# НОВАЯ ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОРБИТА В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ БЛИЗКОГО СПУТНИКА СЖАТОЙ ПЛАНЕТЫ

**Авдюшев В.А.**

НИИ прикладной математики и механики при Томском университете
634050 г. Томск, пр. Ленина, 36
тел.(3822) 410576, факс (3822) 410347
E-mail: niipmm @urania.tomsk.su

Пусть спутник движется в экваториальной плоскости центральной планеты по круговой орбите. Тогда гравитационный потенциал $V$, обусловленный сжатием центральной массы, будет функцией радиус-вектора *r*:

$$V = V(r) = -\frac{\lambda}{2r^3},$$

где $\lambda = \mu J_2 b^2$, $J_2$ — коэффициент второй зональной гармоники, $b$ — экваториальный радиус планеты.

Согласно принятым условиям задачи, дифференциальные уравнения движения в KS-переменных можно переписать в виде [1]

$$\frac{d^2u}{dE^2} + \frac{1}{4}u = -\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}u \qquad (1)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu - \frac{\lambda}{2r^2}\right]$$

В круговом движении

$$r = \frac{\mu}{4\omega^2} \qquad (2)$$

Подставим соотношение (2) в дифференциальные уравнения (1) и введем новое обозначение

$$\Phi = \frac{(2\omega)^4\lambda}{2\mu^3} = \frac{J_2 b^2}{2r^2}. \qquad (3)$$

Тогда, заимствуя идею дополнительной массы Херрика из [2], уравнения движения можно привести к невозмущенной форме с измененной частотой и периодом

$$\frac{d^2u}{dE^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)u = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d\tau}{dE} = \frac{\mu}{8\omega^3}[1-\Phi]$$

Таким образом, как показывают уравнения, сжатие центральной планеты в KS-пространстве (как и в физическом) изменяет частоту движения экваториального спутника и его период. При увеличении сжатия, определяемого величиной $J_2$, частота увеличивается, а период уменьшается.

Решение (4) представимо в форме

$$u = \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi, \quad \varphi = \sqrt{\frac{1+4\Phi}{4}}E,$$

$$\omega = \omega_0, \quad \tau = \frac{\mu}{8\omega^3}[1-\Phi]E + \tau_0.$$

Очевидно, что решение полученных уравнений может достаточно хорошо представлять движение экваториальных спутников с почти круговыми орбитами (в особенности класса близких спутников, когда величина $\Phi$ существенно изменяет частоту движения). Исходя из этого, в алгоритмах типа Энке [3] при исследовании движения данных объектов именно это решение целесообразно использовать в качестве опорного взамен кеплеровскому. На основе нового опорного решения уравнения Энке в отклонениях KS-переменных в общем случае принимают вид

$$\frac{d^2\delta u}{dE^2} + \frac{1}{4}(1+4\Phi)\delta u = -\frac{r}{8\omega^3}L^T(u)\times$$
$$\times\left[V\frac{x}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial x} - P + \frac{2\dot{x}}{r}\frac{d\omega}{dE}\right] + \Phi u$$

$$\frac{d\delta\omega}{dE} = -\frac{r}{8\omega^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{x}, P)\right), \qquad (5)$$

$$\frac{d\delta\tau}{dE} = \frac{1}{8\omega^3}\left[\mu\left(1 - \frac{\omega^3}{\omega_k^3} + \Phi\right) - 2rV +\right.$$
$$\left. + r\left(x, P - \frac{\partial V}{\partial x}\right) - 4\frac{d\omega}{dE}(x, \dot{x})\right],$$

где $\delta u, \delta\omega, \delta\tau$ — отклонения KS-переменных, $L(u)$ — матрица KS-преобразования [1], $x, \dot{x}$ — соответственно векторы положения и скорости спутника в физическом пространстве, $V$ – потенциальная функция возмущающих сил, включающая в себя влияние от сжатия центральной массы, $P$ – силы, не имеющие потенциала.

Появление в уравнениях Энке (5) членов с Ф-множителем влечет за собой вычитание величин типа

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}u + \Phi u, \ \mu\Phi - \frac{\lambda}{2r^2}$$

или

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}u + \frac{\lambda}{8\omega_k^2\bar{r}^3}u, \ \frac{\lambda}{2\bar{r}^2} - \frac{\lambda}{2r^2}, \qquad (6)$$

где

$$\bar{r} = \mu \big/ 4\omega^2,$$

которые при вычислении правых частей дифференциальных уравнений приводят к существенным потерям точности. С помощью несложных алгебраических выкладок разности (6) можно привести к выражениям с членами, пропорциональными известным малым величинам, и избежать таким образом "опасных" вычитаний:

$$-\frac{\lambda}{8\omega^2 r^3}u+\frac{\lambda}{8\omega_k^2 \bar{r}^3}u=\frac{u\Phi}{(1+\Delta\omega)^2}[3\Delta r-3(\Delta r)^2+ +(\Delta r)^3+2\Delta\omega+(\Delta\omega)^2],$$

$$\frac{\lambda}{2\bar{r}^2}-\frac{\lambda}{2r^2}=\mu\Phi[2\Delta r-(\Delta r)^2].$$

Здесь $\Delta r=(r-\bar{r})/r$, а $\Delta\omega=\delta\omega/\omega_k$. Во избежание потери точности при прямом вычитании $r-\bar{r}$, величину $\Delta r$ следует вычислять по следующей формуле:

$$\Delta r=\frac{\delta r+r_k-\bar{r}}{r},$$

где разность $r_k-\bar{r}$ задается с помощью аналитического выражения:

$$r_k-\bar{r}=|\alpha_k|^2-\bar{r}+(2(\alpha_k,\beta_k)\cos\varphi+ +(|\alpha_k|^2-|\beta_k|^2)\sin\varphi)\sin\varphi.$$

Для апробирования полученных уравнений движения были рассмотрены три близких спутника: Фобос (I Mars), Амальтея (V Jupiter) и Мимас (I Saturn) (Табл.1). На интервалах времени эквивалентных 10000 оборотов спутников на основе различных систем дифференциальных уравнений численно моделировалось движение спутников и оценивались точности результатов интегрирования. В качестве меры точности принималась величина максимума отклонений в векторе положения $\Delta r$, полученных по результатам прямого и обратного интегрирования.

Модель сил ограничивалась гравитационным влиянием сжатой центральной планеты и Солнца. Для учета несферичности центральной планеты были выбраны следующие коэффициенты $J_2$: для Марса $-1.9582\cdot10^{-3}$ при массе 1/3098710, для Юпитера $-1.4736\cdot10^{-2}$ при массе 1/1047.35 и для Сатурна $-1.6298\cdot10^{-2}$ при массе 1/3498, когда масса Солнца равна 1.

Таблица 1

Основные параметры орбит спутников

| Объект | $a$, а.е. | $e$ | $i$,° |
|---|---|---|---|
| Фобос | $6.3\cdot10^{-5}$ | 0.015 | 0.9 |
| Амальтея | $1.2\cdot10^{-3}$ | 0.000 | 0.4 |
| Мимас | $1.2\cdot10^{-3}$ | 0.020 | 1.5 |

Ошибки численного интегрирования для каждого спутника, полученные при сравнимо одинаковом быстродействии, приведены в табл.2. Данные таблицы наглядно демонстрируют преимущество обобщенного метода Энке $(\delta u^*, E)$ над классическим $(\delta u, E)$, где в качестве промежуточной орбиты выбирается кеплеровская траектория.

Таблица 2

Оценка точности численных моделей движения спутников в различных переменных

| Алгоритм | Фобос $\Phi\sim10^{-4}$ $\Delta r$, а.е. | Амальтея $\Phi\sim10^{-3}$ $\Delta r$, а.е. | Мимас $\Phi\sim10^{-3}$ $\Delta r$, а.е. |
|---|---|---|---|
| $\delta u, E$ | $6.9\cdot10^{-16}$ | $3.2\cdot10^{-12}$ | $3.6\cdot10^{-12}$ |
| $\delta u^*, E$ | $5.5\cdot10^{-16}$ | $1.9\cdot10^{-14}$ | $3.2\cdot10^{-14}$ |

По определению (3) параметр $\Phi$ как отношение величин двух потенциалов: сжатия и точечной массы, выражает степень действия сжатия планеты на спутник. Результаты эксперимента показывают, что учет эффекта от сжатия в промежуточном решении может существенно уменьшить возмущения и повысить таким образом точность интегрирования, в особенности, когда значение $\Phi$ велико, как например для Амальтеи и Мимаса, и кеплеровское решение не может служить достаточно точной аппроксимацией движения. При малом $\Phi$ (как для Фобоса) эффект от сжатия в промежуточном решении можно не учитывать. В этом случае кеплеровское решение в уравнениях Энке в качестве опорного также приемлемо, как и новое.

Хотелось бы отметить, что в перспективе возможно дальнейшее усовершенствование разработанных алгоритмов. Например, промежуточное решение в методе Энке можно пополнить за счет частичного учета оставшейся зональной части гравитационного поля планеты тем же способом, что и эффект от сжатия.

Более же фундаментальный подход к задаче моделирования динамики близких спутников в KS-пространстве состоит в поиске опорных орбит аналогичных решению общей задачи двух неподвижных центров.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 98-02-16491.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
2. Херрик С. Астродинамика. М.: Мир, 1977, т.3, 360 с.
3. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А. Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998, вып.16. с. 33-57