

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ  
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
Механико-математический факультет  
Кафедра теоретической механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГАК  
зав. каф. теоретической механики,  
проф. Бубенчиков А.М. \_\_\_\_\_  
” \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2003 г.

**Козаногина Елена Васильевна**  
**МЕТОД СТАБИЛИЗАЦИИ БАУМГАРТА В**  
**ВОЗМУЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ**  
**И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ**  
**ДИНАМИКИ АСТЕРОИДОВ**  
(Дипломная работа)

Научный руководитель

к. ф.-м. н.

Авдюшев В.А. \_\_\_\_\_

Автор работы

Козаногина Е.В. \_\_\_\_\_

Томск 2003

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>4</b>
<b>1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ</b>	<b>7</b>
1.1 Уравнения ограниченной задачи трех тел . . . . .	7
1.2 Интеграл Якоби . . . . .	8
1.3 Неустойчивость орбит и трудности численного интегрирования их уравнений . . . . .	9
<b>2 СТАБИЛИЗАЦИЯ БАУМГАРТА</b>	<b>12</b>
2.1 Стабилизированные уравнения движения . . . . .	12
2.1.1 Невозмущенный случай . . . . .	12
2.1.2 Возмущенный случай . . . . .	14
2.2 Достоинства и недостатки метода Баумгарта . . . . .	16
2.3 Задача двух тел . . . . .	17
2.3.1 Невозмущенный случай . . . . .	17
2.3.2 Возмущенный случай . . . . .	18
<b>3 СТАБИЛИЗИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ВОЗМУЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ</b>	<b>20</b>
<b>4 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ</b>	<b>21</b>
4.1 Постановка эксперимента . . . . .	21
4.1.1 Выбор астероидов . . . . .	22
4.1.2 Моделирование возмущающих сил . . . . .	22
4.1.3 Краткое описание фонда координат больших планет DE200/LE200 . . . . .	24
4.1.4 Характер движения астероидов . . . . .	24

	3
4.1.5 Метод Эверхарта . . . . .	26
4.2 Анализ результатов . . . . .	33
4.3 Модельная задача . . . . .	38
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>41</b>
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b>	<b>42</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной астрометрии предъявляет высокие требования к точности и быстродействию численных моделей движения наблюдаемых небесных тел. Это обстоятельство приводит к необходимости усовершенствования методов исследования движения.

Одним из способов для повышения точности и быстродействия численного моделирования движения является привлечение таких дифференциальных уравнений, которые используют уже известную информацию о свойствах исследуемого движения. В качестве такой информации, как правило, служат известные интегралы движения, либо аналитические решения, достаточно хорошо представляющие динамический процесс и имеющие простую формализацию. Представленный подход широко используется в аналитической механике, в теории линеаризации и регуляризации [1, 2, 3, 4, 5], а также в методах типа Энке [6, 7, 8, 9, 10].

В последнее время весьма популярным в классической механике стал метод стабилизации Баумгарта [11, 12]. Основная идея метода состоит в искусственном введении в дифференциальные уравнения движения возмущающих членов, компенсирующих отклонения численного (ошибочного) решения от некоторой опорной интегральной поверхности (точного решения).

Как ни странно, небесные механики не приняли метод Баумгарта, несмотря на то, что его исключительные возможности открываются именно в задачах небесной механики, и прежде всего в задачах исследования долговременной эволюции орбитального движения. В результате ниша эволюционных задач была занята симплектическими интеграторами.

рами [13], которые безусловно обладают достоинствами стабилизирующих методов, но при этом значительно сложнее для практической реализации.

Как нам представляется, одной из причин отстранения небесных механиков от метода Баумгарта является его, так скажем, априорная неопределенность по отношению к практическим задачам. Дело в том, что в методе имеется так называемый стабилизирующий параметр, который специфичен для конкретной задачи и до численного эксперимента неизвестен. При этом метод Баумгарта очень чувствителен к его значениям. Так, с одним и тем же параметром метод в одних задачах может быть эффективен, а в других нет. На практике оптимальное значение стабилизирующего параметра приходится выбирать опытным путем по достижению наилучших численных результатов. Это создает очевидные неудобства, поскольку предполагает выполнение множества экспериментов.

Тем не менее, почти с момента появления и до настоящего времени метод Баумгарта выпал из поля зрения небесных механиков и, потому, фактически остался неизученным как в методическом плане, так и в плане применения к практическим задачам.

Нам известно лишь несколько авторов [14, 15, 16], которые прибегали к численной стабилизации уравнений орбитального движения. Однако в их работах стабилизация не являлась центральным предметом исследования и, кроме того, численный материал представлен чрезвычайно скудно.

Попытка систематизированного исследования стабилизации Баумгарта в спутниковых задачах была предпринята в работе [17], где экс-

периментально показано, что стабилизация позволяет повысить точность численного интегрирования на несколько порядков и выше.

В данной работе метод Баумгарта применяется к уравнениям ограниченной задачи трех тел, которые используются для численного моделирования астероидных орбит, а также исследуется численная эффективность стабилизации на примере исследуемого движения различных астероидов.

# 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать движение астероидов в рамках возмущенной ограниченной задачи трех тел. В частном случае, когда орбиты двух массивных тел движутся по взаимно круговым орбитам, задача имеет так называемый интеграл Якоби, аналог интеграла энергии задачи двух тел, которым мы воспользуемся для стабилизации уравнений в возмущенном случае.

## 1.1 Уравнения ограниченной задачи трех тел

Пусть астероид с пренебрежимо малой массой движется в поле тяготения двух тел  $S$  и  $J$  (Солнца и планеты) с массами  $M_S$  и  $M_J$  соответственно под действием возмущающей силы  $\mathbf{P}$  (не обязательно гравитационной природы) (Рис. 1). Движение точки будем рассматривать во вращающейся барицентрической относительно тел  $S$  и  $J$  системе координат с осью аппликата, направленной перпендикулярно плоскости, вблизи которой движутся массивные тела. Причем частота вращения системы координат  $n$  равна осредненному среднему движению  $J$  относительно  $S$ .

Используя классическую форму представления [18, 19], запишем уравнения движения в виде [17]

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = 2n\mathbf{I}\dot{\mathbf{x}} - n^2\mathbf{I}^2\mathbf{x} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  и  $\dot{\mathbf{x}}$  — векторы положения и скорости соответственно,  $t$  — физическое время,

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W = \frac{\mu_S}{\Delta_S} + \frac{\mu_J}{\Delta_J}, \quad \Delta_S = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_S|, \quad \Delta_J = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_J|,$$

$W$  — потенциальная функция невозмущенной задачи,  $\mathbf{x}_S$  и  $\mathbf{x}_J$  — векторы положения первого и второго тел соответственно, а  $\mu_S$  и  $\mu_J$  — их гравитационные параметры. Физический смысл составляющих правой части дифференциального уравнения (1) очевиден: первая и вторая составляющие представляют собой соответственно кориолисову и центробежную силы, третья — силу притяжения тел  $S$  и  $J$ .

Связь между динамическими переменными в неподвижной и во вращающейся системах координат задаются формулами

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\varphi)\mathbf{x}_A, \quad \dot{\mathbf{x}} = n\mathbf{I}\mathbf{x} + \mathbf{R}(\varphi)\dot{\mathbf{x}}_A,$$

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi = n(t - t_0),$$

где  $\mathbf{x}_A$  и  $\dot{\mathbf{x}}_A$  — вектор положения и скорости соответственно в неподвижной системе координат, а  $t_0$  — начальная эпоха. Таким образом, начальные параметры в неподвижной и вращающейся системах координат будут связаны как

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{A0}, \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = n\mathbf{I}\mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_{A0}. \quad (2)$$

## 1.2 Интеграл Якоби

В невозмущенной круговой задаче<sup>1</sup> система (1) имеет интеграл

$$\Omega \equiv \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{n^2}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{I}^2\mathbf{x} - W = \text{const}, \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>В данной задаче предполагается, что  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , а  $J$  движется около  $S$  по круговой кеплеровской орбите со средним движением  $n$ . В этих условиях во вращающейся системе координат массивные тела становятся неподвижными:  $\dot{\mathbf{x}}_S = \mathbf{0}$  и  $\dot{\mathbf{x}}_J = \mathbf{0}$ .



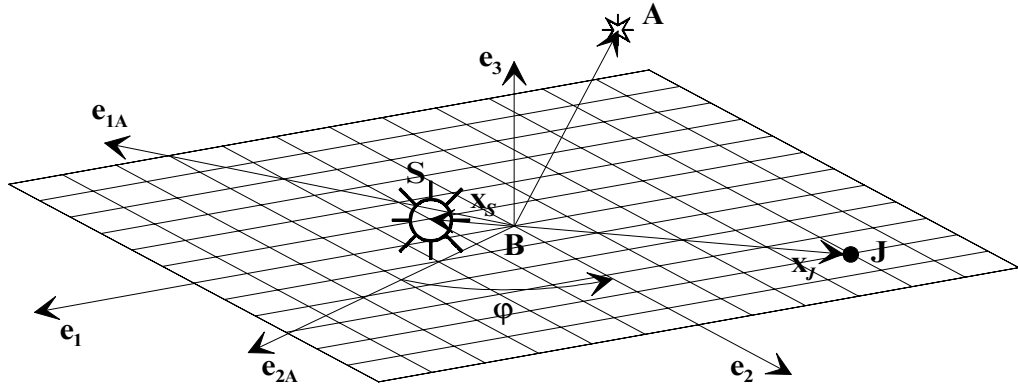


Рис. 1: Движение астероида во вращающейся системе координат называемый интегралом Якоби.

В возмущенном случае  $\Omega$  является функцией времени и удовлетворяет уравнению [17]

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\dot{\mathbf{x}}_S \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_S} - \dot{\mathbf{x}}_J \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_J} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}. \quad (4)$$

### 1.3 Неустойчивость орбит и трудности численного интегрирования их уравнений

Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для культивирования всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому устойчивые уравнения для численного интегрирования более предпочтительны.

Уже в кеплеровской задаче ( $M_J = 0$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ) становится ясно, насколько важна устойчивость орбиты для численного интегрирования ее уравнений.

Рассмотрим две близкие кеплеровские орбиты  $\mathbf{x}$  и  $\tilde{\mathbf{x}}$ , которые отличаются друг от друга в некоторый начальный момент времени  $t_0$  на векторные величины  $\Delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0$  и  $\Delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}_0 - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_0$ .

В задаче двух тел с точностью до первого порядка для отклонений  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$  справедлива оценка

$$\Delta\mathbf{x} \sim \frac{3}{2} \frac{\Delta H_K}{H_K} \dot{\mathbf{x}} \Delta t. \quad (5)$$

Здесь  $H_K = \text{const}$  — кеплеровская энергия, которая является интегралом орбиты  $\mathbf{x}$  (для определенности);  $\Delta H_K = H_K - H_K^\sim = \text{const}$  — отклонение энергий и  $\Delta t = t - t_0$ .

Далее, если принять  $\tilde{\mathbf{x}}$  за точную орбиту, а  $\mathbf{x}$  — за ошибочную с начальными векторными отклонениями  $\Delta\mathbf{x}_0$  и  $\Delta\dot{\mathbf{x}}_0$ , то можно использовать формулу (5) для оценки ошибок  $\Delta\mathbf{x}$  на произвольный момент времени. Оценка (5) показывает, что ошибки  $\Delta\mathbf{x}$  увеличиваются к перигею и уменьшаются к апогею вместе со скоростью  $\dot{\mathbf{x}}$ , и при этом имеют тенденцию к неограниченному росту со временем. Можно также увидеть, что скорость роста  $\Delta\mathbf{x}$  зависит от относительной ошибки кеплеровской энергии: чем меньше отношение  $\Delta H_K/H_K$ , тем ниже скорость роста ошибки  $\Delta\mathbf{x}$ . Но каким бы малым не было  $\Delta H_K$  обязательно наступит такой момент времени, когда ошибки  $\Delta\mathbf{x}$  станут недопустимо большими. Это доказывает известный факт неустойчивости кеплеровских орбит по Ляпунову.

При численном интегрировании уравнений кеплеровского движения ошибки типа  $\Delta\mathbf{x}_0$  и  $\Delta\dot{\mathbf{x}}_0$  растут с каждым шагом интегрирования. Они, в свою очередь, отклоняют численную орбиту от интегральной поверхности, определяемой энергией  $H_K^\sim$  в фазовом пространстве координат и их производных. Этот дреф орбиты, главным образом, проявляет себя

как линейный рост  $\Delta H_K$  и согласно (5) это приводит к квадратичному (суперлинейному) росту  $\Delta \mathbf{x}$ .

Таким образом, для того чтобы ослабить влияние неустойчивости на точность численного интегрирования, необходимо тем или иным способом исправлять численную орбиту, возвращая ее тем самым на интегральную поверхность  $\Delta H_K \approx 0$  и подавляя рост  $\Delta H_K$ .

К сожалению, в задаче трех тел в общем случае уже невозможно получить оценки подобно (5). Следовательно, мы не можем знать, какова роль интеграла Якоби в устойчивости орбитального движения. Тем не менее, интеграл Якоби можно рассматривать как аналог интеграла энергии  $H_K$ . Поэтому, есть основания полагать, что стабилизация по единственному интегралу в ограниченной задаче трех тел будет столь же эффективна как и энергетическая стабилизация в задаче двух тел.

## 2 СТАБИЛИЗАЦИЯ БАУМГАРТА

Метод Баумгарта [11, 12] основан на идее искусственного введения в дифференциальные уравнения движения так называемых стабилизирующих (возмущающих) членов, компенсирующих отклонения численного (ошибочного) решения от некоторой опорной интегральной поверхности (точного решения).

### 2.1 Стабилизированные уравнения движения

#### 2.1.1 Невозмущенный случай

Допустим, что движение небесного тела описывается системой уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (6)$$

имеющей интеграл

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \text{const}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{q}$  — вектор интегрируемых переменных,  $t$  — независимая переменная,  $\mathbf{Q}$  — известная вектор функция  $\mathbf{q}$  и  $t$ .

Выберем некоторое опорное решение  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\sim$  и будем стабилизировать систему (6) по опорной интегральной поверхности, задаваемой уравнением

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C^\sim, \quad (8)$$

для которого  $C(\mathbf{q}^\sim, \dot{\mathbf{q}}^\sim) \equiv C^\sim$ .

Дифференцируя (8) по времени, получим

$$\frac{dC^\sim}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \frac{d\dot{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{Q} \equiv 0. \quad (9)$$

Следуя Баумгарту, введем в систему (6) возмущающие члены  $\delta\mathbf{Q}$ , которые бы любое близкое к  $\mathbf{q}^\sim$  решение  $\mathbf{q}$  увлекали на опорную интегральную поверхность (8), т.е так чтобы выполнялось условие асимптотической устойчивости по  $C$ :

$$\Delta C \equiv C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - C^\sim \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (10)$$

В результате стабилизированные уравнения примут вид

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{Q} + \delta\mathbf{Q}. \quad (11)$$

Далее, дифференцируя (10) и учитывая тождество (9), будем иметь

$$\frac{d\Delta C}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \delta\mathbf{Q}. \quad (12)$$

Поскольку на опорной интегральной поверхности  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = C^\sim$  возмущающие члены  $\delta\mathbf{Q}$  должны равняться нулю, то они представляются в виде

$$\delta\mathbf{Q} = \Delta C \mathbf{u}, \quad (13)$$

где  $\mathbf{u}$  — пока неизвестная вектор функция, которая будет определена в соответствии с выполнением условия стабилизации (10).

Подставляя (13) в (12), получим дифференциальное уравнение для  $\Delta C$ :

$$\frac{d\Delta C}{dt} = \Delta C \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{u}. \quad (14)$$

Введем функцию  $\mathbf{u}$  как

$$\mathbf{u} \equiv -\gamma \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^{-2}, \quad (15)$$

где  $\gamma = \text{const} \neq 0$ . Подстановка (15) в (14) дает

$$\frac{d\Delta C}{dt} = -\gamma \Delta C. \quad (16)$$

Предположим, что в начальный момент времени  $t_0$  значение интеграла  $C_0 = C(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$  отличается от опорного  $C^\sim$  на величину  $\Delta C_0$ . Тогда решение уравнения (16) будет

$$|\Delta C| = |\Delta C_0| e^{-\gamma \Delta t}. \quad (17)$$

Отсюда видно, что условие стабилизации определяется знаком  $\gamma$ : для стремления  $\Delta C$  к нулю при интегрировании вдоль независимой переменной  $t$  ( $\Delta t > 0$ ) параметр  $\gamma$  должен быть больше нуля, в противном случае ( $\Delta t < 0$ ) — меньше.

Таким образом, показано, что выбор (15) функции  $\mathbf{u}$  обеспечивает выполнение условия стабилизации. Наконец, когда стабилизированные члены определены, систему (11) можно переписать в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{Q} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^{-2}. \quad (18)$$

### 2.1.2 Возмущенный случай

Пусть теперь система уравнений (6) возмущается некоторой функцией  $\mathbf{P}$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t). \quad (19)$$

В возмущенном случае опорное значение  $C^\sim$  интегральной функции становится переменной величиной. В соответствии с (8) и (9) ее поведение будет описываться дифференциальным уравнением

$$\frac{dC^\sim}{dt} = \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{P}. \quad (20)$$

Как и в невозмущенном случае, введем в систему (19) стабилизирующие члены  $\delta \mathbf{Q}$  (13). Поскольку для вычисления стабилизирующих

членов используется переменная  $C^\sim$ , стабилизация предполагает включение уравнения (18) в возмущенную систему (19). Используя вышеизложенные выкладки, не трудно показать, что выбор (15) функции  $\mathbf{u}$  также обеспечивает выполнение условия стабилизации.

В результате стабилизированная система в возмущенном случае примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} &= \mathbf{Q} + \mathbf{P} - \gamma \Delta C \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^{-2}, \\ \frac{dC^\sim}{dt} &= \frac{\partial C}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{P}, \quad \Delta C = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - C^\sim. \end{aligned} \quad (21)$$

С аналитической точки зрения, при  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\sim$  стабилизированная система (21) эквивалентна системе (19), так как  $\Delta C \equiv 0$ . Однако в отличие от последней первая асимптотически устойчива по  $C$ . Это свойство дифференциальных уравнений весьма ценно при численном интегрировании, поскольку оно позволяет удерживать насаждаемое всевозможными ошибками численное решение около интегральной поверхности  $C = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , при этом учитываются топологические свойства точного решения. В то же самое время численное интегрирование нестабилизированных уравнений сопровождается дрейфом численного решения от интегральной поверхности и увеличением ошибки  $\Delta C$ .

Следует заметить, что стартовое значение переменной  $C^\sim$  задается по начальным значениям переменных  $\mathbf{q}$ :  $C_0^\sim = C^\sim(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$ .

Несмотря на то, что после стабилизации уравнения становятся сложнее и требуют больше времени на вычисление их правых частей, они могут значительно повысить оперативность интегрирования за счет своих свойств, так как стабилизация позволяет увеличить шаг интегрирования, сохраняя при этом точность численного решения.

## 2.2 Достоинства и недостатки метода Баумгарта

О достоинствах метода Баумгарта говорилось выше:

1. За счет сохранения интегральных соотношений частично компенсируются ошибки численного интегрирования и, самое главное, ослабляется влияние неустойчивости орбитального движения на эти же ошибки.
2. Кроме того, сохраняются некоторые свойства исследуемого движения. Например, при энергетической стабилизации в невозмущенной задаче двух тел обеспечивается постоянство периода и большой полуоси.

Среди недостатков метода можно перечислить следующие:

1. Стабилизация Баумгарта предполагает усложнение и расширение системы динамических уравнений. В результате в правых частях уравнений появляются дополнительные возмущающие члены, а система уравнений пополняется новым уравнением для опорного интегрального параметра  $C^*$ .
2. Появления в динамических уравнениях возмущающих сил нефизической природы может привести к заметному искажению динамической картины. В той же задаче двух тел, обеспечение постоянства большой полуоси может обернуться изменением формы орбиты. По сути, этот недостаток является следствием достоинства 2.

Однако, следует заметить, что такое искажение динамики не приводит со временем к роковым изменениям в орбитальных координатах, какие могут иметь место при ошибках в энергии. Поэтому



стабилизирующие преобразования (по энергетическим аналогам) целесообразно применять лишь при интегрировании на длительных интервалах времени от нескольких десятков орбитальных периодов и более, где явно раскрывается практическая ценность стабилизации.

3. Степень искажения орбиты при стабилизации в значительной мере зависит от величины параметра  $\gamma$ , который, как правило, не известен до численного эксперимента. Кроме того, как уже упоминалось выше, метод Баумгарта очень чувствителен к его значениям. Так, с одним и тем же параметром метод в одних задачах может быть эффективен, а в других нет. На практике оптимальное значение стабилизирующего параметра приходится выбирать опытным путем по достижению наилучших численных результатов. Это создает очевидные неудобства, поскольку предполагает выполнение множества экспериментов.

## 2.3 Задача двух тел

### 2.3.1 Невозмущенный случай

Рассмотрим метод Баумгарта на примере задачи двух тел.

Уравнения кеплеровского движения, как известно, имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x}, \quad (22)$$

где  $\mu$  — гравитационный параметр центрального тела и  $r = |\mathbf{x}|$  — радиус-вектор. Как было показано, уравнения (22) необходимо стабилизировать по энергии.

Интеграл энергии системы (22) имеет вид

$$H_K = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r}. \quad (23)$$

Для стабилизации воспользуемся формой уравнений (18). Полагая, что  $\mathbf{q} = \mathbf{x}$ ,  $C = H_K$ , а

$$\mathbf{Q} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x},$$

получим стабилизированные уравнения в виде [12]

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} - \gamma\Delta H_K \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \quad (24)$$

где

$$\Delta H_K = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} - H_K^\sim.$$

### 2.3.2 Возмущенный случай

В случае возмущенной задачи уравнения движения можно записать в виде

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (25)$$

где  $U = U(\mathbf{x})$  — потенциальная функция консервативных возмущающих сил,  $\mathbf{P}$  — неконсервативные силы.

Уравнения (25) при  $\mathbf{P} = 0$  имеют интеграл

$$H = \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} + U, \quad (26)$$

где  $H$  — так называемая полная энергия.

После стабилизации по интегралу (26) уравнения (25) примут вид [12]

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} - \gamma\Delta H \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \\ \frac{dH^\sim}{dt} &= \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}, \\ \Delta H &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - \frac{\mu}{r} + U - H^\sim. \end{aligned} \quad (27)$$

Безусловно, утверждение о ляпуновской устойчивости стабилизированной системы (27) весьма сомнительно. Это, вообще говоря, нужно доказывать. Но, даже если после стабилизации система не становится устойчивой, то, по крайней мере, можно полагать, что при слабых возмущениях "остаточная" неустойчивость будет малой в сравнении с устраняемой неустойчивостью.

Кроме того, очевидно, что эффективность применения стабилизированной системы будет тем выше, чем слабее будет влияние неконсервативных сил  $\mathbf{P}$ .

Говоря о численных аспектах в применении стабилизированных уравнений на практике, следует отметить следующее. В уравнения движения искусственно вводятся возмущающие (стабилизирующие) члены, которые не рассматриваются в физической постановке задачи. В связи с этим встает вопрос об адекватности решения системы (27) реальному орбитальному движению, описываемому системой (25).

С вычислительной точки зрения, строго говоря, ни одна из систем не описывает адекватно реальное движение, так как их численное интегрирование сопровождается численными ошибками. В то же время, следует помнить, что возмущающие члены нефизической природы в стабилизированных уравнениях вводятся как раз для того, чтобы хотя бы частично гасить эти ошибки, которые становятся узнаваемы благодаря интегральным соотношениям, тогда как в нестабилизированных уравнениях не возникает никакой реакции на них и при численном интегрировании дальнейшая судьба возникающих ошибок предоставляется неустойчивости.

### 3 СТАБИЛИЗИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ В ВОЗМУЩЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Для стабилизации уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел (1) воспользуемся интегральным соотношением Якоби (3) вместе с его дифференциальным уравнением (4). В результате стабилизированные уравнения примут следующий вид [17]

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} &= 2n\mathbf{I}\dot{\mathbf{x}} - n^2\mathbf{I}^2\mathbf{x} + \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P} - \gamma\Delta\Omega\frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{\mathbf{x}}^2}, \\ \frac{d\Omega^\sim}{dt} &= -\dot{\mathbf{x}}_S \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_S} - \dot{\mathbf{x}}_J \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}_J} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}, \\ \Delta\Omega &= \frac{\dot{\mathbf{x}}^2}{2} + \frac{n^2}{2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{I}^2\mathbf{x} - W - \Omega^\sim.\end{aligned}\tag{28}$$

Из системы (28) видим, что наибольшей эффективности стабилизации Баумгарта можно ожидать в случае равенства нулю скоростей  $\dot{\mathbf{x}}_S$  и  $\dot{\mathbf{x}}_J$ , а также возмущающей силы  $\mathbf{P}$ . В этом случае правая часть уравнения для  $\Omega^\sim$  обращается в нуль и, поэтому, оно будет интегрироваться без методических ошибок. Таким образом, можем заключить, что метод Баумгарта должен быть наиболее результативен в применении к уравнениям невозмущенной круговой ограниченной задачи трех тел. Однако, данная задача не представляет практического интереса в моделировании астероидного движения, поскольку движение больших планет происходит по некруговым орбитам.

Насколько важны условия круговой задачи для метода Баумгарта мы покажем в следующем разделе, используя полученные нами численные результаты.

## 4 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для того чтоб выявить возможности стабилизации Баумгарта, мы провели численный эксперимент.

### 4.1 Постановка эксперимента

В рамках возмущенной ограниченной задачи трех тел численно моделировалось движение астероида. В качестве первого тела выбиралось Солнце, а в качестве второго — Юпитер. Дифференциальные уравнения задачи интегрировались методом Эверхарта 15-го порядка [20, 21] с переменным шагом интегрирования в арифметике с точностью  $10^{-19}$ . Шаг интегрирования выбирался по параметру интегратора  $L$  так, чтобы величина локальной погрешности составляла  $10^{-L}$  [21].

Чтобы сравнить возможности стабилизации по интегральному соотношению Якоби и по энергии, мы также построили численную модель на основе стабилизированных уравнений возмущенной задачи двух тел (27).

В качестве показателей эффективности модели были приняты ее точность и быстродействие. Точность моделирования ( $|\Delta \mathbf{x}|$ ) оценивалась известным методом прямого и обратного интегрирования. Численная ошибка модели вычислялась по формуле

$$|\Delta \mathbf{x}| = \max_{i=1, N} |\mathbf{x}_i^F - \mathbf{x}_i^B|$$

где  $F$  и  $B$  обозначают переменные полученные на одни и те же моменты независимой переменной при прямом и обратном интегрировании соответственно, а  $N$  — число моментов на интервале интегрирования.

В качестве меры быстродействия было принято число шагов интег-

рирования ( $NS$ ), выполненных на всем исследуемом интервале. Характеристика  $NS$  удобна тем, что она не зависит ни от скорости процессора, ни от качества оптимизации программного обеспечения.

#### 4.1.1 Выбор астероидов

Для построения численной модели были выбраны пять астероидов: два астероида главного пояса, Церера и Томск; два резонансных с Юпитером — Гильда (3:2) и Алинда (3:1); и один астероид, Тоутатис, имеющий тесные сближения с Землей. Средние орбитальные элементы астероидов на стандартную эпоху J2000 представлены в табл. 1. Начальные параметры движения астероидов были взяты из [22].

Табл. 1: Параметры движения астероидов

Астероид		$a$ (а.е.)	$e$	$i$ ( $^\circ$ )	$T$ (г.)
Ceres	1	2.767	0.079	10.58	4.61
Tomsk	4931	2.580	0.281	23.17	4.15
Alinda	887	2.484	0.563	9.30	3.92
Hilda	153	3.973	0.142	7.83	7.93
Toutatis	4179	2.510	0.634	0.47	3.98

#### 4.1.2 Моделирование возмущающих сил

При моделировании учитывались только возмущающие силы от больших планет, которые рассматривались как точечные массы.

Возмущающие силы от каждой планеты в численной модели, построенной на основе дифференциальных уравнений задачи двух тел,

вычислялись по формуле

$$\mathbf{P} = \mu_P \frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|^3} - \mu_P \frac{\mathbf{x}_P}{|\mathbf{x}_P|^3}, \quad (29)$$

где  $\mu_P$  — гравитационный параметр планеты,  $|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|$  — расстояние от астероида, имеющего вектор положения  $\mathbf{x}$ , до возмущающего тела с вектором положения  $\mathbf{x}_P$ .

Возмущающие силы в задаче трех тел вычислились как

$$\mathbf{P} = \mu_P \frac{\mathbf{x}_P - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}|^3}. \quad (30)$$

Массы планет (в массах Солнца) [23] и их гелиоцентрические расстояния заданы в табл. 2.

Следует заметить, что отличие формул (30) и (29) вызвано тем, что движение в моделях рассматривалось в разных координатных системах: в задаче двух тел — относительно гелиоцентрической системы координат, а в задаче трех тел — относительно барицентрической системы, начало которой определялось динамической системой, состоящей из Солнца и больших планет. Поэтому в формуле для задачи двух тел присутствуют инерциальные силы, обусловленные гравитационным влиянием больших планет на Солнце.

Табл. 2: Массы планет и их средние гелиоцентрические расстояния

Возм. тело	Масса	$a$ (а.е.)	Возм. тело	Масса	$a$ (а.е.)
Солнце	1	—	Юпитер	1/1047.35	5.203
Меркурий	1/6023600	0.387	Сатурн	1/3498	9.539
Венера	1/408523.5	0.723	Уран	1/2296	19.191
Земля	1/328900.55	1.000	Нептун	1/19314	30.061
Марс	1/3098710	1.524	Плутон	1/13 · 10 <sup>7</sup>	39.529

### 4.1.3 Краткое описание фонда координат больших планет DE200/LE200

Для вычисления координат больших планет  $\mathbf{x}_P$  в формулах (29) и (30) использовался фонд DE200/LE200.

Фонд DE200/LE200 позволяет получать координаты больших планет в барицентрической системе координат, отнесенной к эпохе J2000, на любой момент времени от 1600 г. по 2169 г. Вычисление координат основано на аппроксимации решения дифференциальных уравнений движения планет Солнечной системы полиномами Чебышева на временных интервалах. Значение каждой из трех координат представляется значением линейной комбинации полиномов Чебышева на заданный момент времени. Собственно, численные коэффициенты линейных комбинаций и представляют основную базу данных для DE200/LE200.

В численном моделировании движения астероидов фонд DE200/LE200 был использован для получения координат больших планет, необходимых для вычисления значений  $\mathbf{P}$ .

### 4.1.4 Характер движения астероидов

Выбранные объекты представляют довольно широкий спектр орбит, которые могут быть интересны для практики.

Первый открытый астероид, Церера, является типичным представителем главного пояса. Движение этого астероида происходит практически в плоскости эклиптики по почти круговой орбите.

Томск также является астероидом главного пояса. Однако, структура орбитальных возмущений Томска сложнее, чем в случае Цереры. Благодаря эксцентricности орбиты астероид довольно близко подхо-



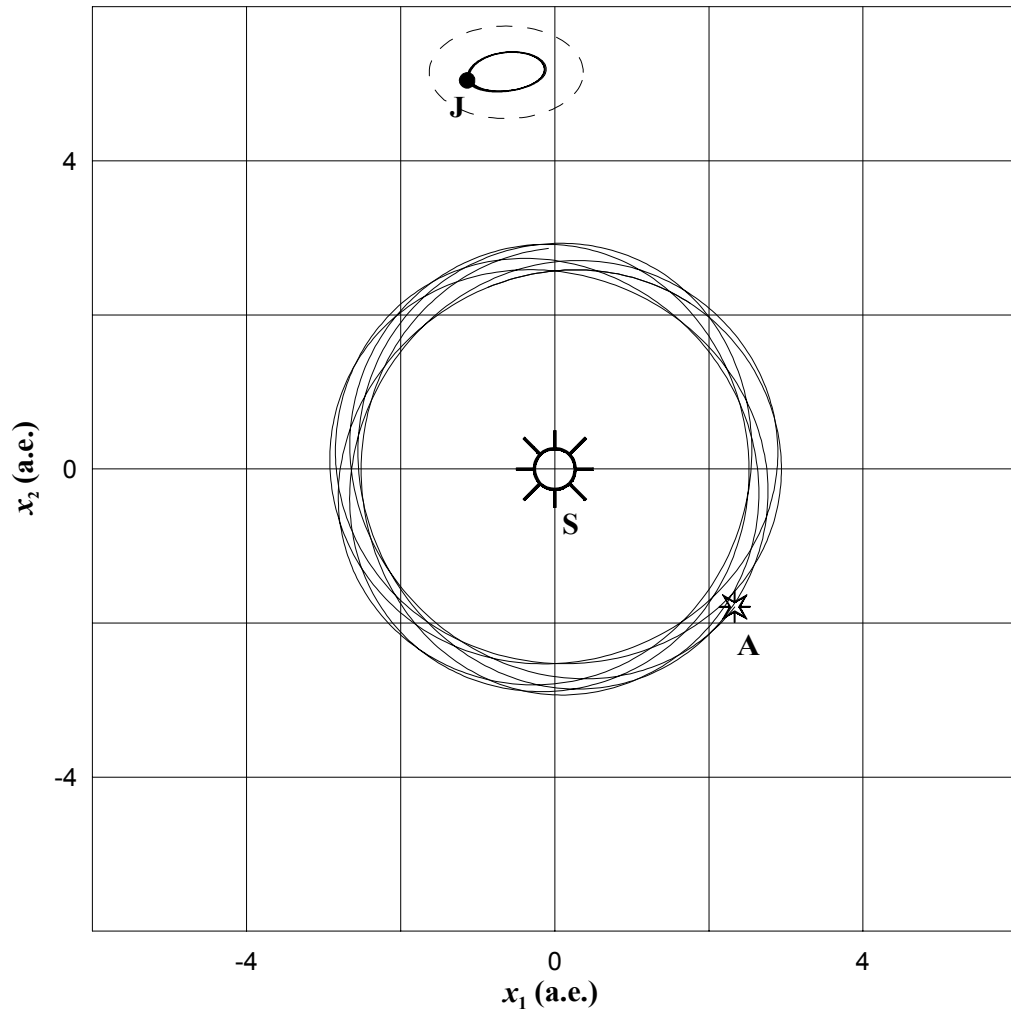


Рис. 2: Орбита Цереры

дит к орбите Марса хотя и не имеет тесных сближений с ним. Кроме того, динамика Томска усложняется большим орбитальным наклоном.

Алинда и Гильда — резонансные астероиды. Особенность в движении Алинды состоит в том, что из-за значительной вытянутости его орбиты астероид в перигелии близко подходит к орбите Земли, а в афелии — к орбите Юпитера. Однако, несмотря на это, структура возмущений астероида довольно гладкая и, кроме того, ”украшена” долгопериодическими возмущениями, обусловленными резонансом орбитальных движений Алинды с Юпитером. Гильда имеет как раз тот резонанс (3:2), который предупреждает тесные сближения астероида с большой планетой, в данном случае с Юпитером. Орбита астероида довольно устойчива и также имеет долгопериодические возмущения.

Тоутатис — астероид с очень вытянутой орбитой, сближающийся (в перигелии) с Землей. В связи с этим его орбитальные возмущения носят не регулярный характер.

Имея информацию о характере возмущений орбит представленных небесных объектов, можно предполагать, насколько для них будет высока эффективность метода Баумгарта. Уже сейчас мы можем ожидать, что стабилизация Баумгарта будет наиболее эффективной для Алинды и Гильды, поскольку их движение подчиняется, главным образом, гравитационному влиянию Солнца и Юпитера.

#### 4.1.5 Метод Эверхарта

Численное интегрирование уравнений движения осуществляется методом Эверхарта [20, 21].

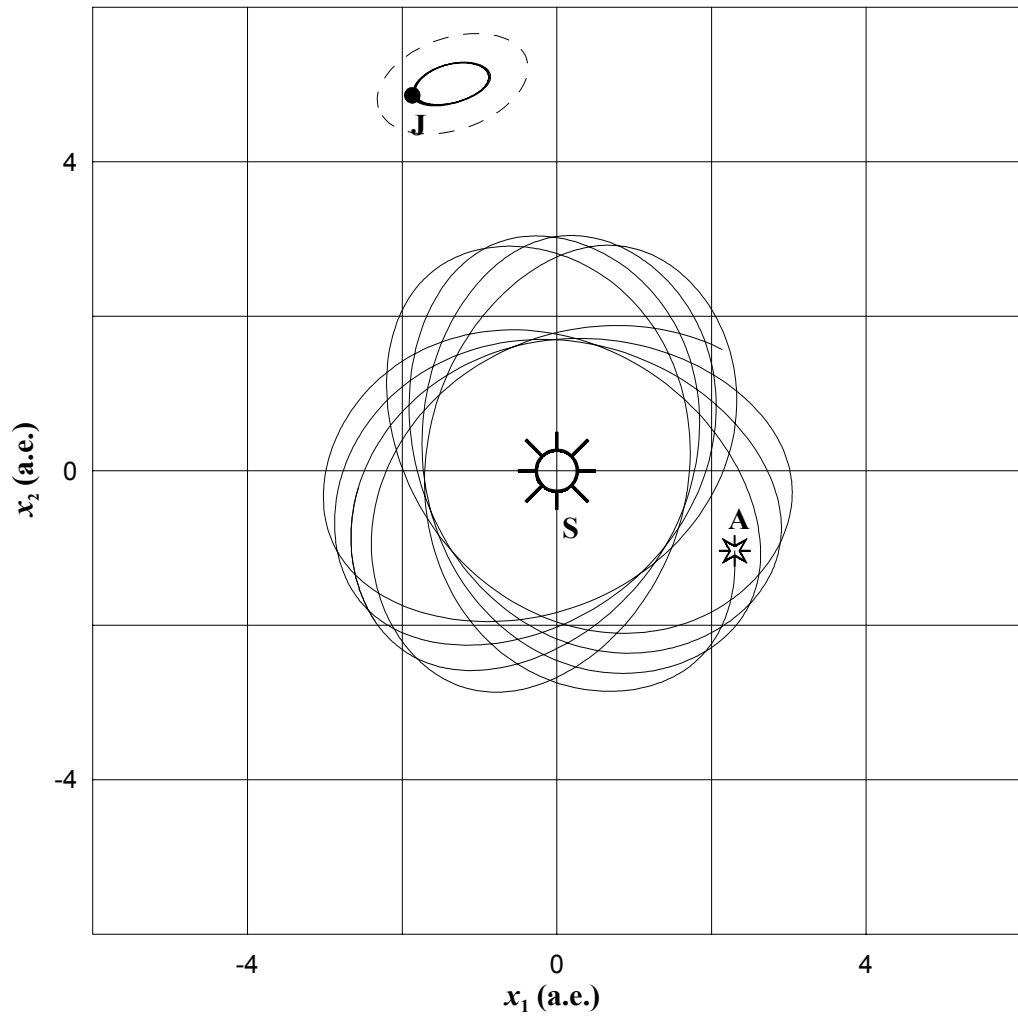


Рис. 3: Орбита Томска

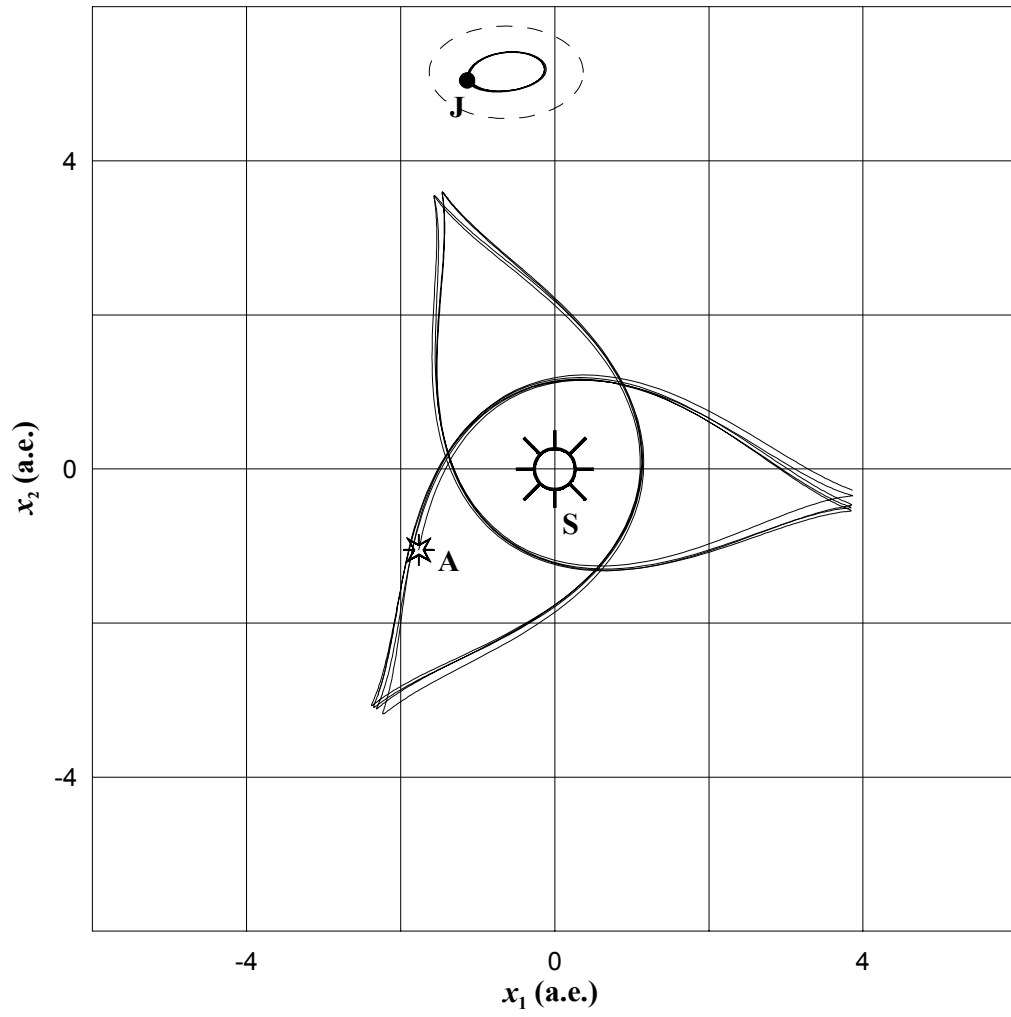


Рис. 4: Орбита Алинды

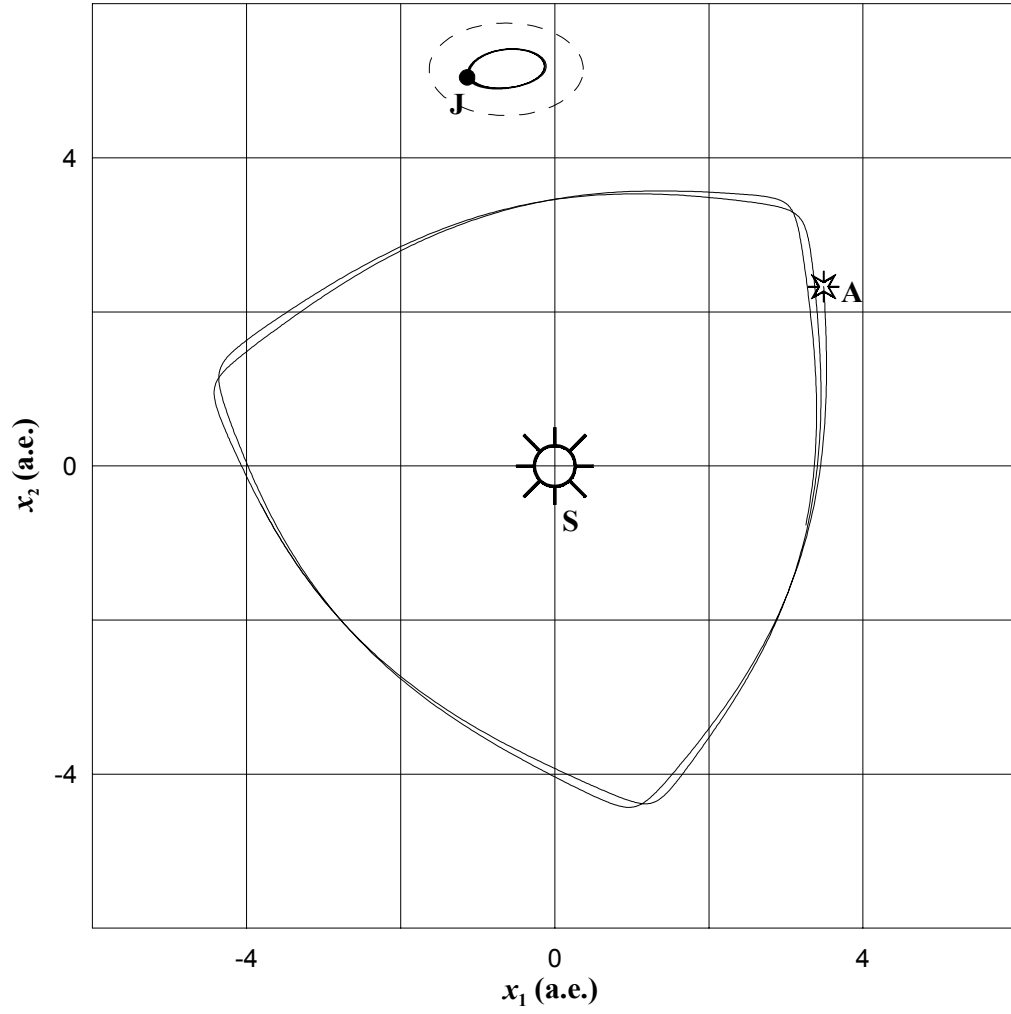


Рис. 5: Орбита Гильды

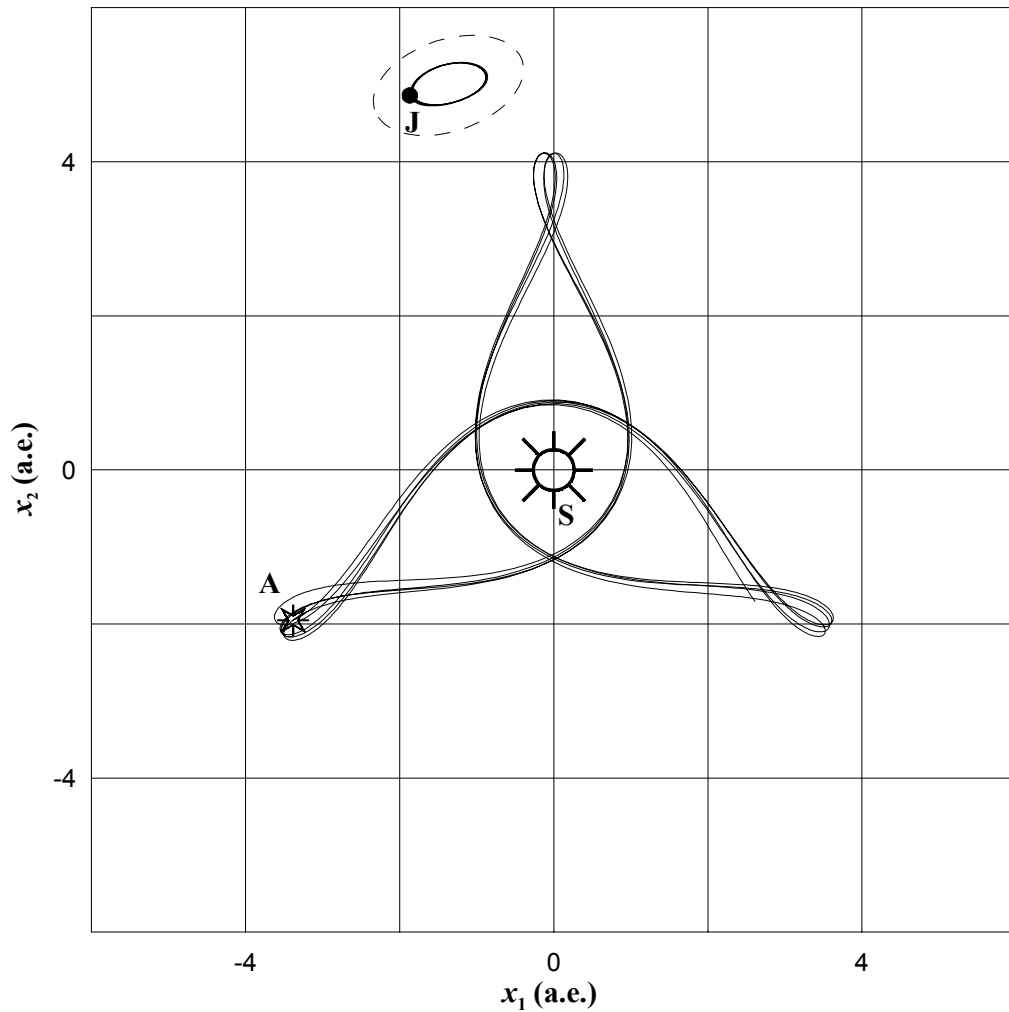


Рис. 6: Орбита Тютатиса

Рассмотрим метод Эверхарта на примере решения систем уравнений первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (31)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad t_0 = 0.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  — вектор интегрируемых переменных,  $t$  — независимая переменная, а  $\mathbf{f}$  — известная вектор-функция времени и переменных  $\mathbf{x}$  (правые части дифференциальных уравнений).

Пусть шаг интегрирования  $H$ , начальное значения  $\mathbf{x}_0$  в начальный момент  $t_0$  и  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$  — известные величины.

Представим функцию  $\mathbf{f}$  в виде усеченного ряда по степеням  $t$  в окрестности  $t_0 = 0$ :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \dots + \mathbf{A}_N t^N. \quad (32)$$

Интегрируя уравнения (32) по независимой переменной, получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 t + \mathbf{A}_1 t^2/2 + \dots + \mathbf{A}_N t^{N+1}/(N+1). \quad (33)$$

Полином  $N$ -ой степени, стоящий в правой части (32), не является отрезком ряда Тейлора, поскольку коэффициенты  $\mathbf{A}_i$  вычисляются не по известным формулам коэффициентов ряда Тейлора, а определяются из условий наилучшего приближения  $\mathbf{x}$  в момент  $T = t_0 + H$  конечными разложениями (33).

Выразим коэффициенты  $\mathbf{A}_i$  через разделенные разности. Для этого представим функцию  $\mathbf{f}$  в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_1) + \alpha_3 t(t - t_1)(t - t_2) + \dots \quad (34)$$

В каждый момент независимой переменной  $t_i$  имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &\equiv \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t_1, \\ \mathbf{f}_2 &\equiv \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2(t_2 - t_1), \\ &\dots \end{aligned} \quad (35)$$

отсюда получим разделенные разности

$$\alpha_1 = (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0)/t_1, \quad (36)$$

$$\alpha_2 = ((\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_0)/t_2 - \alpha_1)/(t_2 - t_1),$$

$$\alpha_3 = (((\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_0)/t_3 - \alpha_1)/(t_3 - t_1) - \alpha_2)/(t_3 - t_2), \quad (37)$$

...

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $t$ , выразим коэффициенты  $\mathbf{A}_i$  через  $\boldsymbol{\alpha}_i$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 + (-t_1)\boldsymbol{\alpha}_2 + (t_2t_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + \dots = c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1 + c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2 + \dots, \\ \mathbf{A}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 + (-t_1 - t_3)\boldsymbol{\alpha}_3 + \dots = c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2 + c_{32}\boldsymbol{\alpha}_3 + \dots, \\ \mathbf{A}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 + \dots = c_{33}\boldsymbol{\alpha}_3 + c_{43}\boldsymbol{\alpha}_4 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (38)$$

Для коэффициентов  $c_{ij}$  справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, \\ c_{ij} &= -t_{i-1}c_{i-1,1}, \quad i > 1, \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_{i-1}c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (31) сводится, прежде всего, к нахождению узлов разбиения  $t_i$  шага  $H$ . Известно, что за счет выбора разбиения можно повысить порядок точности метода с  $N + 1$  до  $2(N + 1)$ . Тогда значения узлов разбиения  $t_i (i = 1, N - 1)$  будут совпадать с корнями полинома Лежандра  $N - 1$  степени

$$P_{N-1}(2t/T - 1) = 0.$$

Значения  $\mathbf{x}$  в моменты  $t_i$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0t_1 + [\mathbf{A}_1t_1^2/2 + \mathbf{A}_2t_1^3/3 + \mathbf{A}_3t_1^4/4 + \dots + \mathbf{A}_Nt_1^{N+1}/(N + 1)], \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0t_2 + \mathbf{A}_1t_2^2/2 + [\mathbf{A}_2t_2^3/3 + \mathbf{A}_3t_2^4/4 + \dots + \mathbf{A}_Nt_2^{N+1}/(N + 1)], \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0t_3 + \mathbf{A}_1t_3^2/2 + \mathbf{A}_2t_3^3/3 + [\mathbf{A}_3t_3^4/4 + \dots + \mathbf{A}_Nt_3^{N+1}/(N + 1)], \\ &\dots \end{aligned} \quad (40)$$

Эти предсказующие уравнения служат для определения коэффициентов  $\mathbf{A}_i (i = 1, N)$ , а исправляющее уравнение

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0T + \mathbf{A}_1T^2/2 + \mathbf{A}_2T^3/3 + \mathbf{A}_3T^4/4 + \dots + \mathbf{A}_NT^{N+1}/(N + 1) \quad (41)$$



дает значение решения на конце шага  $H$ .

В алгоритмах Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в разложении решения (41). Пусть  $L$  — контрольный параметр такой, что  $10^{-L}$  есть требуемая точность вычислений. Введем величину  $h$ , определяемую соотношением

$$h = \frac{1}{N+1} \left| \frac{\mathbf{A}_N}{T^{N+1}} \right|.$$

Новый шаг интегрирования  $H^*$  определяется формулой

$$H^* = (10^{-L}/h)^{\frac{1}{N+1}}.$$

Эффективность процесса численного интегрирования во многом зависит от того, насколько удачно осуществлен выбор начального шага. Для уравнений в нормализованном виде Эверхартом [21] в качестве такого шага предложена некоторая величина, полученная путем экспериментальных расчетов. Для метода интегрирования порядка  $N$  она задается формулой

$$H_0 = \left( \frac{N}{11} \right) 0.5^{0.4L}.$$

Оптимальное значение параметра  $L$  определяется опытным путем в зависимости от типа интегрируемых дифференциальных уравнений. Если же  $L$  слишком мало, шаг может оказаться слишком большим и это ухудшит сходимость, а также точность метода. Если же  $L$ , наоборот, слишком велико, интегрирование будет выполняться точно, но метод будет неэффективен по затратам машинного времени.

## 4.2 Анализ результатов

Путем варьирования параметра интегратора  $L$ , отвечающего за выбор переменного шага интегрирования, для каждого рассматриваемого

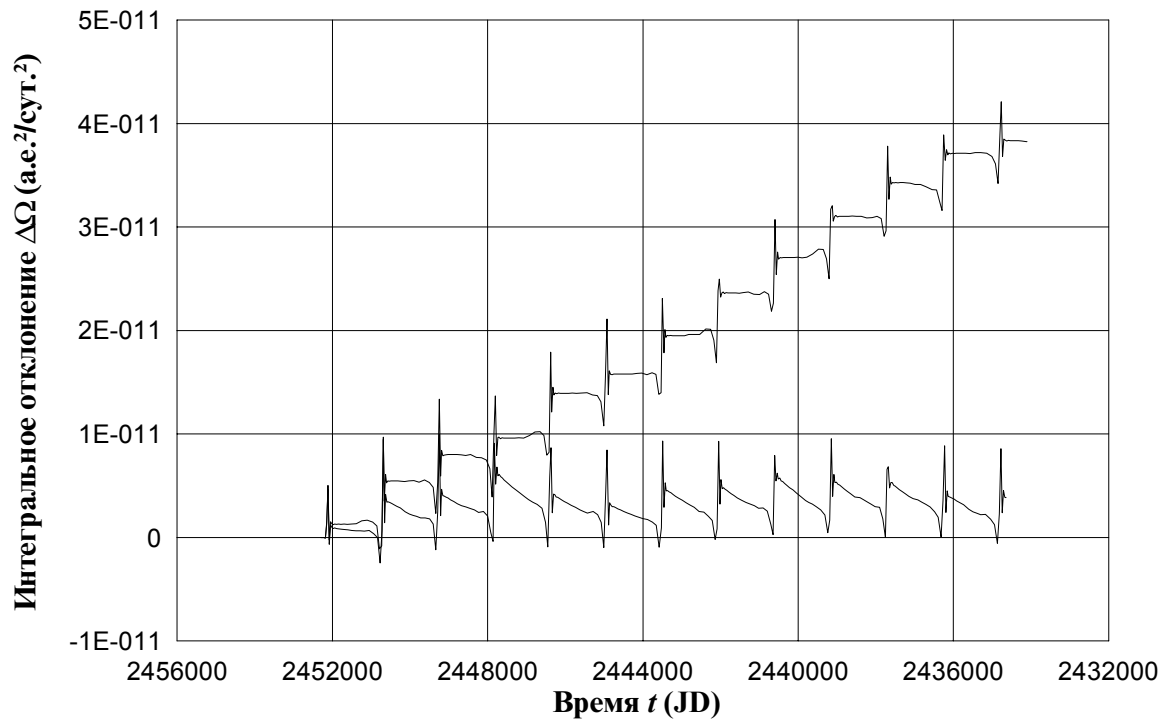


Рис. 7: Поведение интегрального отклонения во времени для стабилизированной и нестабилизированной моделей (Алинда)

астероида были получены характеристики точность-быстродействие на интервале времени 100 лет (50 лет прямого и 50 лет обратного интегрирования). Для каждого  $L$  экспериментально подбирался стабилизирующий параметр  $\gamma$  по достижении наивысшей точности.

Предварительно мы исследовали стабилизацию уравнений на предмет асимптотической устойчивости по  $\Omega$ . Для этого на примере Алинды была произведена оценка отклонения интегрального соотношения Якоби от его начального (опорного) значения при численном интегрировании стабилизированных и нестабилизированных уравнений возмущенной задачи трех тел. Отклонения приведены на рис. 7.

Из рисунка видно, что отклонение интеграла Якоби, вызванное ошибками интегрирования, в нестабилизированном случае неограниченно возрастает, тогда как в стабилизированном случае колеблется около

нуля. Это говорит о том, что стабилизация работает и для стабилизированных уравнений имеет место асимптотическая устойчивость по  $\Omega$ , подавляющая рост интегрального отклонения  $\Delta\Omega$ .

Все полученные для астероидов характеристики точность-быстродействие показывают (Рис. 8–12), что эффективность метода Баумгарта здесь гораздо ниже, нежели в спутниковых задачах [17].

Так применение стабилизации при малых  $NS$  (при высоком быстродействии) позволяет повысить точность интегрирования не более, чем на порядок. Низкая эффективность метода в астероидных задачах, по-видимому, объясняется сильным влиянием возмущающих сил  $P$ , а также тем, что нарушается условие неподвижности:  $\dot{\mathbf{x}}_S = \mathbf{0}$  и  $\dot{\mathbf{x}}_J = \mathbf{0}$ .

В дополнение к сказанному хотелось бы отметить, что численное моделирование в задаче трех тел выполняется быстрее в 1.5–2 раза, нежели в задаче двух тел. Скорее всего это связано с тем, что исследуемые орбиты рассматриваются в разных системах координат. В задаче трех тел используется вращающаяся барицентрическая система координат. В результате этого орбита здесь в отличие от гелиоцентрической более гладкая [24], и кроме того, за счет вращения координатной системы уменьшается частота обращения астероида около Солнца. Все это, безусловно, благотворно влияет на численное интегрирование.

Наконец, характеристики для стабилизированных уравнений показывают, что точность стабилизированного интегрирования в задаче трех тел существенно выше, чем в задачах двух тел (на 2–4 порядка).

Заметим также, что в наших задачах выбор  $NS$  в качестве быстродействия численного моделирования может быть расценен как не со-

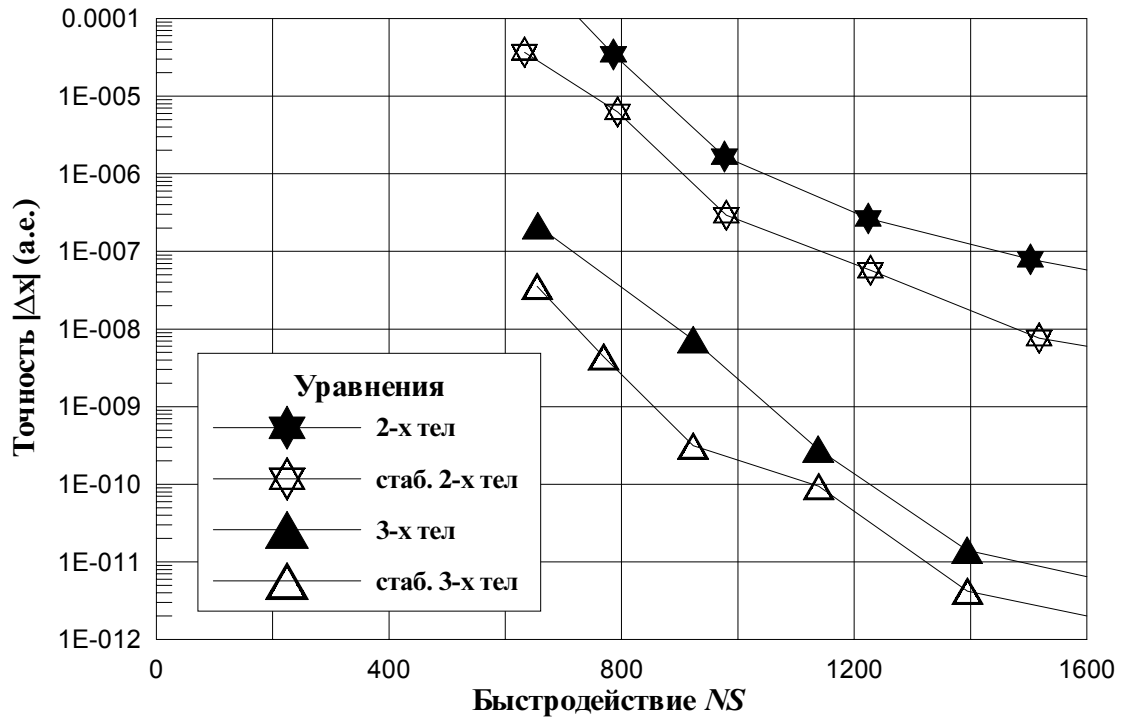


Рис. 8: Характеристики точность-быстродействие для Цереры

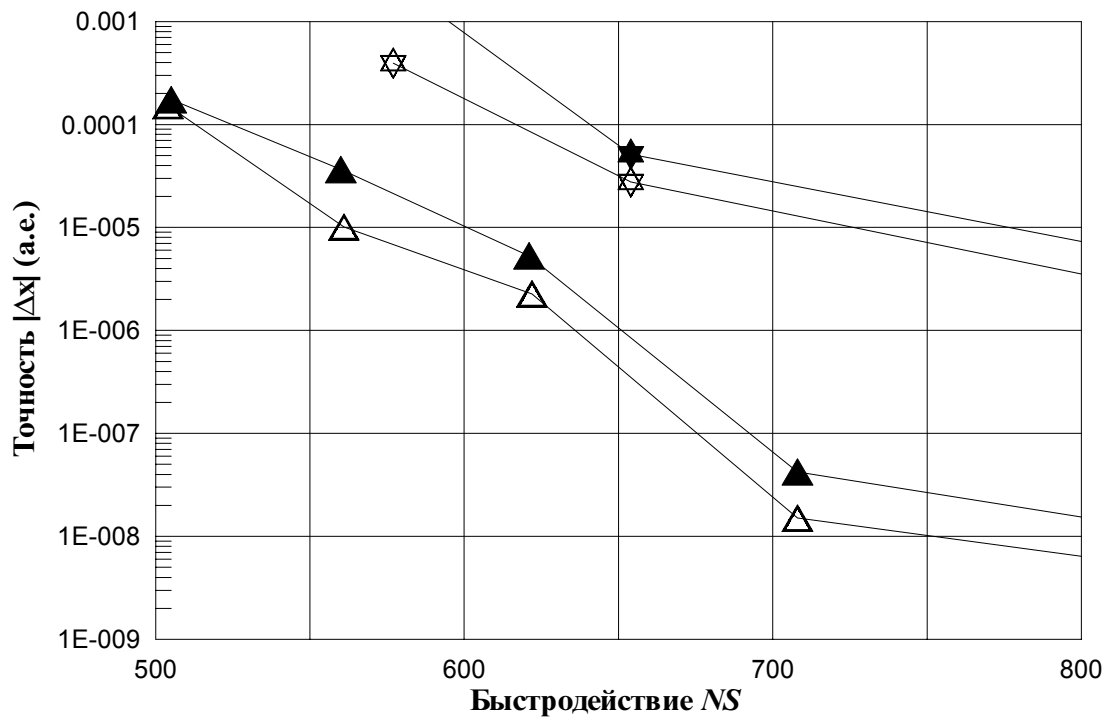


Рис. 9: Характеристики точность-быстродействие для Томска

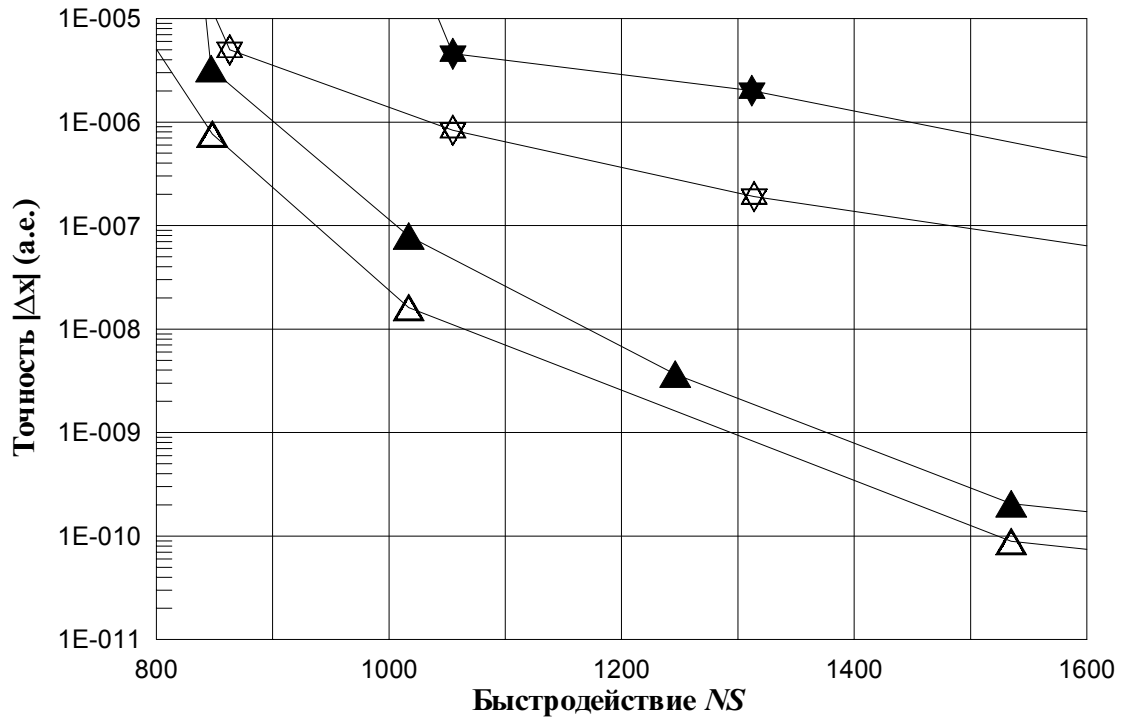


Рис. 10: Характеристики точность-быстродействие для Алинды

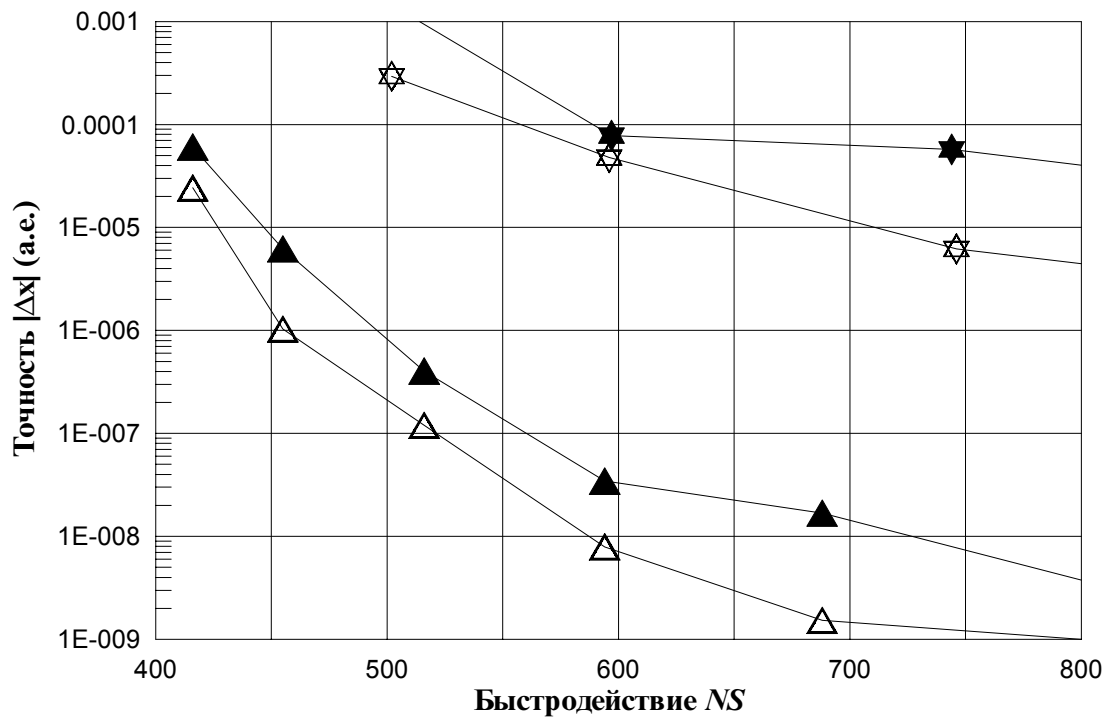


Рис. 11: Характеристики точность-быстродействие для Гильды

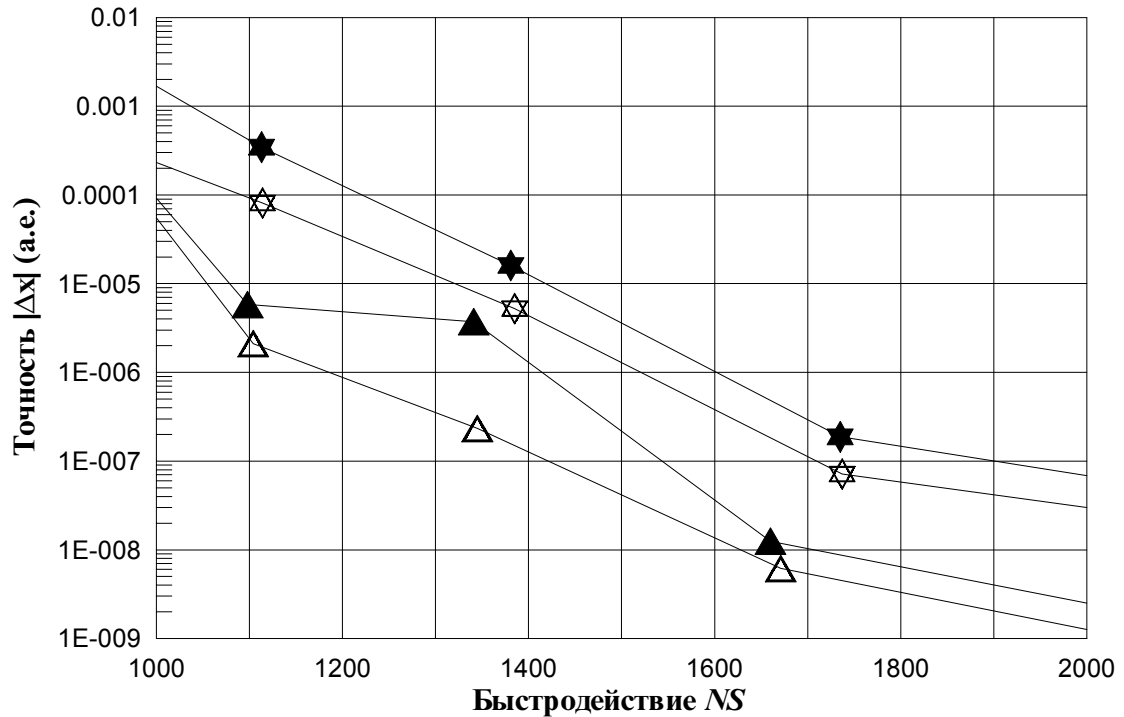


Рис. 12: Характеристики точность-быстродействие для Тоутатиса всем корректный. Дело в том, что быстродействие численной модели зависит от: 1) эффективности численного метода; 2) регулярности орбиты и 3) сложности системы дифференциальных уравнений.

Показатель  $NS$  несомненно становится характеристикой быстродействия, пригодной для сравнения эффективности моделей с различными дифференциальными уравнениями, в задачах, где сложность уравнений определяется только сложностью возмущающих ускорений, что имеет место в нашем случае.

### 4.3 Модельная задача

Для того чтобы оценить важность условий круговой задачи для стабилизации по интегральному соотношению Якоби, мы также провели еще один эксперимент [25].

В рамках круговой задачи трех тел численно моделировалось дви-

жение семейства астероидов с большой полуосью 2.5 а.е. Было рассмотрено 10 орбит с различными эксцентриситетами. На основе классических и стабилизированных уравнений были построены численные модели движения астероидов. Уравнения движения интегрировались методом Эверхарта (15 порядка) с переменным шагом, обеспечивающим точность для классических уравнений  $10^{-7}$ . Численные результаты эксперимента даны на рис. 13.

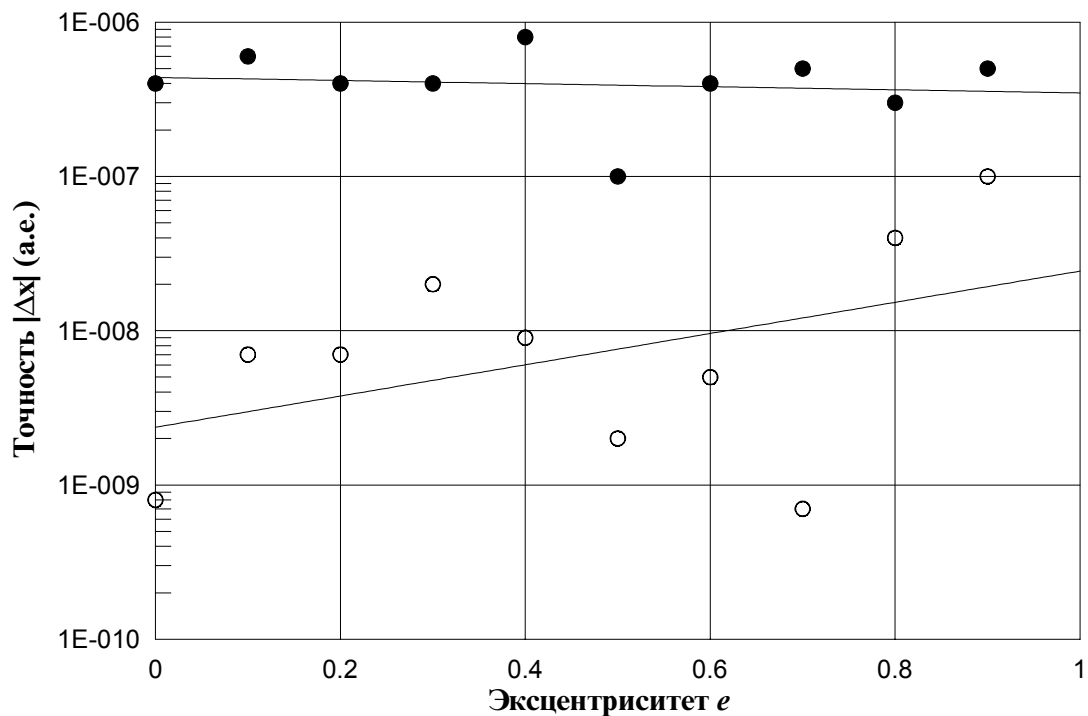


Рис. 13: Оценка точности классической и стабилизированной моделей в зависимости от орбитального эксцентриситета

Из графика видим, что наивысшая эффективность стабилизации проявляется для круговых орбит, но с увеличением эксцентриситета падает. В частности, для высокоэксцентричных орбит, где имеют место тесные сближения, точность стабилизирующего решения становится сравнима с точностью классического решения. В то же самое время для умеренных эксцентриситетов ( $e = 0.0-0.4$ ) мы получаем выигрыш

в точности от двух до трех порядков. Таким образом, можно полагать, что эффективность применяемой стабилизации будет тем выше, чем ближе будут условия задачи к условиям круговой задачи трех тел.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе получены следующие результаты.

1. В рамках возмущенной ограниченной задачи трех тел выведены стабилизированные дифференциальные уравнения астероидного движения.
2. Построены численные модели астероидного движения на основе стабилизированных уравнений движения задачи двух и трех тел.
3. Исследована эффективность стабилизации Баумгарта в задаче динамики астероидов. В частности, экспериментально показано, что для астероидов, движение которых испытывает заметное влияние от Юпитера (второго тела), применение стабилизации позволяет повысить точность численного интегрирования на порядок.
4. Выполнен сравнительный анализ эффективности стабилизации применительно к задачам двух и трех тел, где показано, что точность стабилизированного решения в задаче трех тел выше на 2–4 порядка, чем в задаче двух тел.

## Литература

- [1] Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
- [2] Szebehely V. Linearization of dynamical systems using integrals of the motion // *Cel. Mech.* V. 14. 1976. P. 499–508.
- [3] Шефер В. А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов// *Астрономический журнал.* 1998. Т. 68. Вып. 1. С. 197–205.
- [4] Шефер В. А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения в четырехмерном параметрическом пространстве // *Астрономический журнал.* 1993. Т. 70. Вып. 5. С. 1113–1119.
- [5] Burdet C.A. Theory of Kepler Motion: The General Perturbed Two Body Problem // *Z. Angew. Math. Phys.* V. 19. 1968. P. 345–368.
- [6] Encke J.F. Über eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen // *Astron. Nachr.* 1852. B. 33. S. 377–398.
- [7] Kyner W.T., Bennett M.M. Modified Encke Special Perturbation Method // *Astron. J.* 1996. V. 71. P. 79–582.
- [8] Эскобал П. Методы астродинамики М.: Мир. 1971. 344 с.
- [9] Батраков Ю.В., Макарова Е.Н. Обобщенный метод Энке для изучения возмущенного движения // *Бюл. ИТА АН СССР.* / Л.: Наука. 1979. N. 14. С. 397–401.

- [10] Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A. New trends in numerical simulation of the motion of small bodies of the solar system // *Cel. Mech.* 2001. V. 80. P. 227–247.
- [11] Baumgarte J. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* 1972. V. 1. P. 1–16.
- [12] Baumgarte J. Stabilization of the Differential Equations of Keplerian Motion // B.D. Tapley and V.Szebehely (eds.), *Recent Advances in Dynamical Astronomy*. D. Reidel Publishing Company, 1973. P. 38–44.
- [13] Kinoshita, H., Yoshida, H., Nakai, H. Symplectic Integrators and Applications to Dynamical Astronomy // *Cel. Mech.* 1991. I. 50. P. 59–71.
- [14] Aareseth S.J. The Few Body Problem // *Proc. 96th Colloq. IAV, Twku, June 14–19, 1987*. Kluwer Academic Publishers, 1988. P. 287–307.
- [15] Murison M.A. On an Efficient and Accurate Method to Integrate Restricted Three — Body Orbits // *Astron. J.* 1989. V. 97 (5). P. 1496–1509.
- [16] Funato Y., Hut P., McMillan S., Makino J. Time — Symmetrized Kustaanheimo — Stiefel Regularization // *Astron. J.* 1996. V. 112 (4). P. 1697–1708.
- [17] Avdyushev V. Numerical Stabilization of Orbital Motion // *Cel. Mech.* 2003 (в печати).

- [18] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. Т. 2. 800 с.
- [19] Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
- [20] Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* 1974. V. 10. P. 35–55.
- [21] Everhart E. On Efficient Integrator of Very High Order and Accuracy with Appendix Listing of RADAU // *Denver., Univ. of Denver.,* 1974. P. 20–20.
- [22] Эфемериды малых планет на 1994 год / под ред. Батракова Ю. В. СПб.: ИТА РАН, 1993. 552 с.
- [23] Астрономический ежегодник на 1996 год. Часть I. Эфемериды Солнца, Луны и планет. / под ред. Абалкин В.К.. СПб.: ИТА РАН. 1995. 416 с.
- [24] Херрик С. Астродинамика. М.: Мир, 1977. Т. 2. 264 с.
- [25] Козаногина Е.В. Авдюшев В.А. Стабилизация типа Баумгарта в ограниченной круговой задаче трех тел // *Исследования по баллистике и смежным вопросам механики.* Томск: Изд-во ТГУ, 2002. Вып. 5. С. 130–131.