ИНТЕГРАТОР ГАУССА – ЭВЕРХАРТА. НОВЫЙ ФОРТРАН-КОД

В.А. Авдюшев
Томский государственный университет
634050, г. Томск, пр. Ленина 36,
тел. (3822) 529776, e-mail: sch@niipmm.tsu.ru

Интегратор Эверхарта RA15. В 1973 г. Э. Эверхарт [1] предложил интегратор, разработанный автором специально для численного исследования орбит, и продемонстрировал его высокую эффективность в задачах кометной динамики. По-видимому, обнаружив в дальнейшем принадлежность своего интегратора к семейству интеграторов типа Батчера, Эверхарт акцентировал внимание на оригинально реализованный им алгоритм интегрирования и обобщил его для численного решения любых обыкновенных дифференциальных уравнений первого и второго порядков [2,3]. Тем самым ему удалось расширить область применения своего интегратора, который тем не менее остается одним из самых популярных именно в решении задач небесной механики.

Интегратор Эверхарта (RA15) основан на видоизмененных формулах неявных методов Рунге – Кутты батчеровского типа, поэтому он наследует все их замечательные свойства [4]. Более того, именно благодаря оригинальному представлению вычислительной схемы интегратор Эверхарта обрел ряд преимуществ с точки зрения численного интегрирования: 1) алгоритм интегрирования универсален для любого порядка; 2) интегратор имеет простой критерий для выбора шага интегрирования; а также 3) в нем реализован достаточно точный предиктор решения, что позволяет выполнять численное интегрирование всего с 2 итерациями на шаге.

Несмотря на это, программный код Эверхарта RA15 [3] (впрочем, как и любая его модификация типа RADAU_27), на наш взгляд, довольно существенно ограничивает возможности интегратора и поэтому нуждается в дополнительной редакции.

Среди главных недостатков в программной реализации интегратора можно перечислить следующие: 1) трудночитаемый и громоздкий код; 2) много констант, связанных с порядком интегратора, что затрудняет обобщение кода на другие порядки; 3) интегратор реализован только для определенных порядков, причем для нечетных с разбиением Гаусса – Радо, хотя известно, что неявные методы Рунге – Кутты, построенные на симметричном разбиении Гаусса – Лобатто, обладают замечательным свойством симплектичности [5]; 4) алгоритм выбора шага для уравнений первого порядка используется такой же, как и для уравнений второго порядка, поэтому шаг при интегрировании уравнений первого порядка выбирается неверно; 5) стартовый шаг интегрирования в режиме переменного шага выбирается независимо от дифференциальных уравнений, поэтому не всегда оптимально; 6) ограничения на величину выбираемого переменного шага, по-видимому, заданы в интеграторе просто из эмпирических соображений и они, кроме того, не зависят от порядка интегратора.

Интегратор Гаусса – Эверхарта GAUSS_15. В данной работе мы представляем новый код интегратора Эверхарта GAUSS_15, который разрешает названные выше трудности: 1) используя возможности Фортран 90, нам удалось сократить программный код почти в 2 раза; 2) устранены все константы, связанные с порядком метода (оставлены лишь константы узловых значений на шаге); 3) код позволяет получать решение 2–15-го порядка точности (хотя при необходимости код без изменений можно обобщить на любой другой порядок: для этого нужно лишь получить соответствующие узловые значения); 4) исправлен алгоритм выбора переменного шага; 5) стартовый шаг выбирается по оценке интегрирующей схемы второго порядка с учетом поведения правых частей уравнений; 6) накладываются ограничения на выбираемый шаг в соответствии с порядком интегратора.

Кроме того, мы наделили интегратор новыми возможностями: 1) интегрирование на шаге до полной сходимости итерационного процесса; 2) запоминание величины предпоследнего шага после выполнения процедуры интегрирования, что весьма полезно при многократном использовании программного кода в режиме переменного шага; и 3) быстрый выбор стартового шага, требуемый лишь для первого обращения к интегратору (при повторном обращении используется запоминаемый шаг предыдущего обращения).

По причине того, что интегратор использует гауссовы разбиения, мы называем его интегратором Гаусса – Эверхарта (хотя обычно такие интеграторы называют гауссовыми).

Тестирование. Интегратор тестировался на дифференциальных уравнениях задачи двух тел. В частности, получены следующие результаты.

Для оценки оптимизации составленного фортран-кода мы сравнили быстродействие (в затратах процессорного времени) интегратора GAUSS_15 и широко используемого среди небесных механиков интегратора RADAU_27.

Результаты численного интегрирования показали, что GAUSS_15 работает быстрее (например, для 7-го порядка в 1.3 раза), однако этот выигрыш по быстродействию с увеличением порядка уменьшается. Впрочем, следует заметить, что в задачах, где правые части дифференциальных уравнений довольно сложны, оперативность интеграторов должна быть одинаковой, поскольку большая часть времени будет затрачиваться на процедуру вычисления правых частей, и тогда быстродействие будет, главным образом, определяться числом обращения к этой процедуре.

На рис. 1. показано поведение ошибки в векторе положения с изменением времени t для четных и нечетных порядков (6–11). Приведенные результаты были получены до полной сходимости итерационного процесса на шаге. Как видно из рисунка, при постоянном шаге ($h = 2\pi/16$ при орбитальном периоде $T = 2\pi$) ошибка интегрирования для четных порядков ведет себя линейно, тогда как для нечетных порядков — квадратично. Даже несмотря на то, что интегратор нечетного порядка в начале интегрирования дает решение точнее, нежели интегратор более низкого четного порядка, в конце интегрирования вследствие разного роста ошибок первый уже уступает второму по точности почти на 2 порядка.

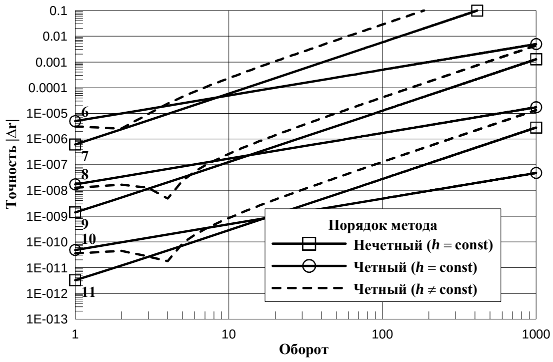

Рис. 1. Поведение ошибки для решений четных и нечетных порядков ($e = 0.1$)

Очевидно, с увеличением интервала интегрирования это преимущество для каждого интегратора с симметричным разбиением (четного порядка) будет только возрастать.

К сожалению, такие замечательные свойства интеграторов четных порядков имеют место только при использовании постоянного шага. При автоматическом выборе шага ошибка, как и для интеграторов нечетных порядков, ведет себя квадратичным образом.

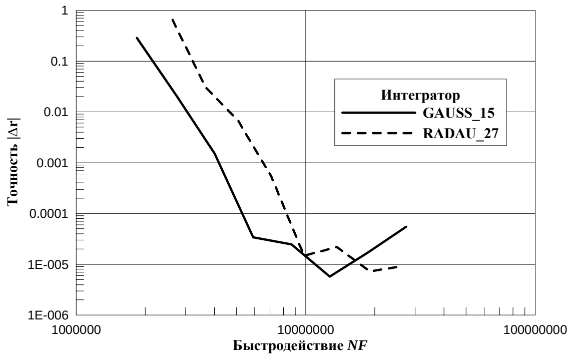

Рис. 2. Характеристики точность – быстродействие для интеграторов GAUSS_15 и RADAU_27 в экстраэксцентричном случае (NF — число обращений к процедуре правых частей дифференциальных уравнений)

Наконец, мы исследовали алгоритм выбора шага при долгосрочном интегрировании очень вытянутой орбиты с эксцентриситетом $e = 0.999$. Интегрирование выполнялось на интервале 1000 оборотов двумя интеграторами: GAUSS_15 и RADAU_27. Результаты показали (рис. 2), что RADAU_27 заметно менее эффективен, нежели GAUSS_15. Так, при одинаковом быстродействии первый дает решение с худшей точностью, ниже на порядок и более. Это связано с тем, что в RADAU_27 заложен неверный алгоритм выбора шага для интегрирования систем с уравнениями первого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Everhart E. A New Method for Integrating Orbits // Bulletin of the American Astronomical Society. 1973. Vol. 5. P. 389.
2. Everhart E. Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits // Cel. Mech. 1974. Vol. 10. P. 35–55.
3. Everhart E. An Efficient Integrator That Uses Gauss–Radau Spacings // Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11–15, 1984. Edited by A. Carusi and G.B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. 1985. Vol. 115. P. 185–202.
4. Butcher J.C. Implicit Runge–Kutta Processes // Math. Comput. 1964. Vol. 18. P. 50–64.
5. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations // Springer Series in Computational Mathematics. Springer. 2002. Vol. 31.