ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО ПАРАМЕТРА В МЕТОДЕ БАУМГАРТА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУГОВЫХ ОРБИТ

В.А. АВДЮШЕВ
Отдел небесной механики и астрометрии, НИИ прикладной математики и механики при Томском университете, Томск, Россия, 634050, e-mail: sch@niipmm.tsu.ru

Аннотация. В работе на примере численного интегрирования почти круговых орбит исследуется вопрос об оптимальном выборе стабилизирующего параметра в методе численной стабилизации Баумгарта. Экспериментально показано, что в случае применения численных методов высокого порядка наивысшая эффективность стабилизации достигается при использовании в качестве стабилизирующего параметра среднего движения.

Keywords: метод Баумгарта, стабилизирующий параметр, численное интегрирование, круговое орбитальное движение

1. Введение

Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому устойчивые уравнения для численного интегрирования более предпочтительны.

Простой, но мощный метод численной стабилизации дифференциальных уравнений был предложен Дж. Баумгартом (1972;1973). Впоследствии стабилизация Баумгарта стала весьма популярной в решении задач классической механики.

Однако, как ни странно, небесные механики не приняли метод Баумгарта, несмотря на то, что его исключительные возможности открываются именно в задачах небесной механики, и прежде всего в задачах исследования долговременной эволюции орбитального движения. В результате ниша эволюционных задач была занята симплектическими интеграторами, которые, по сути, обладают достоинствами стабилизирующих методов, но при этом значительно сложнее для практической реализации.

Как нам представляется, одной из причин отстранения небесных механиков от метода Баумгарта является его, так скажем, априорная неопределенность по отношению к практическим задачам. Дело в том, что в методе имеется так называемый стабилизирующий параметр, который специфичен для конкретной задачи и до численного эксперимента неизвестен. При этом метод Баумгарта очень чувствителен к его значениям. Так, с одним и тем же параметром метод в одних задачах может быть эффективен, а в других нет. На практике оптимальное значение стабилизирующего параметра приходиться выбирать опытным путем по достижению наилучших численных результатов. Это создает очевидные неудобства, поскольку предполагает выполнение множества экспериментов.

В данной работе мы предпринимаем попытку определить оптимальные значения стабилизирующего параметра в случае круговых орбит, предполагая при этом, что наши результаты могут быть полезны на практике для моделирования планетарных, спутниковых и астероидных орбит, имеющих малые эксцентриситеты. Кроме того, как будет показано ниже, выбор круговых орбит очень удобен для исследования стабилизации, поскольку предоставляет материал, легко поддающийся анализу.

2. Ошибки как возмущения

Как известно, уравнения кеплеровского движения

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \tag{1}$$

имеют интеграл

$$H \equiv \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{|\mathbf{x}|} = \mathrm{const}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}$ и $\dot{\mathbf{x}}$ — векторы положения и скорости соответственно, t — время, а μ — гравитационная постоянная.

Следует отметить, что энергия в отличие от других интегралов играет важную роль в стабилизации кеплеровского движения[1] и ее сохранение более чем желательно.

Если уравнения (1) интегрируются численно, интеграл (2) не сохраняется, а H как функция интегрируемых переменных меняется почти линейно с течением времени шаг за шагом, т.е. для

[1] см., например, (Авдюшев, 2003)

отклонения интегральной функции ΔH

$$\frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}t} = D, \tag{3}$$

где коэффициент D зависит от шага и порядка численного метода и в первом приближении его можно рассматривать как постоянную величину. В связи с этим отклонение ΔH, обусловленное ошибками интегрирования, можно интерпретировать как следствие влияния диссипативных возмущающих сил нефизической природы.

Для компенсации этих сил, следуя стабилизации Баумгарта, в уравнения движения вводятся возмущающие члены также нефизической природы и стабилизированные уравнения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \gamma\Delta H\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \tag{4}$$

где $\gamma = \mathrm{const}$ — так называемый стабилизирующий параметр. В соответствии с (4) поведение ΔH будет определяться уравнением

$$\frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}t} = D - \gamma\Delta H. \tag{5}$$

Полагая, что $D = \mathrm{const}$, и учитывая, что $\Delta H = 0$ в некоторый начальный момент времени $t_0 = 0$, получим решение (5)

$$\Delta H = D\frac{1 - e^{-\gamma t}}{\gamma}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что

$$\Delta H_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} \Delta H = \frac{D}{\gamma}. \tag{7}$$

Отсюда казалось бы, если $\gamma \to \infty$, то $\Delta H_\infty \to 0$. На самом деле, при достаточно больших значениях γ влияние стабилизирующих сил становиться довольно весомым и тогда D будет, главным образом, зависеть от γ (Рис. 1, 2). Причем эксперименты показывают, что

$$\lim_{\gamma\to\infty} \Delta H_\infty = \infty. \tag{8}$$

При достаточно малых значениях γ

$$\Delta H_\infty \sim \frac{1}{\gamma}.$$

Следовательно, функция $|\Delta H_\infty|$ должна иметь хотя бы один минимум[2] на интервале $\gamma \in (0, \infty)$ (Рис. 2).

[2] Следует заметить, что нули функции ΔH_∞ также будут являться минимумами $|\Delta H_\infty|$

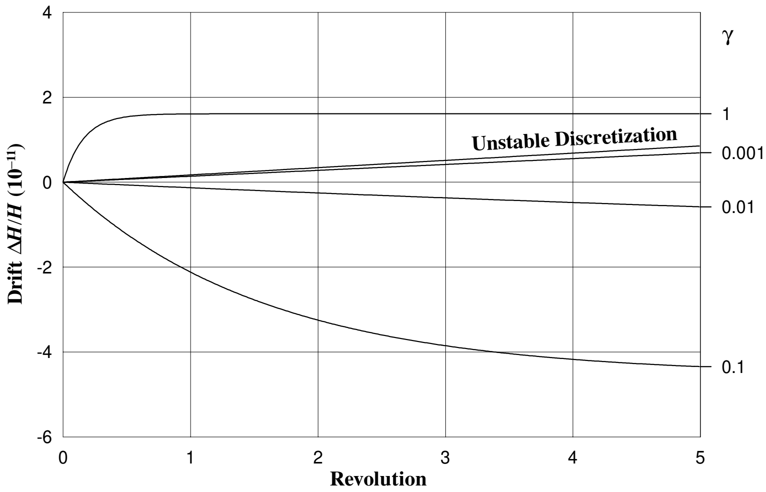

Рис. 1. Дрейф орбиты при численном интегрировании для разных значений стабилизирующего параметра. Численный метод Рунге-Кутты 4 порядка (классический). Начальная (круговая) орбита с единичными радиусом и частотой. Как видно, дрейф ведет себя экспоненциальным образом в соответствии с (6), где $D = D(\gamma)$.

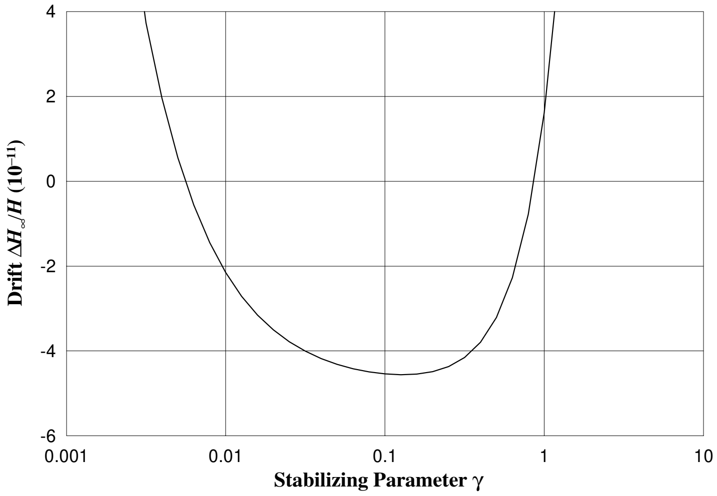

Рис. 2. Зависимость дрейфа орбиты на бесконечном времени от стабилизирующего параметра. Условия интегрирования как и для рис. 1. Здесь величина дрейфа достигает минимума в своих нулях.

Очевидно, с практической точки зрения из всех минимумов особый интерес представляет тот, который соответствует наименьшему стабилизирующему параметру, поскольку именно при нем уравнения будут наименее жесткими. Этот стабилизирующий параметр будем называть оптимальным.

В данной работе мы определяем значения оптимальных параметров γ в случае круговых орбит для численных методов (типа Рунге-Кутты) различных порядков.

3. Преобразование уравнений

Запишем стабилизированные уравнения (4) в виде системы уравнений первого порядка

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{x}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} - \gamma\Delta H\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \tag{9}$$

где $\Delta H = H - H^{\sim}$, $H^{\sim} = -a^2n^2/2$, a — большая полуось орбиты, а $n = \sqrt{\mu/a^3}$ — среднее движение.

Введем переменные

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad \mathbf{p} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{an} \quad \text{и} \quad s = nt. \tag{10}$$

Тогда уравнения (9) перепишутся как

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{p}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q} - \nu\Delta C\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}^2}, \tag{11}$$

где $\nu = \gamma/n$ и

$$\Delta C = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{1}{|\mathbf{q}|} + \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Сравнивая формы уравнений (9) и (11) в случае кругового движения, легко увидеть, что система (11) будет описывать стабилизированную орбиту с единичными радиусом и средним движением.

Предположим, что системы (9) и (11) интегрируются одним численным методом. Причем шаг интегрирования Δt для (9) связан с шагом Δs для (11) так, что $\Delta s = n\Delta t$. Тогда, используя (10), нетрудно показать, что методические ошибки будут связаны соотношениями

$$\Delta\mathbf{q} = \frac{\Delta\mathbf{x}}{a}, \quad \Delta\mathbf{p} = \frac{\Delta\dot{\mathbf{x}}}{an}.$$

Следовательно, с точностью до малых первого порядка согласно (2) и (12) для интегральных отклонений будет справедлива оценка

$$\frac{\Delta H}{a^2n^2} = \mathbf{p}\Delta\mathbf{p} + \frac{1}{|\mathbf{q}|^3}\mathbf{q}\Delta\mathbf{q} = \Delta C. \tag{13}$$

Соотношение (13) говорит о том, что при изменении параметров γ и ν, связанных как $\nu = \gamma/n$, $\Delta H \propto \Delta C$.

Таким образом, в исследовании вопроса о влиянии стабилизирующего параметра γ на поведение интегрального отклонения в случае круговых орбит с произвольным радиусом и средним движением достаточно сосредоточить внимание на уравнениях (11) с параметром ν. В соответстствии с вышеизложенными выкладками, оптимальное значение параметра $\overline{\nu}$, скажем, найденное экспериментально, при шаге интегрирования Δs будет соответствовать оптимальному значению параметра $\overline{\gamma} = n\overline{\nu}$ уравнений кругового движения (9) при шаге интегрирования $\Delta t = \Delta s/n$.

4. Численные результаты

Поиск оптимальных стабилизирующих параметров выполнялся для семи численных методов: Рунге-Кутты 2, 3 и 4 порядков, Дормана-Принца 5 и 8 порядков (Хайрер и др., 1987) и Эверхарта 11 и 15 порядков (1974). Методами интегрировались уравнения (11) с различным постоянным шагом $h = 2\pi/N$, выбираемым в пределах от сходимости метода и до величины, при которой влияние ошибок округления на точность интегрирования становилось заметным. Для каждого шага варьировался стабилизирующий параметр ν и вычислялась характеристика $\Delta C_\infty(\nu, h)/D_{\nu=0}(h)$. Эта характеристика очень удобна для графического представления результатов, поскольку независимо от шага интегрирования и порядка метода ее поведение согласно (7) при довольно умеренных ν близко к функции ν^{-1} и поэтому все характеристики численного метода как функции ν могут быть представлены на одних и тех же осях одного графика. Характеристики методов приведены на рис. 3–12. Здесь верхняя граница заштрихованной части есть график функции ν^{-1}.

Рассмотрим сначала результаты для методов Рунге-Кутты. Как видно (Рис. 3–5), характеристики здесь значительно отличаются не только от поведения ν^{-1}, но также друг от друга. Отсюда различны минимумы их величин, которые достигаются в нулях. Это представляет практическое неудобство, поскольку нельзя дать каких-то общих справедливых для методов данного типа рекомендаций по поводу выбора оптимального стабилизирующего параметра.

Иная картина для методов более высокого порядка (Рис. 6–9). При $\nu < 1$ все характеристики достаточно хорошо согласуются с функцией ν^{-1}, а при $\nu > 1$ они стремительно, но систематически либо возрастают, либо убывают. Таким образом, минимумы вели-

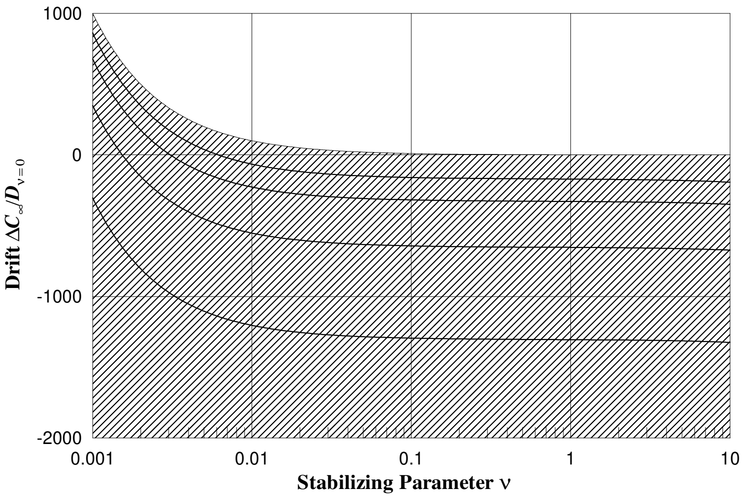

Рис. 3. Метод Рунге-Кутты 2 порядка ($N = 256, 512, 1024, 2048$)

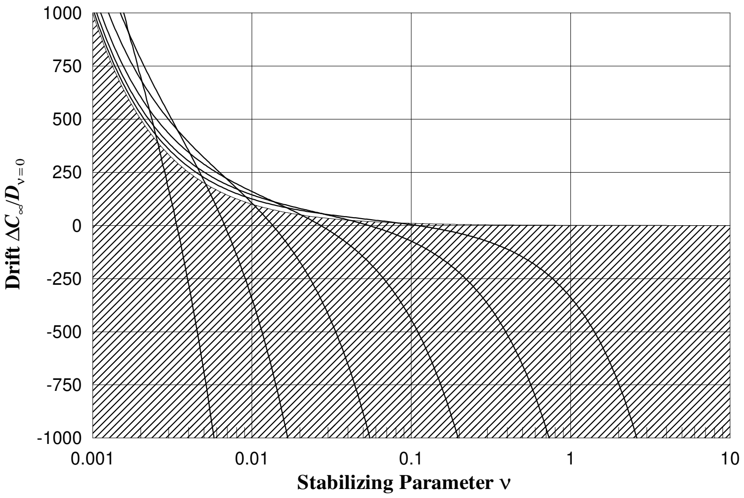

Рис. 4. Метод Рунге-Кутты 3 порядка ($N = 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$)

чин характеристик оказываются в окрестности $\nu = 1$. Поскольку минимум характеристики не существенно отличается от ее величины при $\nu = 1$, то для рассматриваемых методов независимо от шага интегрирования $\nu = 1$ можно рекомендовать для использования в методе Баумгарта в качестве оптимального значения стабилизирующего параметра. Следовательно, в случае уравнений (9) оптимальным параметром будет $\gamma = n$.

Напомним, что вышепредставленные результаты получены для круговых орбит. Однако в практических задачах приходиться иметь

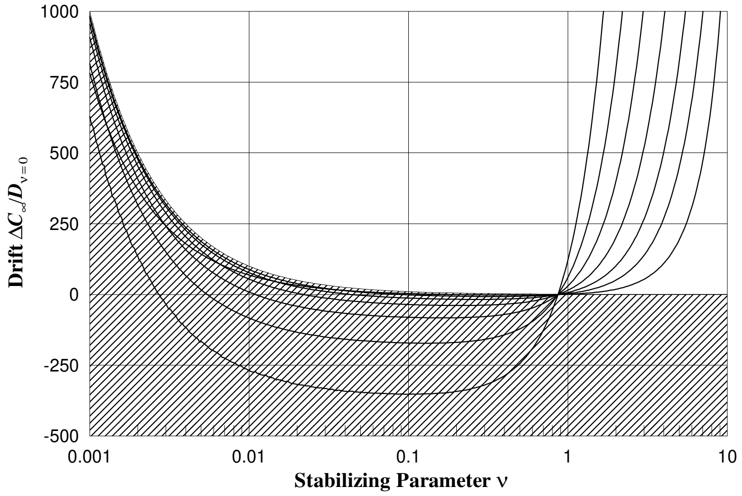

Рис. 5. Метод Рунге-Кутты 4 порядка ($N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048$)

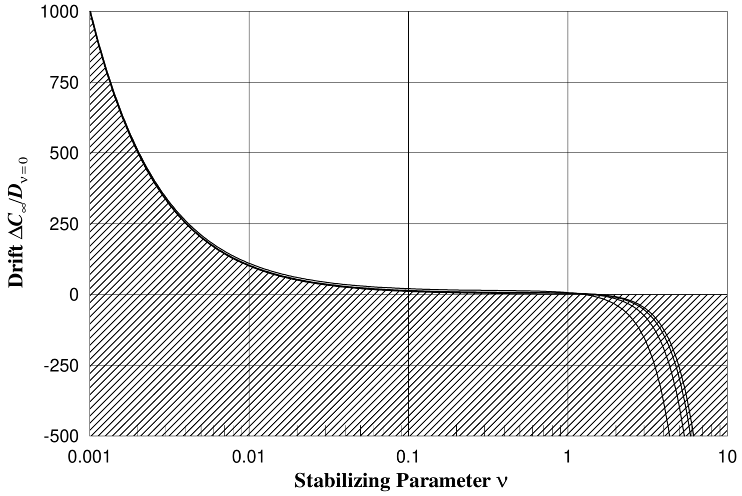

Рис. 6. Метод Дормана-Принца 5 порядка ($N = 64, 128, 256, 512$)

дело с орбитами довольно сложной структуры. Следует также заметить, что на практике нас все же интересует не столько сохранение каких-либо интегралов движения, сколько сохранение при этом точности интегрирования координат и, между прочим, первое не всегда является залогом второго, даже если это первое — интеграл энергии. Тем не менее, мы полагаем, что в случае слабовозмущенных почти круговых орбит данные нами рекомендации будут оставаться в силе. Покажем это на примере Амальтеи, V спутника Юпитера ($e = 0.003$, $n = 12.6$ сут.$^{-1}$).

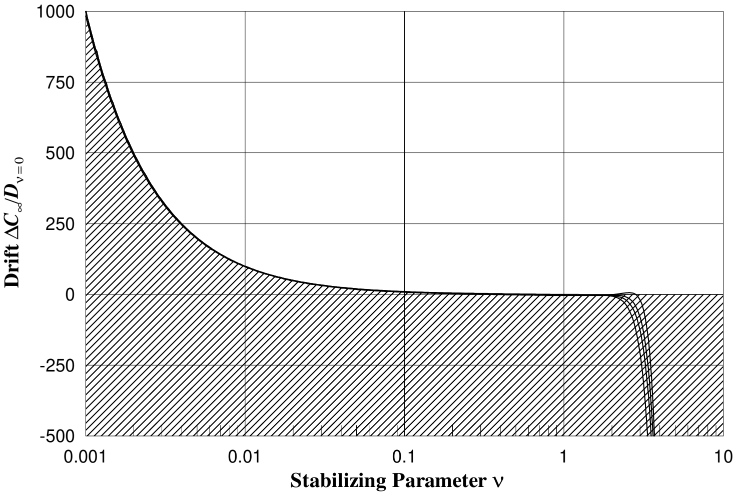

Рис. 7. Метод Дормана-Принца 8 порядка ($N = 8, 16, 32, 64$)

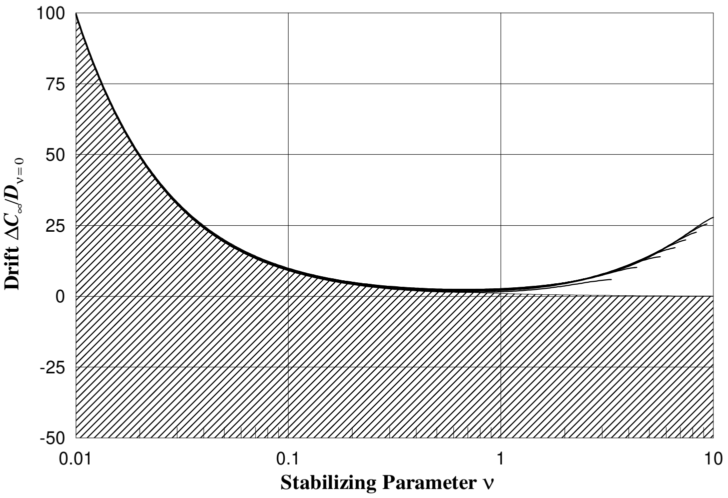

Рис. 8. Метод Эверхарта 11 порядка ($N = 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40$)

На рис. 10–12 приведены результаты (точность и быстродействие) численного интегрирования стабилизированных уравнений орбиты Амальтеи при различных значениях стабилизирующего параметра. Здесь точность оценивалась методом прямого и обратного интегрирования на интервале времени 100 лет, а быстродействие — по количеству шагов интегрирования.

Для интегрирования использовался метод Эверхарта 15 порядка с постоянным шагом $h = 3.5 \cdot 10^{-2}$ сут. (Рис. 10) и выбираемым автоматически по параметру $L = 10$ (Эверхарт, 1974) (Рис. 11,

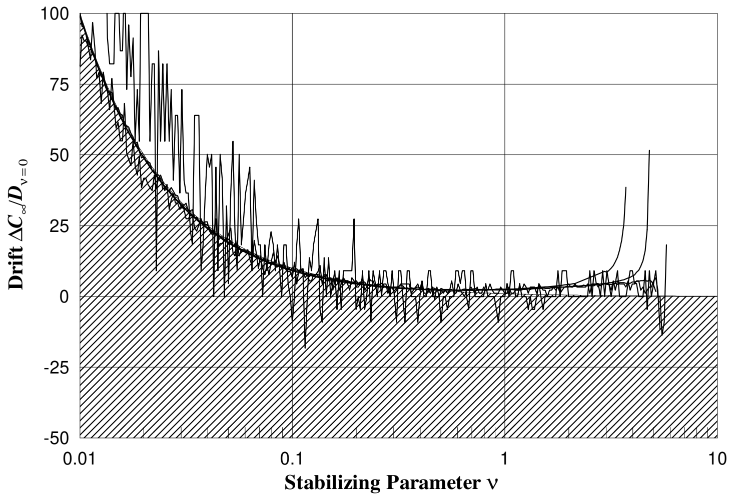

Рис. 9. Метод Эверхарта 15 порядка ($N = 16, 20, 24, 28, 32$). Случайная составляющая в характеристике при $N = 32$ вызвана значительным влиянием ошибок округления, какие обычно возникают при интегрировании с очень малым шагом.

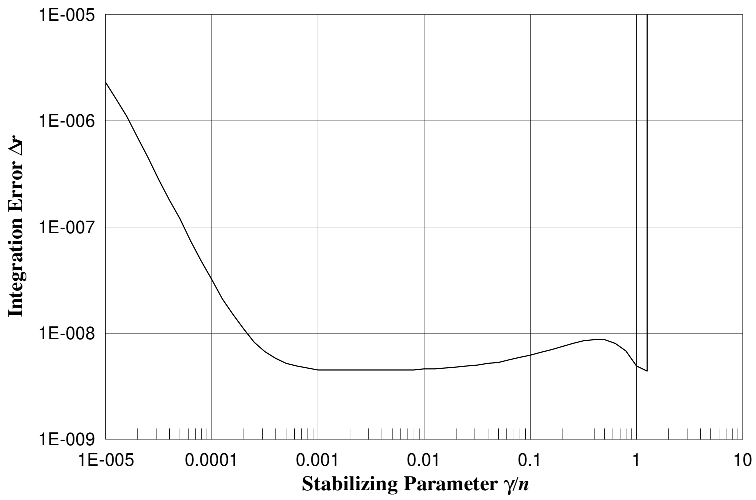

Рис. 10. Точность интегрирования (постоянный шаг)

12). В уравнениях учитывались основные возмущающие силы: влияние несферичности Юпитера (до второй гармоники), галилеевых спутников и Солнца.

Характеристики на рис. 10, 12 показывают, что точность интегрирования достигает своего наивысшего значения уже при $\gamma = 0.001n$. Далее ее порядок сохраняется вплоть до $\gamma = n$. Поэтому

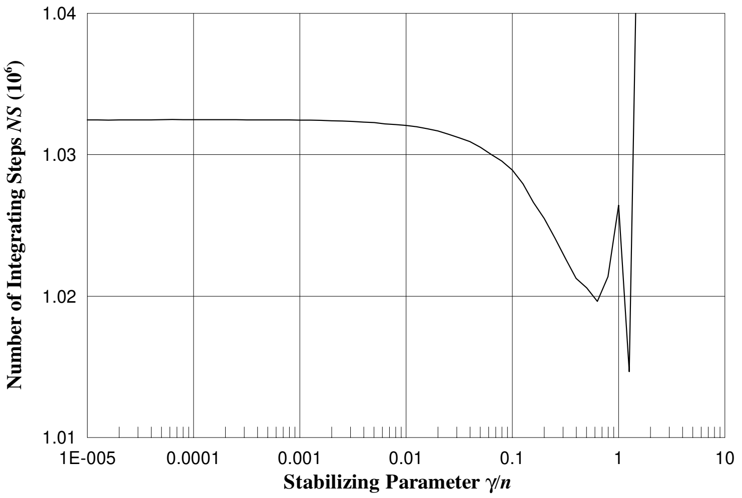

Рис. 11. Быстродействие (переменный шаг)

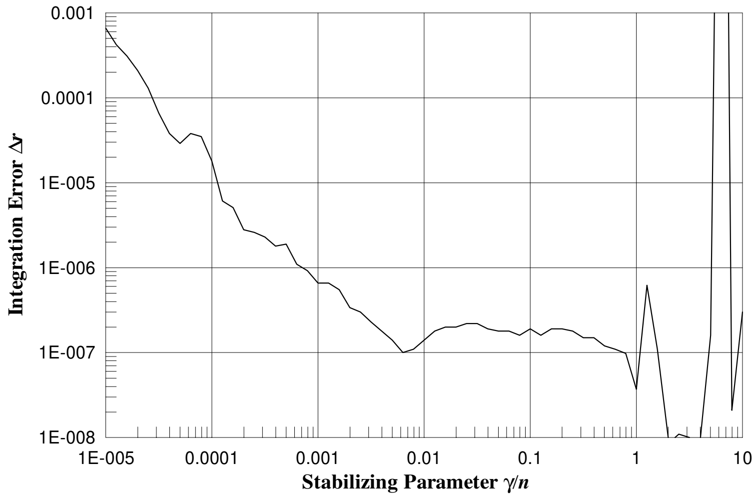

Рис. 12. Точность интегрирования (переменный шаг)

любое из значений γ между указанными может расцениваться как оптимальное.

На этом можно было бы заключить, что среднее движение здесь теряет свой особый статус, если не принимать во внимание результаты, приведенные на рис. 11. Как показывает рисунок, быстродействие численного интегрирования, выполненного с переменным шагом, заметно повышается при $\gamma \to n$. Таким образом, стабилизация способна довольно благоприятно влиять на процесс численного интегрирования, максимально проявляя свои возможности в том случае, когда стабилизирующий параметр близок к среднему движению.

5. Заключение

В данной работе мы не преследовали цель выявить, каким образом стабилизация Баумгарта при всевозможных значениях ее параметра влияет на численное интегрирование. Это на самом деле довольно сложная задача. Нас лишь интересовало, как этот механизм проявляется в частных случаях. Но даже несмотря на то, что нами было рассмотрено только несколько таких случаев, их оказывается вполне достаточно, чтобы уверить нас в том, насколько необычна роль среднего движения в методе Баумгарта применительно к круговым задачам. Почему это так? и что будет являться аналогом среднего движения в других задачах? — вопрос будущего.

Литература

Авдюшев, В. (Avdyushev, V.): 2003, "Numerical Stabilization of Orbital Motion", *Cel. Mech.* **87** (4), 383–409.

Баумгарт, Дж. (Baumgarte, J.): 1972, "Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems", *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* **1**, 1–16.

Баумгарт, Дж. (Baumgarte, J.): 1973, "Numerical Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion", *Cel. Mech.* **5** (4), 490–501.

Хайрер, Э., Нерсетт, С., Ваннер, Г. (Hairer, E., Nersett, S. P., Wanner, G.): 1987, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo.

Эверхарт, Э. (Everhart, E.): 1974, "Implicit Single Sequence Methods for Integrating Orbits", *Cel. Mech.* **10**, 35–55.