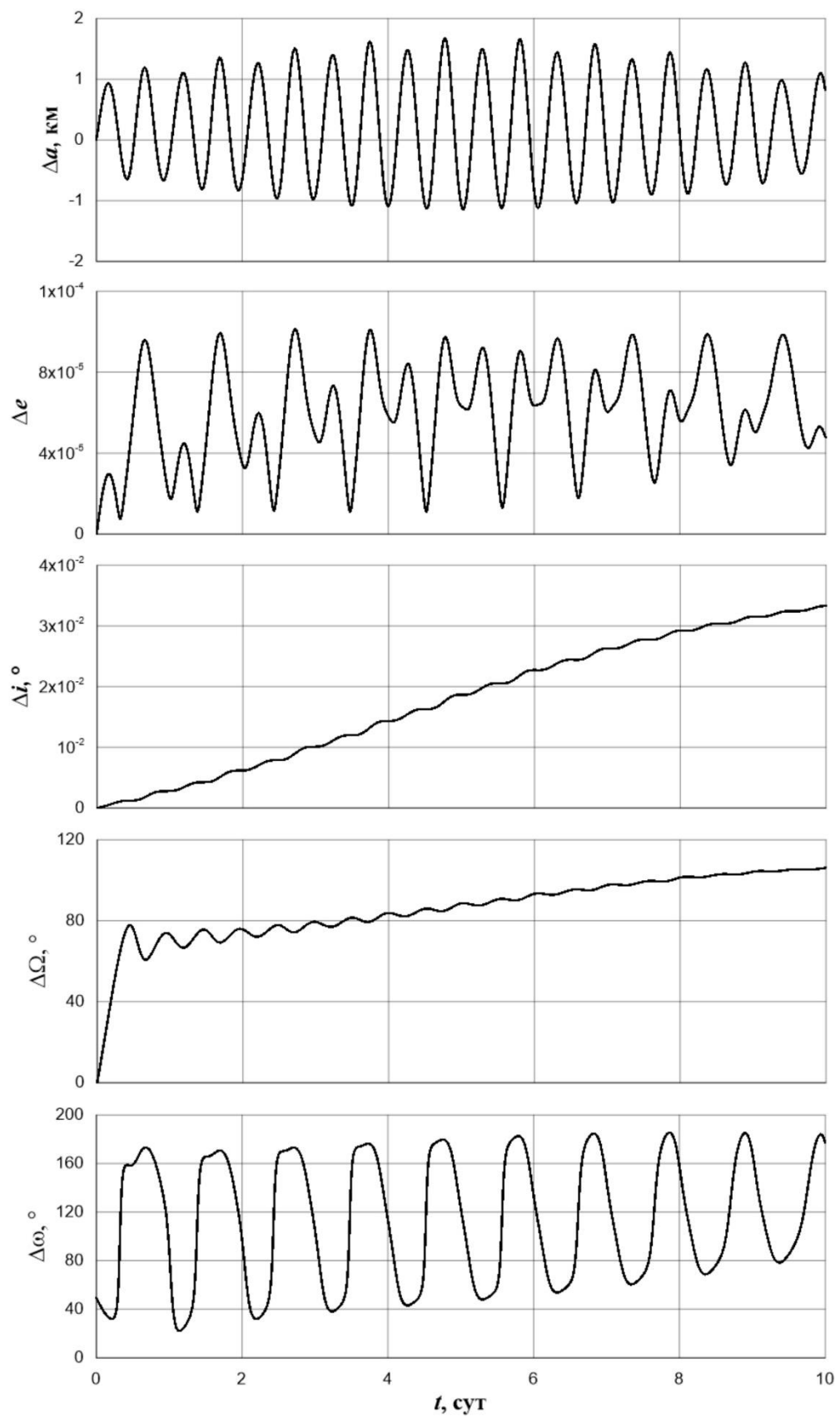


Рисунок 4 — То же, что и на рисунке 3, но для геостационарного спутника

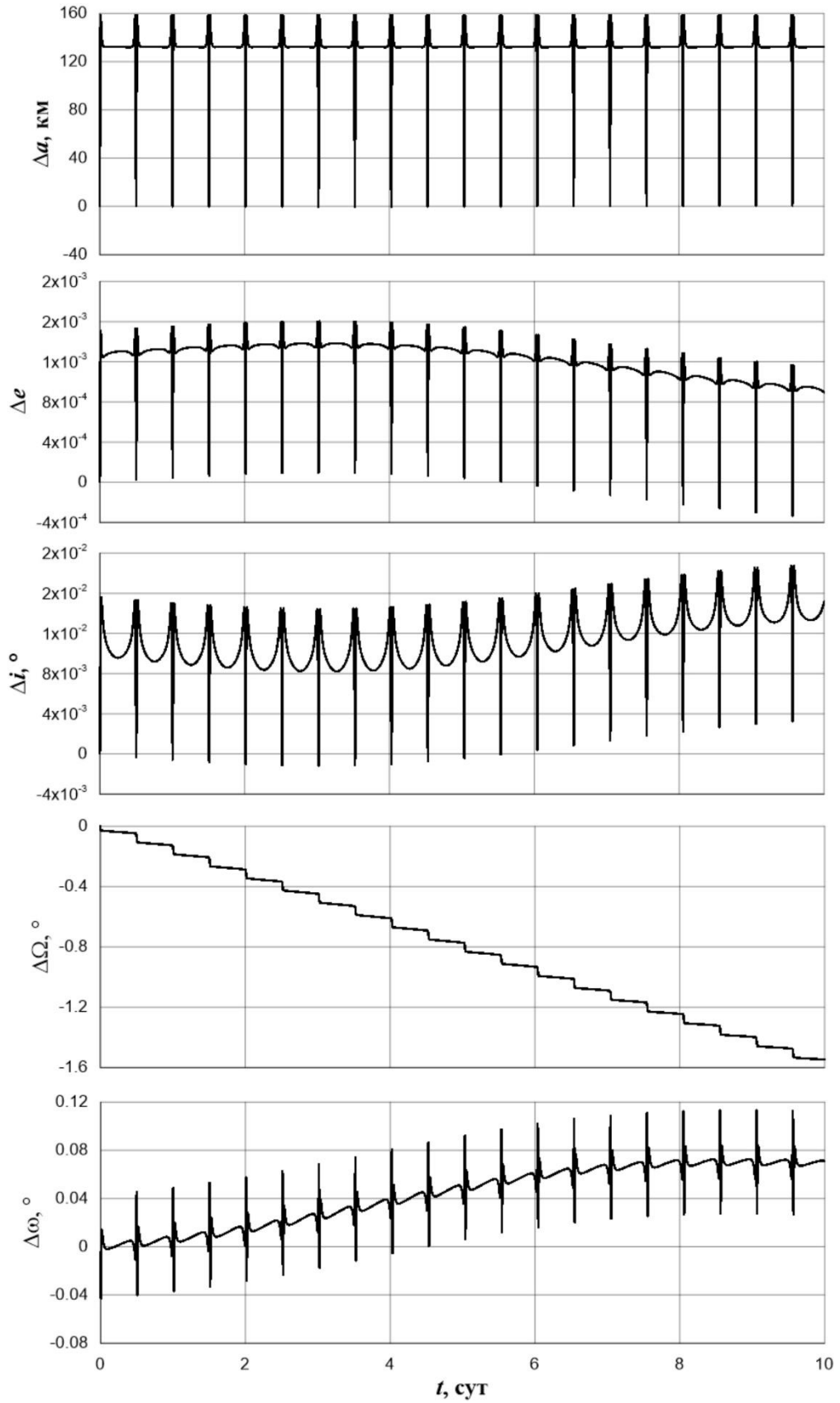


Рисунок 5 — То же, что и на рисунке 3, но для КА Молния

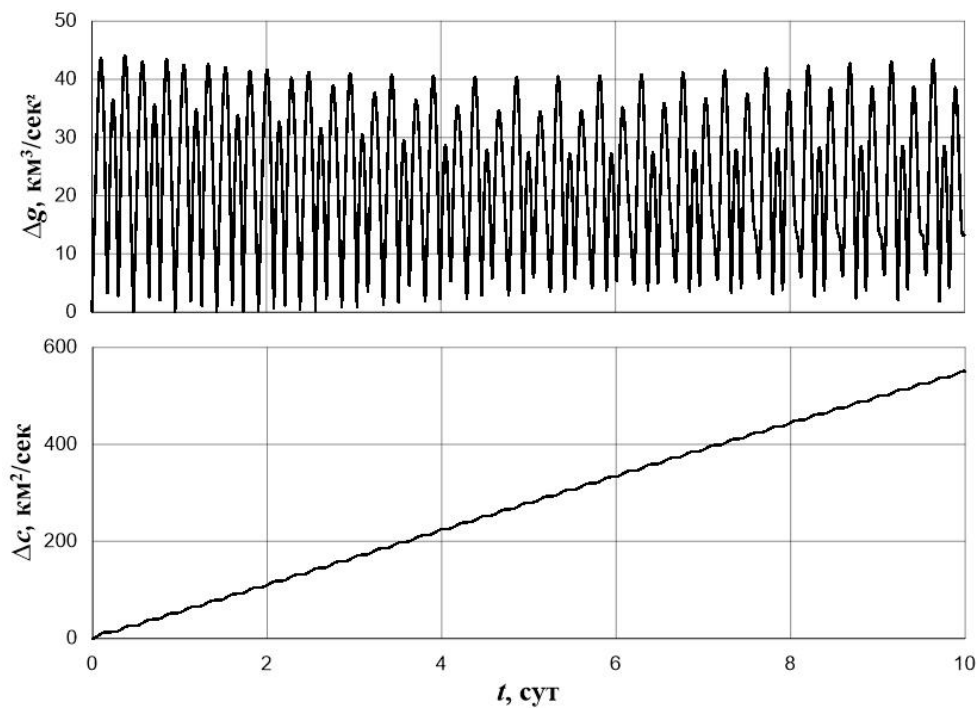


Рисунок 6 — Возмущения в элементах Роя для КА ГЛОНАСС

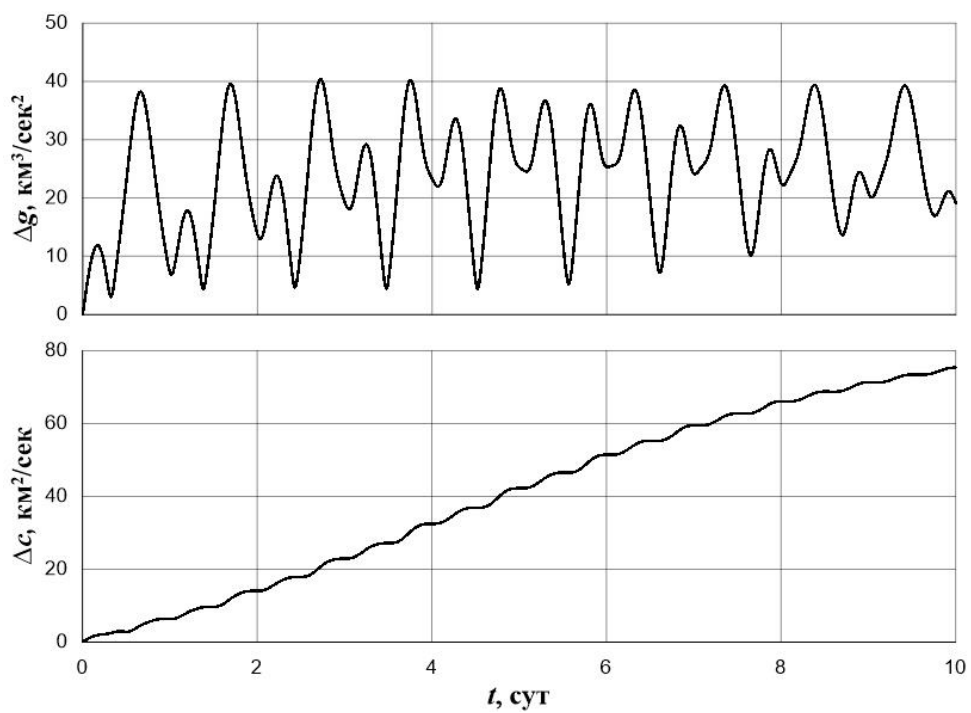


Рисунок 7 — То же, что и на рисунке 6, но для геостационарного спутника

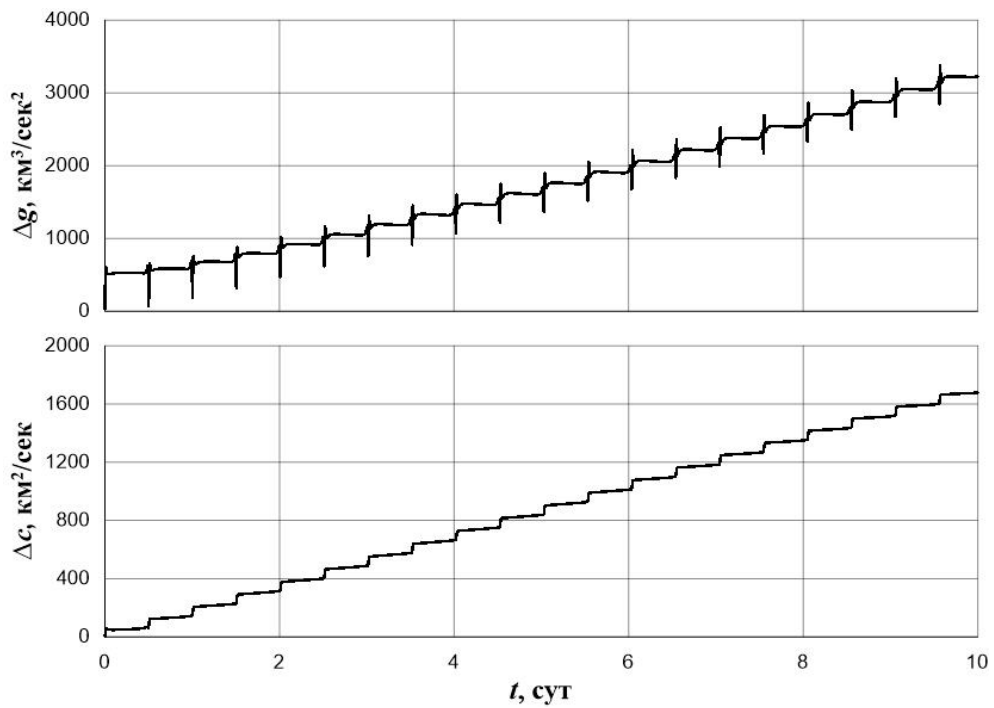


Рисунок 8 — То же, что и на рисунке 6, но для КА Молния

Каждая характеристика (см., например, рисунок 9) в логарифмических шкалах имеет форму клюшки. Ее черенок представляет зависимость методической точности от объема вычислений, который обратно пропорционален средней величине шага. Крутизна черенка обусловлена порядком интегратора: чем выше порядок, тем круче черенок. Крюк характеристики вызван влиянием ошибок округления, которые фактически задают предел наивысшей достижимой точности вычислений. Таким образом, эффективность интегратора тем выше, чем левее и ниже на графике ее характеристика.

На рисунке 9 представлены результаты для КА ГЛОНАСС. Характеристики на рисунке показывают, насколько неэффективными оказываются уравнения в прямоугольных координатах, интегрируемые методом Рунге–Кутты. В то же время уравнения в элементах, интегрируемые этим же методом, дают колоссальный прирост эффективности. Например, миллиметровая точность для этих уравнений достигается в 20 раз быстрее, нежели для уравнений в прямоугольных координатах. Применяя интегратор Эверхарта, можно улучшить полученные результаты еще в несколько раз. Даже моделирование в прямоугольных координатах на предельной точности выполняется так же быстро, как и в элементах при использовании метода Рунге–Кутты. Применение интегратора более высокого порядка для уравнений в регулярных элементах показывает уже не столь впечатляющие результаты. Тем не менее, их эффективность с практической точки зрения все же весьма высокая: точность повышается в 2 раза, тогда как быстродействие в 4 раза.

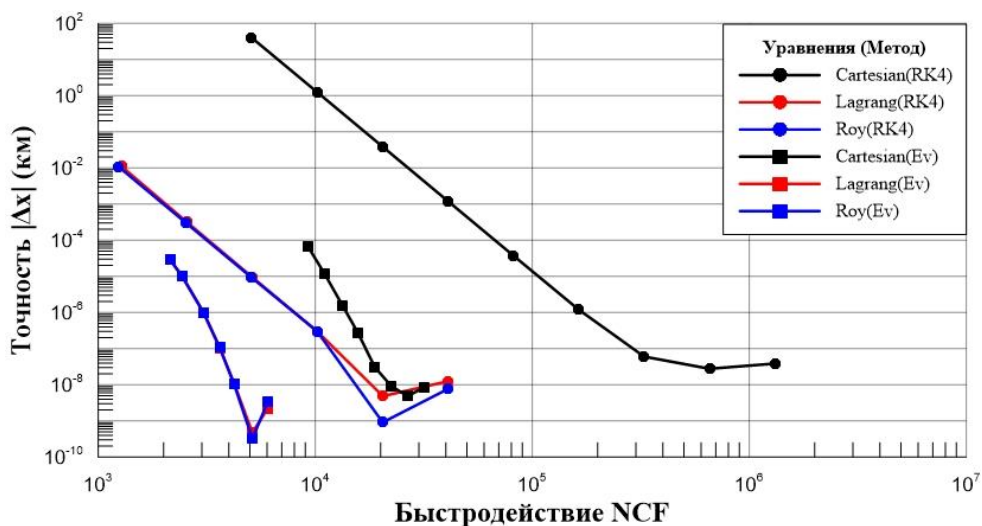


Рисунок 9 — Характеристика точность–быстродействие для различных дифференциальных уравнений движения и численных методов интегрирования для КА ГЛОНАСС

Рисунок 10 показывает, что прямоугольные уравнения для геостационарного спутника также оказываются крайне неэффективными по сравнению с уравнениями в элементах. Характеристика точность–быстродействие для уравнений в декартовых координатах, интегрируемых методом Эверхарта, получается даже лучше, чем для уравнений в элементах, интегрируемых методом Рунге–Кутты. Уравнения в элементах, интегрируемые методом Эверхарта, также демонстрируют хороший прирост эффективности. Если сравнивать характеристики, полученные интеграторами Эверхарта и Рунге–Кутты применительно к уравнениям в элементах, то мы видим, что неявный интегратор 15-го порядка эффективнее явного интегратора 4-го порядка по быстродействию примерно в 6 раз, тогда как по точности в 2.5 раза.

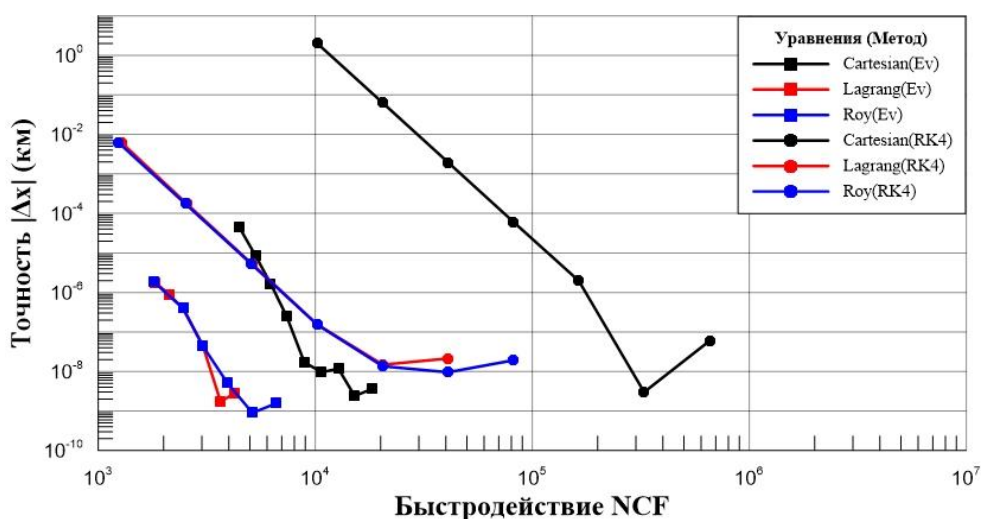


Рисунок 10 — То же, что и на рисунке 9, но для геостационарного спутника

Как было указано выше, спутник Молния движется по сильно вытянутой орбите. Поэтому его орбиту необходимо интегрировать с переменным шагом. Интегратор Рунге–Кутты не обладает этой возможностью. Следовательно, используя его для высокоэллиптических орбит, мы будем получать результаты хуже, чем для почти круговых орбит. На рисунках 11–13 приведены характеристики точность–быстродействие для спутника, у которого мы варьировали эксцентриситет, причем остальные элементы были такими же, как у КА Молния. Мы можем видеть из рисунков, что с увеличением эксцентриситета точность постепенно ухудшается, а быстродействие замедляется. Для достижения заданной точности сильноэллиптические орбиты требуют большее количество обращений к функциям дифференциальных уравнений, нежели круговые орбиты. При эксцентриситете 0.74 мы уже не видим разительных отличий между результатами моделирования в декар-

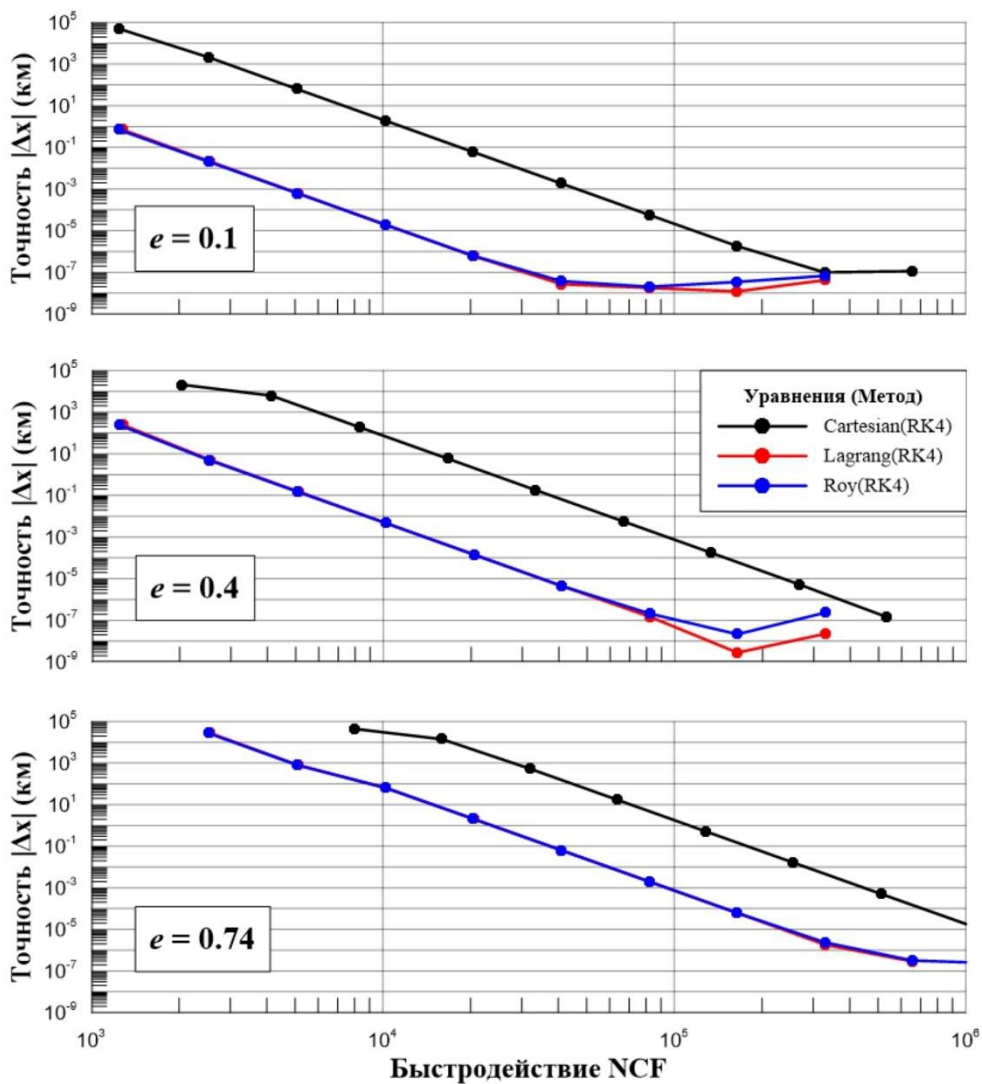


Рисунок 11 — Характеристика точность – быстродействие для различных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом Рунге-Кутта 4 порядка, для спутника с разным орбитальным эксцентриситетом

товых координатах и в регулярных элементах. Тем не менее миллиметровая точность по-прежнему достигается. Уравнения в элементах примерно в 6 раз эффективнее по быстродействию, чем уравнения в прямоугольных координатах.

При использовании интегратора Эверхарта с увеличением эксцентриситета результаты интегрирования также ухудшаются (рисунок 12). При этом уменьшается выигрыш по быстродействию уравнений в элементах. Например, при орбитальном эксцентриситете спутника Молния ($e = 0.74$) уравнения в элементах повышают быстродействие только в 1.5 раза. Напомним, что для круговых орбит уравнения в элементах позволяют повысить быстродействие в 6 раз. Несмотря на это численные результаты для интегратора Эверхарта значительно лучше, чем для интегратора Рунге–Кутты (рисунок 13).

Высокая эффективность уравнений в регулярных элементах имеет место при гладких возмущениях в орбитальном движении. В ситуации, когда спутник проходит тень Земли, точность численного интегрирования резко ухудшается. Причина в том, что в момент попадания КА в зону неполной освещенности, сила светового давления изменяется почти скачкообразно, что приводит к очень быстрому изменению правых частей дифференциальных уравнений движения. Кратковременное прохождение спутника через полутень сопровождается хоть и малыми, но весьма быстрыми возмущениями, на которые алгоритм выбора шага интегратора при моделировании может не отреагировать. Это приводит к потере точности в рассчитываемых положении и скорости спутника, поскольку интегрирование орбиты на таких участках следует выполнять с малым шагом.

На рисунках 14–16 представлены характеристики для исследуемых объектов, когда они проходят тень Земли. Из рисунков видно, что для каждого объекта и почти всех видов уравнений происходит значительное ухудшение точности. Попытка использовать интегратор более высокого порядка не спасает ситуацию. Уравнения, интегрируемые им, несколько не улучшают точность: она находится на уровне интегратора Рунге–Кутты. Для разрешения этой проблемы необходим специальный алгоритм редуцирования шага интегрирования.

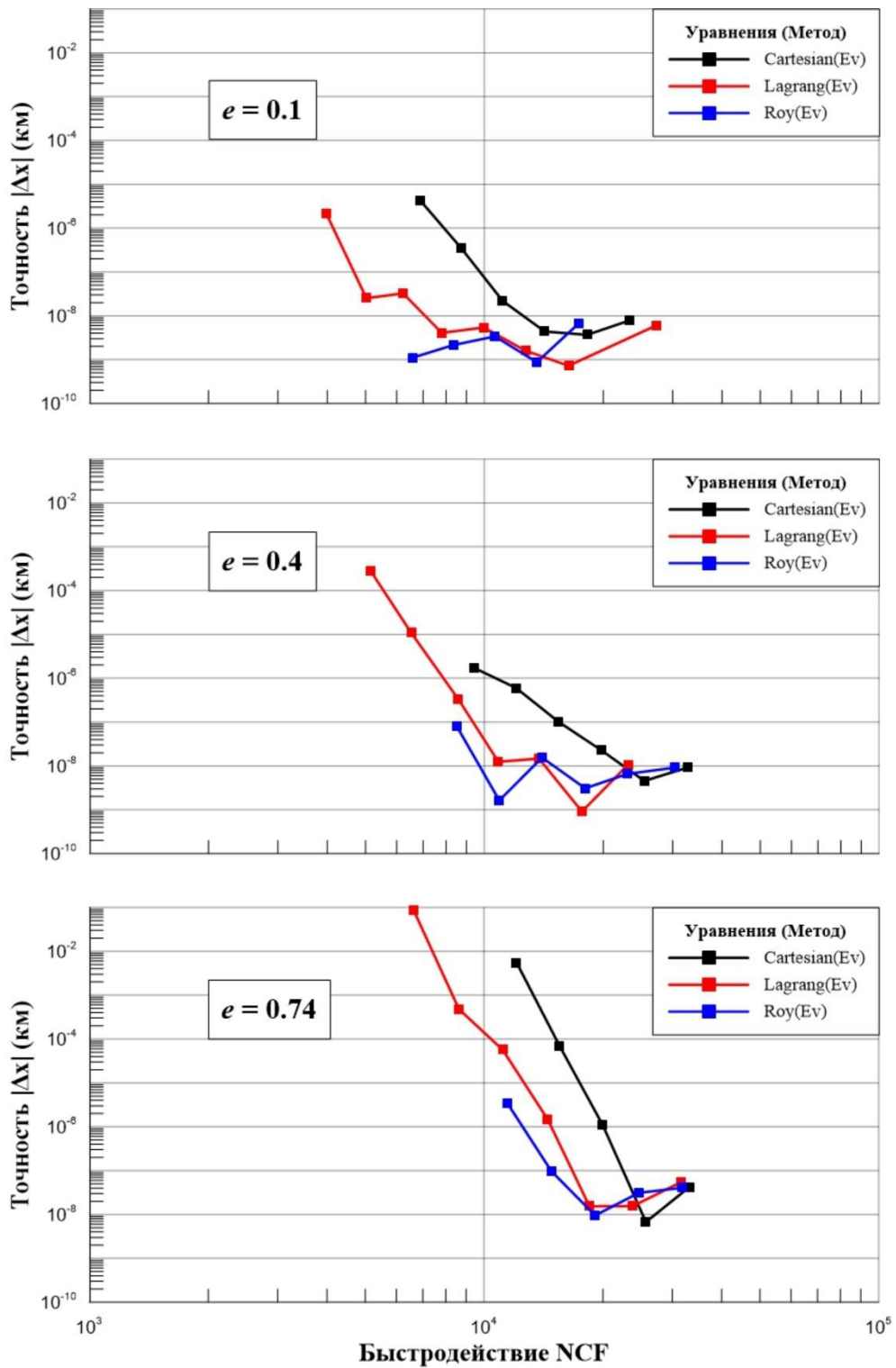


Рисунок 12 — Характеристика точность – быстродействие для различных дифференциальных уравнений, интегрируемых методом Эверхарта, для спутника с разным эксцентриситетом

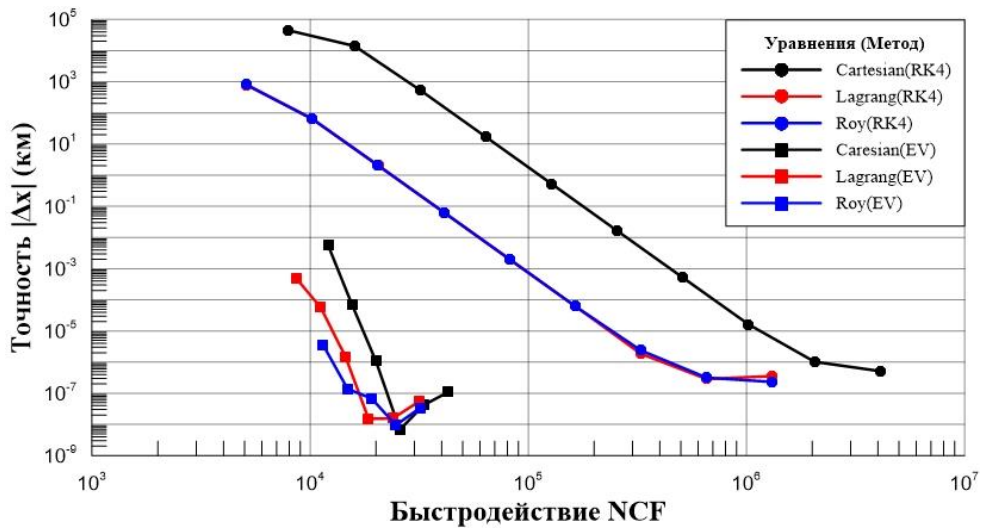


Рисунок 13 — То же, что и на рисунке 9, но для спутника Молния

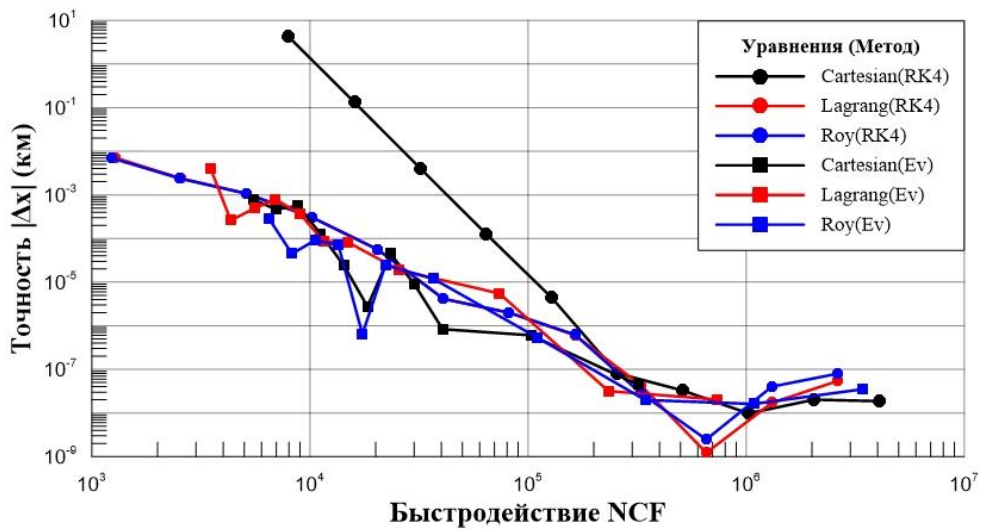


Рисунок 14 — Характеристика точность-быстродействие для различных дифференциальных уравнений движения и численных методов интегрирования для КА ГЛОНАСС в тени

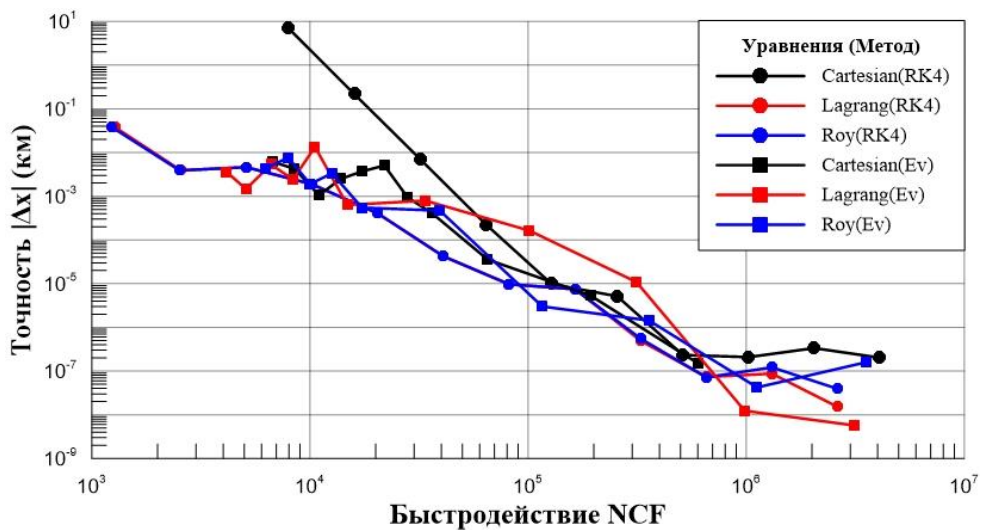


Рисунок 15 — То же, что и на рисунке 14, но для геостационарного спутника

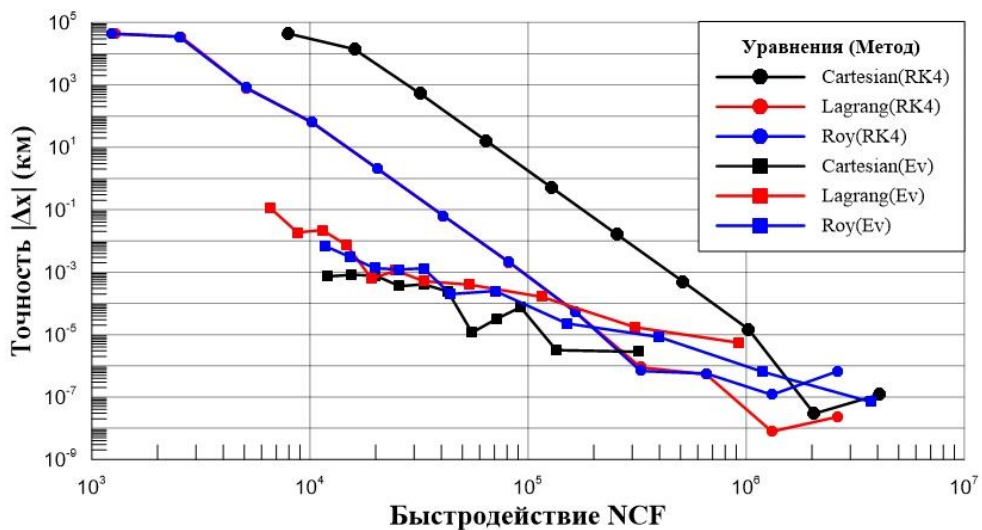


Рисунок 16 — То же, что и на рисунке 14, но для КА Молния

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в результате выполненной дипломной работы мы получили следующие результаты.

1. Разработан программный комплекс для численного моделирования орбитального движения ИСЗ на основе дифференциальных уравнений в прямоугольных координат, а также в регулярных элементах Лагранжа и Роя с возможностью их интегрирования методом Рунге–Кутты либо Эверхарта.
2. Проведены численные эксперименты по исследованию эффективности разработанных орбитальных моделей.
3. Показано, что уравнения в регулярных элементах для круговых и почти круговых орбит позволяют повысить быстродействие до 20 раз, а точность до 7.5 раз.
4. В случае высокоэллиптических орбит эффективность ухудшается как для уравнений в прямоугольных координатах, так и для уравнений в элементах. Однако необходимая миллиметровая точность все же достигается.
5. Проведена оценка потери точности численного интегрирования при моделировании теневых участков орбиты. В частности, показано, что точность интегрирования уравнений в элементах ухудшается настолько, что она становится сопоставимой с численной моделью на уравнений в прямоугольных координатах, интегрируемых методом Рунге–Кутты.
6. Полученные в работе результаты показывают, что уравнения в элементах Лагранжа и Роя одинаково хороши при численном моделировании орбитального движения ИСЗ. Однако, учитывая простоту уравнений Роя, мы находим их более привлекательными для формализации орбитального движения и видим в них достойную альтернативу уравнениям в элементах Лагранжа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1. Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/ LE405 // Interof. Memor. 1998. IOM 312. F-98-048. 18 p.
2. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит небесных тел. / В.А. Авдюшев – Томск : Издательский Дом ТГУ, 2015. – 336 с.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. / Г.Н. Дубошин – М. : Издательство «Наука», 1968 – 800 с.
4. Battin R. An introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition. / R. Battin – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 828 p.
5. Рой А.Е. Движение по орбитам. / Рой А.Е. – М. : Мир, 1981 – 544 с.
6. Everhart E. Implicit single-sequence methods for integrating orbits // Celestial mechanics. – 1974. – Т. 10, №. 1. – P. 35-55.
7. ГЛОНАСС. / Российские космические системы. – М., 2021 – URL: <http://russianspacesystems.ru/bussines/navigation/glonass/> (дата обращения: 02.06.2021).
8. Кукк. К. Расположение спутников на орбитах. / Connect-wit – М., 2021 – URL: <https://www.connect-wit.ru/raspolozhenie-sputnikov-na-orbitah.html> (дата обращения: 02.06.2021).
9. NORAD Two-Line Elements Sets Current Data / CelesTrak – 2021 – URL: <https://celestrak.com/NORAD/elements/> (дата обращения: 10.04.2021).

Отчет о проверке на заимствования №1



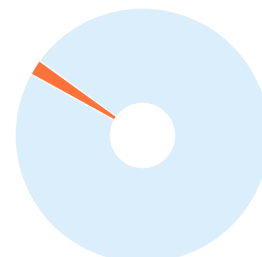
Автор: Гонтарев Роман Алексеевич
Проверяющий: (gontarev.r@mail.ru / ID: 9273315)
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - users.antiplagiat.ru

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 2
Начало загрузки: 15.06.2021 14:45:02
Длительность загрузки: 00:00:02
Имя исходного файла: Дипломная работа.pdf
Название документа: Дипломная работа
Размер текста: 36 кБ
Тип документа: Дипломная работа
Символов в тексте: 37909
Слов в тексте: 4727
Число предложений: 236

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 15.06.2021 14:45:04
Длительность проверки: 00:00:15
Корректировка от 16.06.2021 09:33:52
Комментарии: не указано
Модуль поиска: Интернет



ЗАИМСТВОВАНИЯ

1,6%

САМОЦИТИРОВАНИЯ

0%

ЦИТИРОВАНИЯ

0%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ

98,4%

Заимствования — доля всех найденных текстовых пересечений, за исключением тех, которые система отнесла к цитированиям, по отношению к общему объему документа. Самоцитирования — доля фрагментов текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа, по отношению к общему объему документа.

Цитирования — доля текстовых пересечений, которые не являются авторскими, но система посчитала их использование корректным, по отношению к общему объему документа. Сюда относятся оформленные по ГОСТу цитаты; общепотребительные выражения; фрагменты текста, найденные в источниках из коллекций нормативно-правовой документации.

Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальность — доля фрагментов текста проверяемого документа, не обнаруженных ни в одном источнике, по которым шла проверка, по отношению к общему объему документа.

Заимствования, самоцитирования, цитирования и оригинальность являются отдельными показателями и в сумме дают 100%, что соответствует всему тексту проверяемого документа.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые пересечения проверяемого документа с проиндексированными в системе текстовыми источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности заимствований или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в отчете	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	1,25%	Численное моделирование задач орбитальной динамики ИСЗ с использованием параллельных вычислений http://gaoran.ru	02 Окт 2018	Интернет	
[02]	0,35%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000667023/SOURCE1 http://vital.lib.tsu.ru	29 Окт 2020	Интернет	
[03]	0%	http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/services/Download/vtls:000515876/SOURCE1 http://vital.lib.tsu.ru	07 Сен 2020	Интернет	Источник исключен. Причина: Маленький процент пересечения.

Научный руководитель
д-р физ.-мат. наук

/Авдюшев В.А./