

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
зав. каф. теоретической механики,
проф. Бубенчиков А.М. _____
" _____ " _____ 2002 г.

Баньщикова Мария Александровна
МЕТОД ЭНКЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ШПЕРЛИНГА-БОДЕ
И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ
СПУТНИКОВ И АСТЕРОИДОВ
(Дипломная работа)

Научный руководитель
к. ф.-м. н.
Авдюшев В.А. _____
Автор работы
Баньщикова М.А. _____

Томск 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	5
1.1 Уравнения движения	5
1.2 Особенности численного интегрирования	5
2 МЕТОД ЭНКЕ	7
2.1 Уравнения классического метода Энке	7
2.2 Разрешение проблемы вычитания близких величин	8
2.3 Обобщение метода Энке	9
2.4 Исправление промежуточной орбиты	10
2.5 Достоинства и недостатки метода Энке	10
3 УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ШПЕРЛИНГА-БОДЕ	12
4 УРАВНЕНИЯ ЭНКЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ШПЕРЛИНГА-БОДЕ	13
5 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ	16
5.1 Моделирование возмущающих ускорений в спутниковой задаче	17
5.1.1 Несферичность центральной планеты	17
5.1.2 Влияние Солнца и галилеевых спутников	18
5.2 Моделирование возмущающих ускорений в астероидной задаче	18
5.3 Структура возмущений исследуемых орбит	19
5.4 Метод Эверхарта	20
5.5 Анализ результатов	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	29

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной астрометрии предъявляет большие требования к точности и быстродействию численных моделей движения наблюдаемых небесных тел. Это обстоятельство приводит к необходимости усовершенствования методов исследования движения.

Одним из способов для повышения точности и быстродействия численного моделирования движения является привлечение таких дифференциальных уравнений, которые используют уже известную информацию о свойствах исследуемого движения. В качестве такой информации, как правило, служат известные интегралы движения, либо аналитические решения, достаточно хорошо представляющие динамический процесс и имеющие простую формализацию. Представленный подход широко используется в аналитической механике, в теории линеаризации и регуляризации [1, 2, 3, 4, 5], а также стабилизации дифференциальных уравнений движения [6, 7].

Популярный в небесной механике метод Энке [8] предполагает, что орбиты небесных тел в первом приближении представляют собой кеплеровские эллипсы. Для возмущений исследуемой орбиты относительно кеплеровской в методе составляются дифференциальные уравнения, которые затем интегрируются численно.

С рождения метода (1852 г.) прошло более века, прежде чем он стал по-настоящему и широко востребованным среди специалистов в основном благодаря бурному развитию космонавтики и компьютерных технологий. С тех пор предпринимались попытки по усовершенствованию метода Энке: предлагались новые промежуточные орбиты [9, 10, 11, 12, 13, 14] и различные исходные дифференциальные уравнения [15, 16, 14, 17].

Целью данной работы является дальнейшее исследование численных аспектов метода Энка в применении его к уравнениям Шперлинга-Боде и анализ эффективности метода в спутниковой и астероидной динамике.

В первом разделе дается постановка задачи и вывод дифференциальных уравнений орбитального движения в прямоугольных координатах. Далее перечисляются основные трудности, возникающие при интегрировании уравнений движения. Во втором разделе излагается классический метод Энке. Выводятся уравнения Энке и разрешается проблема вычитания больших и близких величин, описывается алгоритм исправления промежуточной орбиты. Затем излагается обобщенный метод Эн-

ке для систем уравнений первого порядка и дается анализ достоинств и недостатков метода. Третий и четвертый разделы посвящены так же методу Энке, но в переменных Шперлинга-Боде. В последнем разделе описываются и анализируются результаты численного исследования эффективности метода Энке в задачах спутниковой и астероидной динамики, излагается метод Эверхарта численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В заключении перечисляются основные результаты проделанной работы.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1 Уравнения движения

Будем рассматривать движение материальной точки с пренебрежимо малой массой в поле тяготения центрального тела с массой M под действием других массивных материальных тел.

Тогда в системе координат, связанной с центральным телом, дифференциальные уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \mathbf{P} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0),$$

где \mathbf{x} — вектор положения, t — физическое время, $\mu = k^2 M$ — гравитационный параметр, k — постоянная Гаусса, $r = |\mathbf{x}|$ — радиус-вектор, $V = V(\mathbf{x})$ — потенциальная функция консервативных возмущающих сил, \mathbf{P} — неконсервативные силы.

1.2 Особенности численного интегрирования

Интегрирование уравнений (1) связано со следующими трудностями.

1. Правые части уравнений представляют собой большие и быстроизменяющиеся функции времени даже для круговых орбит. Как известно, вычисленные на компьютере большие величины содержат большие ошибки округления. Поэтому пошаговое численное интегрирование уравнений (1) сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления.
2. Уравнения имеют особенность в начале координат ($r = 0$). Для сильно эксцентричных эллиптических орбит в перигеуме, при сближении с центральным телом, величины правых частей уравнений значительно и быстро возрастают. Поэтому интегрирование орбиты вблизи перигеума выполняется с малым шагом интегратора, что сопряжено с большими ошибками.
3. Уравнения (1) неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании

создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс. Ошибки на текущем шаге интегрирования становятся ошибками начальных данных следующего, которые в дальнейшем усиливаются неустойчивостью шаг за шагом. Поэтому устойчивые уравнения для численного интегрирования более предпочтительны.

Классический метод Энке [8], о котором пойдет речь в следующем разделе, решает только первую из перечисленных трудностей.

2 МЕТОД ЭНКЕ

2.1 Уравнения классического метода Энке

Основная идея метода Энке состоит в том, чтобы подобрать такую опорную орбиту, которая в течение длительного времени была бы близка к реальной орбите. Для отклонений координат реальной траектории от соответствующих величин на опорной траектории строится система дифференциальных уравнений, которая затем интегрируется численно.

По существу в методе Энке предпринимается попытка интегрировать малые возмущения с тем, чтобы увеличить шаг интегрирования и получить дополнительные разряды, чтобы тем самым ослабить влияние численных ошибок.

В классическом методе Энке в качестве промежуточной орбиты используется оскулирующая кеплеровская орбита, описываемая уравнениями

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_K}{dt^2} + \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Так как промежуточная орбита в начальный момент времени t_0 оскулирует реальную орбиту, то начальные условия уравнений (1) будут совпадать с условиями (2):

$$\mathbf{x}_{K0} = \mathbf{x}_K(t_0) = \mathbf{x}(t_0), \quad \dot{\mathbf{x}}_{K0} = \dot{\mathbf{x}}_K(t_0) = \dot{\mathbf{x}}(t_0).$$

Пусть $\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_K$ — отклонения возмущённых координат от их опорных аналогов на промежуточной орбите. Тогда дифференциальные уравнения для отклонений запишутся

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{x}_K}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} + \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P},$$

или

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (3)$$

а начальные условия примут вид

$$\delta \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \delta \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}.$$

Отклонения $\delta \mathbf{x}$ можно получать, непосредственно интегрируя систему (3). Кеплеровский член $\mu \mathbf{x}_K / r_K^3$ определен заранее из аналитического решения \mathbf{x}_K задачи двух тел, а $\mu \mathbf{x} / r^3$ и правая часть уравнений являются функциями действительных координат $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}$ и времени t . Таким образом, система (3) достаточна и пригодна для использования.

2.2 Разрешение проблемы вычитания близких величин

Вблизи начальной эпохи $\delta \mathbf{x}$ — малые величины. Кеплеровские члены в уравнениях (3) существенно больше. Поэтому их малая разность будет вычисляться с неудовлетворительной точностью. Энке предложил прием, устраняющий эту трудность, и тем самым повысил практическую ценность своего метода.

Преобразуем разность кеплеровских членов к виду

$$\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = \frac{\mu}{r_K^3} \left(\frac{r_K^3}{r^3} \mathbf{x} - \mathbf{x} + \mathbf{x} - \mathbf{x}_K \right) = -\frac{\mu}{r_K^3} \left[\left(1 - \frac{r_K^3}{r^3} \right) \mathbf{x} - \delta \mathbf{x} \right] \quad (4)$$

Поскольку

$$r^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}, \mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}) = r_K^2 + 2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}), \quad (5)$$

то

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x})}{r_K^2}.$$

Положим, что

$$2q \equiv \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta \mathbf{x}) + (\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x})}{r_K^2}, \quad (6)$$

тогда

$$\frac{r^2}{r_K^2} = 1 + 2q,$$

и

$$1 - \frac{r_K^3}{r^3} = 1 - (1 + 2q)^{-3/2} \equiv f(q)q. \quad (7)$$

Разложение в ряд функции f по степеням q дает

$$f(q) = 3 - \frac{15}{2}q + \frac{105}{6}q^2 - \dots \quad (8)$$

В итоге Энке получил уравнения [8]

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{\mu}{r_K^3} (f q \mathbf{x} - \delta \mathbf{x}) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}, \quad (9)$$

где f с заданной точностью определяется конечной суммой ряда (8).

Неудобство использования полученных уравнений заключается в том, что f в процессе интегрирования вычисляется приближенно, так как на практике используются только конечные суммы ряда. Однако существуют способы [13, 15, 17], позволяющие вычислять разность кеплеровских членов без использования рядов.

Представим разность кеплеровских членов в виде

$$\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} - \frac{\mu}{r_K^3} \mathbf{x}_K = \frac{\mu}{r} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_K + \mathbf{x}_K - \frac{r^3}{r_K^3} \mathbf{x}_K \right) = \frac{\mu}{r^3} \left[\delta \mathbf{x} - \left(\frac{r^3}{r_K^3} - 1 \right) \mathbf{x}_K \right].$$

Так как

$$r^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}, \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}) = r_K^2 + 2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}),$$

отсюда имеем

$$r^2 - r_K^2 = 2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}).$$

Расписывая разность квадратов, и разрешая относительно разности радиусов, получим

$$r - r_K = \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r + r_K}.$$

Тогда

$$\frac{r}{r_K} = 1 + \frac{2(\mathbf{x}_K, \delta\mathbf{x}) + (\delta\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})}{r_K(r + r_K)} = 1 + 2q \frac{r_K}{r + r_K} \equiv 1 + d$$

и

$$\frac{r^3}{r_K^3} - 1 = (1 + d)^3 - 1 = d(3 + 3d + d^2) \equiv D.$$

После соответствующей замены получаем уравнения Энке в виде [17]

$$\frac{d^2 \delta\mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}(\delta\mathbf{x} - D\mathbf{x}_K) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}. \quad (10)$$

Представив разности через выражения малых возмущений, решилась проблема вычитания больших и близких величин,

2.3 Обобщение метода Энке

Таким образом, метод Энке реализуется по следующей схеме.

Предположим, что движение небесного тела описывается системой уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(\mathbf{z}, t), \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0), \quad (11)$$

где $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ — вектор интегрируемых переменных.

В пространстве \mathbf{z} выбирается опорная орбита $\mathbf{z}_K = \mathbf{z}_K(t)$, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{d\mathbf{z}_K}{dt} = \mathbf{Z}_K(\mathbf{z}_K, t), \quad \mathbf{z}_{K0} = \mathbf{z}_K(t_0). \quad (12)$$

Прямым вычитанием уравнений (11) и (12) получаем уравнения для отклонений $\mathbf{z} - \mathbf{z}_K$:

$$\frac{d\delta\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(\mathbf{z}_K + \delta\mathbf{z}, t) - \mathbf{Z}_K(\mathbf{z}_K, t), \quad \delta\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0) - \mathbf{z}_K(t_0), \quad (13)$$

Если удастся в \mathbf{Z} явно выделить невозмущенную \mathbf{Z}_K и возмущенную $\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_K$ составляющую, путем соответствующих преобразований решается проблема вычитания близких величин

$$\mathbf{Z}_K(\mathbf{z}_K + \delta\mathbf{z}, t) - \mathbf{Z}_K(\mathbf{z}_K, t).$$

2.4 Исправление промежуточной орбиты

Вблизи начальной эпохи возмущения $\delta\mathbf{z}$ малы, но со временем возрастают. На больших интервалах времени они увеличиваются настолько, что приходится прибегать к процедуре исправления орбиты путем перевычисления параметров опорного движения на новую эпоху t_1 . Новые параметры $\mathbf{z}_K(t_1)$ определяются из текущих значений $\mathbf{z}(t_1)$ до исправления, а в качестве критерия переопределения параметров оценивается величина разности невозмущенных членов.

Причиной возрастания $\delta\mathbf{z}$, очевидно, является неточное представление движения промежуточной орбитой, а также неустойчивость промежуточного решения. Однако представление можно улучшить, по меньшей мере, двумя способами. Первый заключается в подборе таких значений параметров промежуточной орбиты, чтобы на исследуемом интервале времени исключить возрастающие возмущения $\delta\mathbf{z}$. Второй состоит в поиске принципиально новых математических моделей для совершенствования промежуточных орбит.

2.5 Достоинства и недостатки метода Энке

О достоинствах метода Энке упоминалось выше. Поскольку в методе интегрируются только малые отклонения от опорной (кеплеровской) орбиты, его достоинство заключается в том, что оказывается возможным увеличить размер шага интегрирования и кроме того метод резервирует дополнительные разряды для ошибок, освобождая тем самым от них значащие разряды.

Недостатки метода заключаются в том, на каждый шаг интегрирования уравнений Энке тратится больше времени, чем в случае интегрирования исходных уравнений (1). В сильновозмущенных задачах, когда реальная орбита значительно отклоняется от кеплеровской, метод Энке требует частой смены опорной орбиты и, следовательно, теряется доля полезного времени интегрирования.

Недостатками полученной системы (3) также является то, что она: во-первых,

сингулярна в начале координат; во-вторых, ее решение неустойчиво по Ляпунову и, кроме того; в-третьих, опорное решение не зависит явно от независимой переменной t и необходимо итеративным способом решать уравнение Кеплера.

Перечисленные недостатки фактически являются наследием исходной системы (1). Поэтому для их разрешения в качестве исходной системы необходимо принять такую систему, которая была бы и регулярной, и стабилизированной. Из семейства таких систем [3, 4], на наш взгляд, наиболее подходящими являются системы Шперлинга-Боде [18, 7], в которых уравнения движения представляются в виде гармонического осциллятора в прямоугольных координатах. Причем использование этих систем в методе Энке позволяет выразить опорное решение явно через независимую переменную.

3 УРАВНЕНИЯ В ПЕРЕМЕННЫХ ШПЕРЛИНГА-БОДЕ

Перепишем уравнения возмущенного движения (1) в виде

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

где

$$\mathbf{F} \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{P}.$$

Известно, что уравнения (14) в невозмущенном случае имеют интеграл: энергии

$$\omega^2 = \frac{\mu}{2r} - \dot{\mathbf{x}}^2 = \text{const}, \quad (15)$$

и интеграл Лапласа

$$\mathbf{A} = \mathbf{x} \left(\frac{\mu}{r} - \omega^2 \right) - r \dot{r} \dot{\mathbf{x}} = \text{const}, \quad (16)$$

где ω — частота динамической системы.

В возмущённом случае энергия ω^2 и вектор Лапласа \mathbf{A} переменные и описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\omega^2}{dt} = -2(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}}), \quad (17)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2\mathbf{x}(\mathbf{F}, \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{F}, \mathbf{x}) - r \dot{r} \mathbf{F}, \quad (18)$$

Используя уравнения (15)–(18) и временное преобразование Судмана $\omega dt = r ds$, уравнение (14) можно привести к гармоническому осциллятору [18]

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{A}}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} (r^2 \mathbf{F} + (\mathbf{F}, \mathbf{x}') \mathbf{x}') \quad (19)$$

Чтобы система (19) была достаточной, дополним ее уравнениями радиуса-вектора r , частоты ω , вектора Лапласа \mathbf{A} и времени t :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{ds^2} + r - \frac{\mu}{\omega^2} &= \frac{1}{\omega^2} (r(\mathbf{F}, \mathbf{x}) + r'(\mathbf{F}, \mathbf{x}')), \\ \frac{d\omega}{ds} &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{F}, \mathbf{x}'), \\ \frac{d\mathbf{A}}{ds} &= 2\mathbf{x}(\mathbf{F}, \mathbf{x}') - \mathbf{x}'(\mathbf{F}, \mathbf{x}) - r r' \mathbf{F}, \\ \frac{dt}{ds} &= \frac{r}{\omega}, \end{aligned}$$

4 УРАВНЕНИЯ ЭНКЕ В ПЕРЕМЕННЫХ ШПЕРЛИНГА-БОДЕ

Для получения уравнений Энке в переменных Шперлинга-Бодде (SB) необходимо из уравнений возмущенного движения

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} + \mathbf{x} + \frac{\mathbf{A}}{\omega^2} &= \frac{1}{\omega^2} (r^2 \mathbf{F} + (\mathbf{F}, \mathbf{x}') \mathbf{x}'), \\
 \frac{d^2 r}{ds^2} + r - \frac{\mu}{\omega^2} &= \frac{1}{\omega^2} (r (\mathbf{F}, \mathbf{x}) + r' (\mathbf{F}, \mathbf{x}')), \\
 \frac{dt}{ds} &= \frac{r}{\omega}, \\
 \frac{d\omega}{ds} &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{F}, \mathbf{x}') \\
 \frac{d\mathbf{A}}{ds} &= 2\mathbf{x} (\mathbf{F}, \mathbf{x}') - \mathbf{x}' (\mathbf{F}, \mathbf{x}) - r r' \mathbf{F}
 \end{aligned} \tag{20}$$

вычесть уравнения невозмущенного движения F_0

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \mathbf{x}_K}{ds^2} + \mathbf{x}_K + \frac{\mathbf{A}_K}{\omega^2} &= \mathbf{0}, \\
 \frac{d^2 r_K}{ds^2} + r_K - \frac{\mu}{\omega^2} &= 0, \\
 \frac{dt_K}{ds} &= \frac{r}{\omega}, \\
 \frac{d\omega_K}{ds} &= 0 \\
 \frac{d\mathbf{A}_K}{ds} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{21}$$

Уравнения (21) интегрируются аналитически и их решения можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_K &= \left(\mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{A}_0}{\omega_0^2} \right) \cos s + \mathbf{x}'_0 \sin s - \frac{\mathbf{A}_0}{\omega_0^2}, \\
 \mathbf{x}'_K &= - \left(\mathbf{x}_0 + \frac{\mathbf{A}_0}{\omega_0^2} \right) \sin s + \mathbf{x}'_0 \cos s, \\
 r_K &= \left(r_0 - \frac{\mu}{\omega_0^2} \right) \cos s + r'_0 \sin s + \frac{\mu}{\omega_0^2}, \\
 r'_K &= - \left(r_0 - \frac{\mu}{\omega_0^2} \right) \sin s + r'_0 \cos s, \\
 \mathbf{A}_K &= \mathbf{A}_0 = \mathbf{const}, \quad \omega_K = \omega_0 = \mathit{const}, \\
 t_K &= \frac{r'_0}{\omega_0} + \frac{\mu}{\omega_0^3} s + \frac{1}{\omega_0} \left(r_0 - \frac{\mu}{\omega_0^2} \right) \sin s - \frac{r'_0}{\omega_0} \cos s.
 \end{aligned}$$

В результате получаются уравнения в возмущениях или уравнения Энке

$$\frac{d^2 \delta \mathbf{x}}{ds^2} + \delta \mathbf{x} + \frac{\mathbf{A}}{\omega^2} - \frac{\mathbf{A}_K}{\omega_K^2} = \frac{1}{\omega^2} (r^2 \mathbf{F} + (\mathbf{F}, \mathbf{x}') \mathbf{x}'),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \delta r}{ds^2} + \delta r - \frac{\mu}{\omega^2} + \frac{\mu}{\omega_K^2} &= \frac{1}{\omega^2} (r(\mathbf{F}, \mathbf{x}) + r'(\mathbf{F}, \mathbf{x}')), \\
\frac{d\delta \mathbf{A}}{ds} &= 2\mathbf{x}(\mathbf{F}, \mathbf{x}') - \mathbf{x}'(\mathbf{F}, \mathbf{x}) - rr'\mathbf{F}, \\
\frac{d\delta \omega}{ds} &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{P}, \mathbf{x}'), \\
\frac{d\delta t}{ds} &= \frac{r}{\omega} - \frac{r_K}{\omega_K}.
\end{aligned} \tag{22}$$

В (22) возмущённые переменные $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{A}, r, \omega, t$ вычисляются, как сумма их опорных аналогов $\mathbf{x}_K, \mathbf{x}'_K, \mathbf{A}_K, r_K, \omega_K, t_K$ и возмущений $\delta \mathbf{x}, \delta \mathbf{x}', \delta \mathbf{A}, \delta r, \delta \omega, \delta t$, полученных численно из уравнений Энке (22)

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{x}_K + \delta \mathbf{x}, \\
\mathbf{x}' &= \mathbf{x}'_K + \delta \mathbf{x}', \\
\mathbf{A} &= \mathbf{A}_K + \delta \mathbf{A}, \\
\omega &= \omega_K + \delta \omega, \\
r &= r_K + \delta r, \\
t &= t_K + \delta t.
\end{aligned} \tag{23}$$

Как и в классических уравнениях Энке, здесь так же возникает проблема вычитания близких величин:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{A}}{\omega^2} - \frac{\mathbf{A}_K}{\omega_K^2}, \\
-\frac{\mu}{\omega^2} + \frac{\mu}{\omega_K^2}, \\
\frac{r}{\omega} - \frac{r_K}{\omega_K}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Используя (23), разности (24) нетрудно выразить через малые возмущения:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{A}}{\omega^2} - \frac{\mathbf{A}_K}{\omega_K^2} &= \frac{\omega_K^2 (A_K + \delta A) - (\omega_K + \delta \omega)^2 A_K}{\omega^2 \omega_K^2} = \\
&= \frac{\delta A}{\omega^2} - \frac{2\delta A A_K}{\omega^2 \omega_K} - \frac{\delta^2 \omega A_K}{\omega^2 \omega_K^2} = \\
&= \frac{\delta A}{(\omega_K + \delta \omega)^2} - \frac{2A_K \delta \omega}{(\omega_K + \delta \omega)^2 \omega_K} - \frac{A_K \delta^2 \omega}{(\omega_K + \delta \omega)^2 \omega_K^2} = \\
&= \frac{1}{(\omega_K + \delta \omega)^2} \left(\mathbf{A}_K \left[-2 \frac{\delta \omega}{\omega_K} - \frac{\delta \omega^2}{\omega_K^2} \right] + \delta \mathbf{A}_K \right), \\
-\frac{\mu}{\omega^2} + \frac{\mu}{\omega_K^2} &= \frac{\mu}{\omega_K^2} - \frac{\mu}{(\omega_K + \delta \omega)^2} = \frac{\mu \delta \omega (2\omega_K + \delta \omega)}{(\omega_K + \delta \omega)^2 \omega_K^2} = \\
&= \frac{\mu}{\omega^2} \frac{\delta \omega}{\omega_K} \left(2 + \frac{\delta \omega}{\omega_K} \right),
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{\omega} - \frac{r_K}{\omega_K} &= \frac{r}{\omega_K + \delta\omega} - \frac{r_K}{\omega_K} = \frac{(r_K + \delta r)\omega_K - r_K(\omega_K + \delta\omega)}{\omega_K(\omega_K + \delta\omega)} = \\ &= \frac{1}{\omega} \left(\delta r - r_K \frac{\delta\omega}{\omega_K} \right). \end{aligned}$$

Теперь можем переписать уравнения Энке в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\delta\mathbf{x}}{ds^2} + \delta\mathbf{x} + \frac{1}{\omega^2} \left(\mathbf{A}_K \left[-2\frac{\delta\omega}{\omega_K} - \frac{\delta\omega^2}{\omega_K^2} \right] + \delta\mathbf{A}_K \right) &= \frac{1}{\omega^2} (r^2\mathbf{F} + (\mathbf{F}, \mathbf{x}') \mathbf{x}'), \\ \frac{d^2\delta r}{ds^2} + \delta r + \frac{\mu}{\omega^2 \omega_K} \left(2 + \frac{\delta\omega}{\omega_K} \right) &= \frac{1}{\omega^2} (r(\mathbf{F}, \mathbf{x}) + r'(\mathbf{F}, \mathbf{x}')), \\ \frac{d\delta\mathbf{A}}{ds} &= 2\mathbf{x}(\mathbf{F}, \mathbf{x}') - \mathbf{x}'(\mathbf{F}, \mathbf{x}) - rr'\mathbf{F}, \\ \frac{d\delta\omega}{ds} &= -\frac{1}{\omega} (\mathbf{F}, \mathbf{x}'), \\ \frac{d\delta t}{ds} &= \frac{1}{\omega} \left(\delta r - r_K \frac{\delta\omega}{\omega_K} \right). \end{aligned} \tag{26}$$

5 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Многочисленные работы, посвященные исследованиям и развитию метода Энке, предоставляют достаточно обширный численный материал, на основании которого можно судить о практической ценности метода. Наши численные результаты также подтверждают это.

Мы исследовали возможности метода Энке в SB-интерпритации в задачах динамики астероидов и спутников планет. Для этого на основе систем дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах (1), в SB-переменных (20) и в SB-возмущениях (26) были построены три численные модели движения и проведен сравнительный анализ их эффективности на примере конкретных объектов: Амальтея JV, Каллисто JIV, Гималия JVI, Пасифе JVIII (спутники Юпитера); Таутатис 4179, Бордовицына 9262, Алинда 887 (астероиды)¹. Орбитальные параметры объектов представлены в табл. 1 и 2.

Табл. 1: Параметры движения спутников

Спутник	T (сут.)	e	i ($^\circ$)
Амальтея JV	0.5	0.003	0.3
Каллисто JIV	16.7	0.007	0.2
Гималия JVI	247.8	0.166	30.2
Пасифе JVIII	732.6	0.380	138.0

Табл. 2: Параметры движения астероидов

Астероид	a (а.е.)	e	i ($^\circ$)
Таутатис 4179	2.51	0.64	0.47
Бордовицына 9262	2.58	0.14	15.84
Алинда 887	2.49	0.56	9.25

Все три системы уравнений в моделях интегрировались численно методом Эверхарта [23, 24] 19-го порядка с переменным шагом в компьютерной арифметике с точностью 10^{-19} на интервале времени 100 лет.

В качестве показателей эффективности модели были приняты ее точность и быстродействие. Точность моделирования (Δr) оценивалась известным методом прямого

¹Начальные параметры движения спутников были взяты из [19, 20, 21], а астероидов — из [22].

и обратного интегрирования [14]. Численная ошибка модели вычислялась по формуле

$$\Delta r = \max_{i=1,N} |\mathbf{x}_i^F - \mathbf{x}_i^B| + \max_{i=1,N} |\dot{\mathbf{x}}(t_i^F - t_i^B)|,$$

где F и B обозначают переменные полученные на одни и те же моменты независимой переменной при прямом и обратном интегрировании соответственно, а N — число моментов на интервале интегрирования. Для оценки точности модели в прямоугольных координатах второй член в формуле не учитывался.

В качестве меры быстродействия было принято число шагов интегрирования (NS), выполненных на всем исследуемом интервале. Характеристика NS удобна тем, что она не зависит ни от скорости процессора, ни от качества оптимизации программного обеспечения.

5.1 Моделирование возмущающих ускорений в спутниковой задаче

Возмущения кеплеровской орбиты спутника обусловлены, главным образом, несферичностью центральной планеты и гравитационным влиянием, Солнца и галилеевых спутников.

5.1.1 Несферичность центральной планеты

В модели движения спутника влияние несферичности центральной планеты учитывалось до второй зональной гармоники J_2

$$V_{J_2} = -\mu J_2 \frac{b^2}{r^3} L_2 \left(\frac{x_3}{r} \right), \quad (27)$$

где b — экваториальный радиус Юпитера, J_2 — коэффициент зональной гармоники (табл. 3), x_3 — третья компонента вектора положения, L_2 — полином Лежандра:

$$L_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1).$$

В соответствии с (27) возмущающие ускорения от несферичности вычислялись по формуле

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial V}{\partial x_1} = -\frac{3}{2} b^2 J_2 \mu x_1 \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2}{r^7}, \\ P_2 &= \frac{\partial V}{\partial x_2} = -\frac{3}{2} b^2 J_2 \mu x_2 \frac{x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2}{r^7}, \\ P_3 &= \frac{\partial V}{\partial x_3} = \frac{3}{2} b^2 J_2 \mu x_3 \frac{-3x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2}{r^7}. \end{aligned}$$

Табл. 3: Параметры гравитационного поля Юпитера

b (км)	J_2	k
71398	0.014736	$1.720209895 \cdot 10^{-2}$

5.1.2 Влияние Солнца и галилеевых спутников

Ввиду достаточной удаленности Солнца и малости размеров галилеевых спутников в модели они рассматриваются как точечные массы, а их гравитационное влияние на исследуемый спутник вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}_S = \mu_S \left(\frac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}}{\Delta^3} - \frac{\mathbf{x}_S}{r_S^3} \right), \quad (28)$$

где $\mu_S = k^2 M_S$, M_S — масса возмущающего тела, \mathbf{x}_S — положение возмущающего тела в йовецентрической системе координат, $\Delta = |\mathbf{x}_S - \mathbf{x}|$, $r_S = |\mathbf{x}_S|$. Массы галилеевых спутников приведены в табл. 4 и представлены в массах Юпитера.

Координаты \mathbf{x}_S Солнца и галилеевых спутников вычислялись по формулам кругового движения: для Солнца

$$\begin{aligned} x_{S1} &= r_S \cos n_S t, \\ x_{S2} &= r_S \sin n_S t \cos I, \\ x_{S3} &= r_S \sin n_S t \sin I, \end{aligned} \quad (29)$$

где $n_S = \sqrt{\mu_S / r_S^3} = \text{const}$, $\mu_S = k^2$, $r_S = 5.203$ а.е., а $I = 1.308^\circ$; для галилеевых спутников [21]

$$\begin{aligned} x_{S1} &= r_S \cos(n_S(t - T_J) + T_S), \\ x_{S2} &= r_S \sin(n_S(t - T_J) + T_S), \\ x_{S3} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где динамические параметры спутников r_S, n_S, T_S, T_J принимают значения, приведенные в табл. 4.

5.2 Моделирование возмущающих ускорений в астероидной задаче

В астероидной задаче учитывалось возмущенное влияние только от больших планет. Для вычисления возмущающих ускорений использовались формулы (28), а для определения координат планет — формулы (30), учитывая тот факт, что большинство

Табл. 4: Массы и динамические параметры планет и галилеевых спутников

Возм. тело	Масса	r_S (а.е.)	T_S (°)	n_S (°/сут.)	T_J (JD)
Солнце	1	—	—	—	—
Меркурий	1/6023600	0.4516	48.025	3.247	244960.05
Венера	1/408523.5	0.7282	-53.342	1.586	244960.05
Земля	1/328900.55	1.0083	-17.71	0.973	244960.05
Марс	1/3098710	1.5130	67.15	0.5295	244960.05
Юпитер	1/1047.35	5.4074	49.623	0.078	244960.05
Сатурн	1/3498	9.7138	-20.809	0.0325	244960.05
Уран	1/2296	19.672	-65.0077	0.01129	244960.05
Нептун	1/19314	30.176	-67.654	0.006	244960.05
Плутон	1/13 · 10 ⁷	29.796	57.519	0.006	244960.05
Ио	47.053 · 10 ⁻⁶	0.002819	149.57	203.485	2443000.5
Европа	78.043 · 10 ⁻⁶	0.004485	219.23	101.379	2443000.5
Ганимед	25.267 · 10 ⁻⁶	0.007155	164.06	50.317	2443000.5
Каллисто	56.683 · 10 ⁻⁶	0.012585	127.95	21.566	2443000.5

планет движутся по почти круговым эклиптическим орбитам. При использовании формулы (28) в астероидной задаче M_S — масса планеты, \mathbf{x}_S — гелиоцентрические координаты планеты. Массы планет даны в табл. 4 в массах Солнца.

Динамические параметры кругового движения были получены по реальным динамическим параметрам планет (табл. 4). В рамках поставленного эксперимента использование (приближенных) формул кругового движения (30) для вычисления положения планет как возмущающих тел вполне приемлемо.

5.3 Структура возмущений исследуемых орбит

Орбиты выбранных объектов представляют довольно широкий спектр возмущений.

Амальтея — типичный представитель близких спутников. Она с высокой угловой скоростью обращается около Юпитера в его мощном гравитационном поле, претерпевая значительное влияние несферичности центральной планеты.

Каллисто — наиболее удаленный от планеты галилеев спутник. Его орбита имеет сложную структуру возмущений, обусловленную, главным образом, гравитационным

влиянием от других трех массивных галилеевых спутников.

Гималия и Пасифе представляют внешние (далекие) спутники Юпитера (семейства Гималии и Пасифе). Орбиты этих спутников имеют достаточно большие периоды и заметно, но регулярно и гладко, возмущаются Солнцем.

Таутатис — особый астероид, имеющий высокоэксцентричную орбиту и в окрестности перигелия тесно сближающийся (на исследуемом интервале) с Землей, которая довольно сильно и нерегулярно возмущает его орбиту.

Астероид Бордовицына — представитель главного пояса астероидов, движущийся по "спокойной" орбите, умеренно возмущаемой большими планетами.

Особенность в движении Алинды состоит в том, что из-за значительной вытянутости его орбиты астероид в перигелии близко подходит к орбите Земли, а в афелии — к орбите Юпитера. Однако, несмотря на это, структура возмущений астероида довольно гладкая и, кроме того, "украшена" долгопериодическими возмущениями, обусловленными резонансом орбитальных движений Алинды с Юпитером.

Имея информацию о характере возмущений орбит представленных небесных объектов, можно предполагать, насколько для них будет высока эффективность метода Энке. Например, уже сейчас можно ожидать, что эффективность метода будет низкой для спутника Амальтея, поскольку его реальная орбита существенно отличается от кеплеровской, в основном, благодаря мощному влиянию сплюснутости Юпитера.

5.4 Метод Эверхарта

Ядром численной модели является процедура численного интегрирования уравнений, составленная на основе метода Эверхарта.

Рассмотрим метод Эверхарта на примере решения систем уравнений первого порядка:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (31)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad t_0 = 0.$$

Здесь \mathbf{x} — вектор интегрируемых переменных, t — независимая переменная, а \mathbf{f} — известная вектор-функция времени и переменных \mathbf{x} (правые части дифференциальных уравнений).

Пусть шаг интегрирования H , начальные значения \mathbf{x}_0 в начальный момент t_0 и $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)$ — известные величины.

Представим функцию \mathbf{f} в виде усеченного ряда по степеням t в окрестности $t_0 = 0$:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{A}_1 t + \mathbf{A}_2 t^2 + \dots + \mathbf{A}_N t^N. \quad (32)$$

Интегрируя уравнения (32) по независимой переменной, получим

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 t + \mathbf{A}_1 t^2/2 + \dots + \mathbf{A}_N t^{N+1}/(N+1). \quad (33)$$

Полином N -ой степени, стоящий в правой части (32), не является отрезком ряда Тейлора, поскольку коэффициенты \mathbf{A}_i вычисляются не по известным формулам коэффициентов ряда Тейлора, а определяются из условий наилучшего приближения \mathbf{x} в момент $T = t_0 + H$ конечными разложениями (33).

Выразим коэффициенты \mathbf{A}_i через разделенные разности. Для этого представим функцию \mathbf{f} в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t(t - t_1) + \alpha_3 t(t - t_1)(t - t_2) + \dots \quad (34)$$

В каждый момент независимой переменной t_i имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &\equiv \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t_1, \\ \mathbf{f}_2 &\equiv \mathbf{f}_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2(t_2 - t_1), \\ &\dots \end{aligned} \quad (35)$$

отсюда получим разделенные разности

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_0)/t_1, \\ \alpha_2 &= ((\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_0)/t_2 - \alpha_1)/(t_2 - t_1), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\alpha_3 = (((\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_0)/t_3 - \alpha_1)/(t_3 - t_1) - \alpha_2)/(t_3 - t_2), \quad (37)$$

...

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях t , выразим коэффициенты \mathbf{A}_i через α_i

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \alpha_1 + (-t_1)\alpha_2 + (t_2 t_3)\alpha_3 + \dots = c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + \dots, \\ \mathbf{A}_2 &= \alpha_2 + (-t_1 - t_3)\alpha_3 + \dots = c_{22}\alpha_2 + c_{32}\alpha_3 + \dots, \\ \mathbf{A}_3 &= \alpha_3 + \dots = c_{33}\alpha_3 + c_{43}\alpha_4 + \dots, \\ &\dots \end{aligned} \quad (38)$$

Для коэффициентов c_{ij} справедливы следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1, \\ c_{ij} &= -t_{i-1}c_{i-1,1}, \quad i > 1, \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} - t_{i-1}c_{i-1,j}, \quad 1 < j < i. \end{aligned} \quad (39)$$

Таким образом, нахождение решения уравнения (31) сводится, прежде всего, к нахождению узлов разбиения t_i шага H . Известно, что за счет выбора разбиения можно повысить порядок точности метода с $N + 1$ до $2(N + 1)$. Тогда значения узлов разбиения $t_i (i = 1, N - 1)$ будут совпадать с корнями полинома Лежандра $N - 1$ степени

$$P_{N-1}(2t/T - 1) = 0.$$

Значения \mathbf{x} в моменты t_i определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 t_1 + [\mathbf{A}_1 t_1^2/2 + \mathbf{A}_2 t_1^3/3 + \mathbf{A}_3 t_1^4/4 + \dots + \mathbf{A}_N t_1^{N+1}/(N + 1)], \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 t_2 + \mathbf{A}_1 t_2^2/2 + [\mathbf{A}_2 t_2^3/3 + \mathbf{A}_3 t_2^4/4 + \dots + \mathbf{A}_N t_2^{N+1}/(N + 1)], \\ \mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 t_3 + \mathbf{A}_1 t_3^2/2 + \mathbf{A}_2 t_3^3/3 + [\mathbf{A}_3 t_3^4/4 + \dots + \mathbf{A}_N t_3^{N+1}/(N + 1)], \\ &\dots \end{aligned} \quad (40)$$

Эти предсказующие уравнения служат для определения коэффициентов $\mathbf{A}_i (i = 1, N)$, а исправляющее уравнение

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}_0 T + \mathbf{A}_1 T^2/2 + \mathbf{A}_2 T^3/3 + \mathbf{A}_3 T^4/4 + \dots + \mathbf{A}_N T^{N+1}/(N + 1) \quad (41)$$

дает значение решения на конце шага H .

В алгоритмах Эверхарта контроль шага интегрирования осуществляется по величине последнего члена в разложении решения (41). Пусть L есть контрольный параметр, такой, что 10^{-L} есть требуемая точность вычислений. Введем величину h , определяемую соотношением

$$h = \frac{1}{N + 1} \left| \frac{\mathbf{A}_N}{T^{N+1}} \right|.$$

Новый шаг интегрирования H^* определяется формулой

$$H^* = (10^{-L}/h)^{\frac{1}{N+1}}.$$

Эффективность процесса численного интегрирования во многом зависит от того, насколько удачно осуществлен выбор начального шага. Для уравнений в нормализованном виде Эверхартом [24] в качестве такого шага предложена некоторая величина,

полученная путем экспериментальных расчетов. Для метода интегрирования порядка N она задается формулой

$$H_0 = \left(\frac{N}{11} \right) 0.5^{0.4L}.$$

Оптимальное значение параметра L определяется опытным путем в зависимости от типа интегрируемых дифференциальных уравнений. Если же L слишком мало, шаг может оказаться слишком большим и это ухудшит сходимость, а также точность метода. Если же L , наоборот, слишком велико, интегрирование будет выполняться точно, но метод будет неэффективен по затратам машинного времени.

5.5 Анализ результатов

Путем варьирования параметра интегратора L , отвечающего за выбор переменного шага интегрирования для каждого рассматриваемого объекта были получены характеристики точность-быстродействие на интервале времени 100 лет (50 лет прямого и 50 лет обратного интегрирования). Опорная орбита в уравнениях Энке исправлялась через каждый оборот объекта. Характеристики представлены на рис. 1–7.

Все характеристики (кроме Амальтеи) показывают, что применение метода Энке позволяет повысить точность интегрирования на 2 порядка и выше.

При большом шаге интегрирования (при малом NS) характеристики точности и быстродействия в SB-переменных и их возмущениях почти повторяют друг друга. Поскольку структура возмущений орбитального движения рассматриваемых объектов довольно сложная, по-видимому, оба метода при большом шаге не отслеживают изменений решения под действием возмущений.

Как и ожидалось, для Амальтеи метод Энке с кеплеровской орбитой не эффективен. И здесь необходимо применять другие опорные орбиты, которые бы так или иначе учитывали эффект сжатия Юпитера. Например, такие орбиты предлагаются в работах [9, 12, 13, 17].

Следует заметить, что в наших задачах выбор NS в качестве быстродействия численного моделирования не совсем корректен. Дело в том, что быстродействие численной модели зависит от: 1) эффективности численного метода; 2) регулярности орбиты и 3) сложности системы дифференциальных уравнений. Но показатель NS не учитывает 3), и поэтому оценки быстродействия SB-моделей по NS оказываются заниженными.

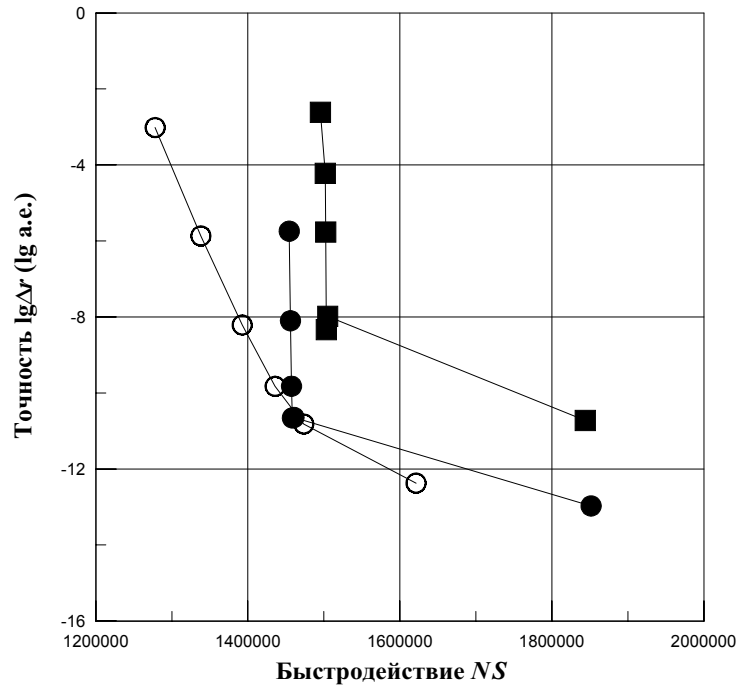


Рис. 1: Характеристики точность-быстродействие: ○ — в SB-возмущениях, ● — уравнения в SB-переменных и ■ — в прямоугольных координатах. Амальтея (73150 об.).

Судя по графикам, казалось бы, переход в SB-пространство повышает быстродействие численного интегрирования. На самом же деле, из-за повышения порядка и усложнения формы записи системы дифференциальных уравнений, быстродействие даже заметно понижается (примерно в 1.5 раза)².

Но показатель NS несомненно становится характеристикой быстродействия, пригодной для сравнения эффективности моделей с различными дифференциальными уравнениями, в задачах, где сложность уравнений определяется только сложностью возмущающих ускорений.

²Впрочем, порядок системы можно понизить, если исключить из нее уравнение второго порядка для радиуса-вектора r и вычислять его по координатам: $r = |\mathbf{x}|$

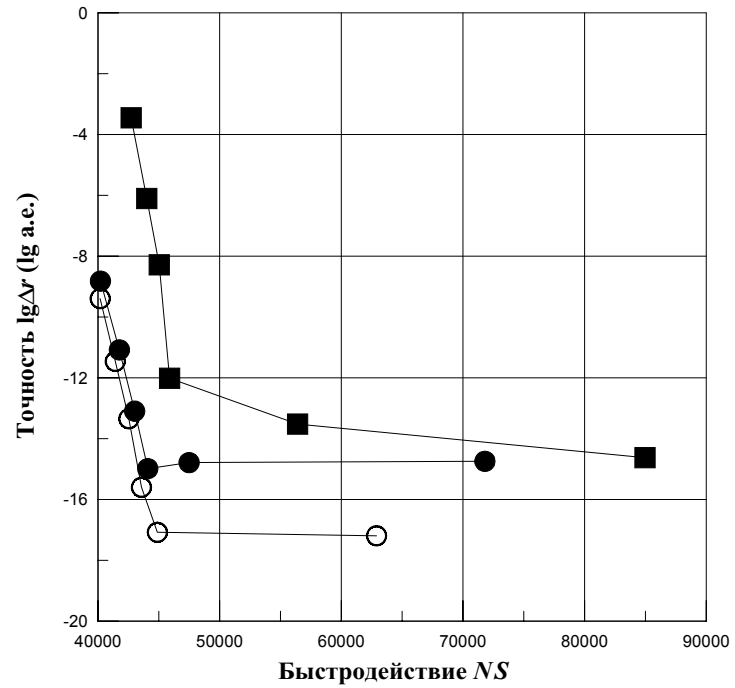


Рис. 2: То же, что и на рис. 1, но для Каллисто (2188 об.).

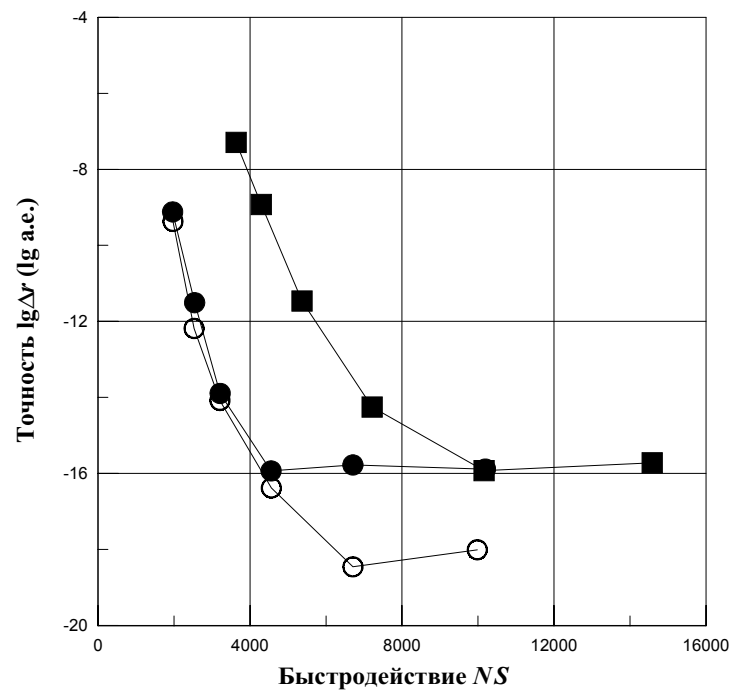


Рис. 3: То же, что и на рис. 1, но для Гималии (144 об.). В модели движения спутника влияние от несферичности Юпитера и Солнца не учитывались.

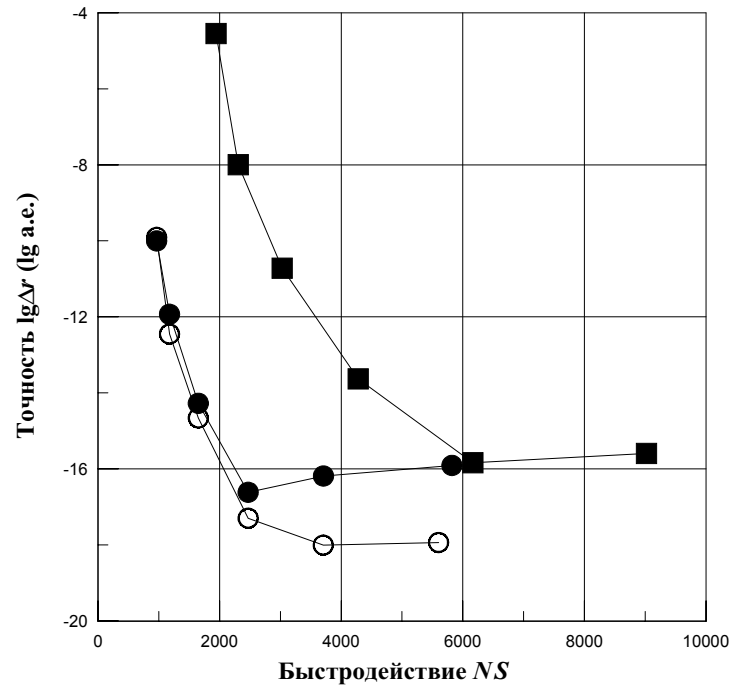


Рис. 4: То же, что и на рис. 1, но для Пасифе (50 об.). В модели движения спутника влияние от несферичности Юпитера и Солнца не учитывались.

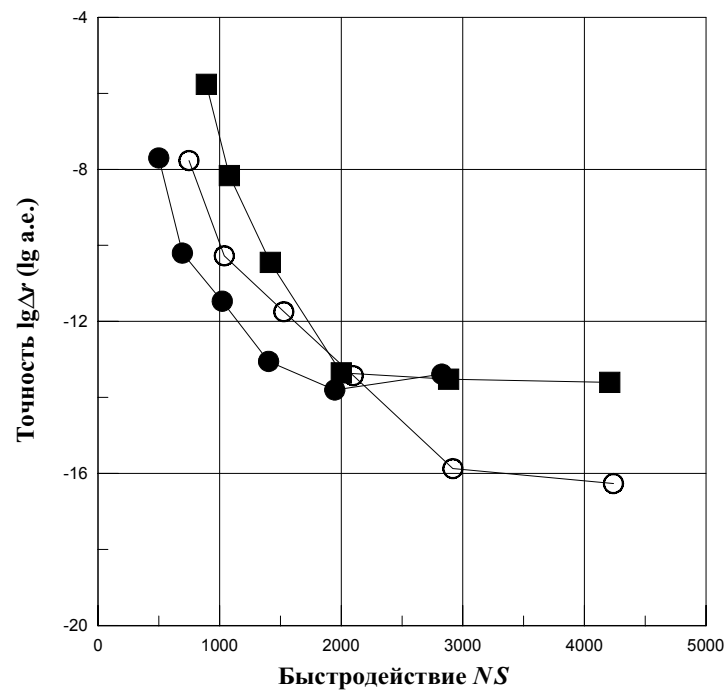


Рис. 5: То же, что и на рис. 1, но для Алинды (13 об.).

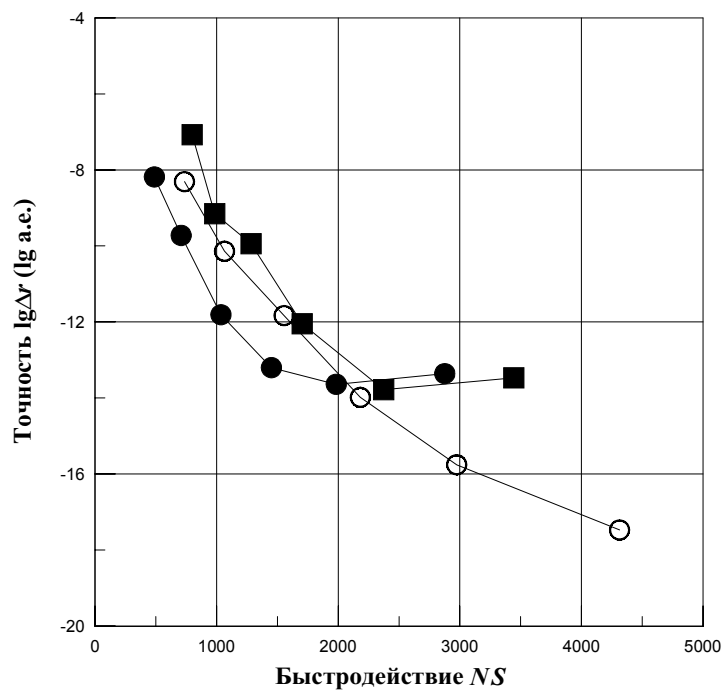


Рис. 6: То же, что и на рис. 1, но для Бордовицына (12 об.).

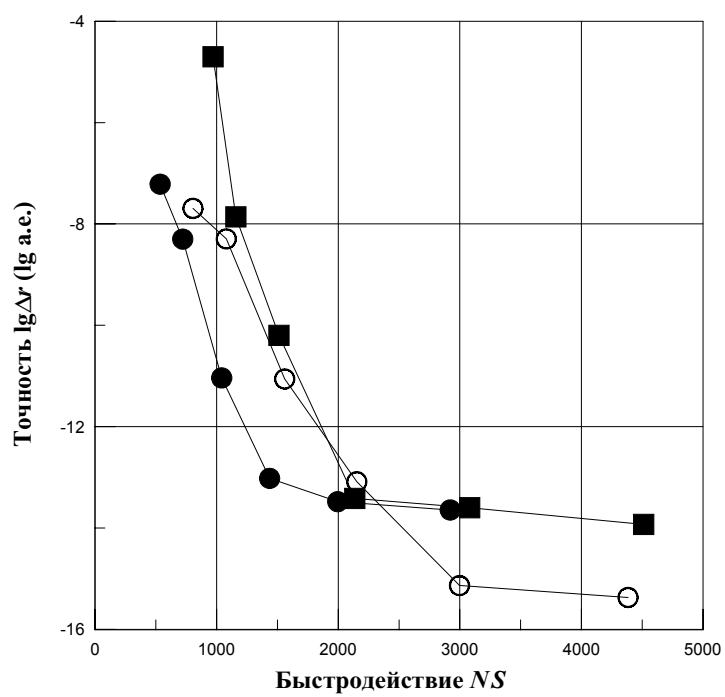


Рис. 7: То же, что и на рис. 1, но для Таутатис (13 об.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе получены следующие результаты.

1. Выведены дифференциальные уравнения Энке в переменных Шперлинга-Боде и разрешена проблема вычитания близких величин.
2. На основе уравнений в прямоугольных координатах, в SB-переменных и в SB-возмущениях были построены численные модели орбитального движения и исследована их эффективность в задачах динамики спутников и астероидов.
3. Полученные результаты показывают, что применение метода Энке позволяет повысить точность численного интегрирования на 2 порядка и выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Штифель Е., Шайфель Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука. 1975. - 304 с.
- [2] Szebehely V. Linearization of dynamical systems using integrals of the motion // *Cel. Mech.* V. 14. 1976. P. 499–508.
- [3] Шефер В. А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения с помощью интегралов // *Астрономический журнал*. 1998. Т. 68. Вып. 1. С. 197–205.
- [4] Шефер В. А. Линеаризация и регуляризация уравнений кеплеровского движения в четырехмерном параметрическом пространстве // *Астрономический журнал*. 1993. Т. 70. Вып. 5. С. 1113–1119.
- [5] Burdet C.A. Theory of Kepler Motion: The General Perturbed Two Body Problem // *Z. Angew. Math. Phys.* V. 19. 1968. P. 345–368.
- [6] Nacozy P.E. The Use of Integrals in Numerical Integrations of the N-Body Problem // *Astrophys. Space Sci.* V. 14. 1971. P.40–51.
- [7] Baumgarte J. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems // *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.* 1972. V. 1. P.1–16.
- [8] Encke J.F. Über eine neue Methode der Berechnung der Planetenstörungen // *Astron. Nachr.* 1852. B. 33. S. 377–398.
- [9] Kyner W.T., Bennett M.M. Modified Encke Special Perturbation Method // *Astron. J.* 1996. V. 71. P. 79–582.
- [10] Эскобал П. Методы астродинамики М.: Мир. 1971. С. 344.
- [11] Батраков Ю.В., Макарова Е.Н. Обобщенный метод Энке для изучения возмущенного движения // *Бюл. ИТА АН СССР.* / Л.: Наука. 1979. N. 14. С. 397–401.
- [12] Сорокин Н.А. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ в задаче двух неподвижных центров и их численное интегрирование // *Научные информации.* М.: Изд-во ИА АН СССР Издательство. 1991. Т. 69. С. 114–123.

- [13] Херрик С. Астродинамика. М.: Мир. 1977. Т. 2.
- [14] Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A. New trends in numerical simulation of the motion of small bodies of the solar system // *Cel. Mech. and Dyn. Astr.*
- [15] Рой А.Е. Движение по орбитам М.: Мир. 1981.
- [16] Fukushima T. Generalization of Encke's Method and Its Application to the Orbital and Rotational Motions of Celestial Bodies // *Astronomical Journal* V. 112. I. 3. 1996. P. 1263–1277.
- [17] Авдюшев В.А. Алгоритмы типа Энке в переменных Кустаанхеймо-Штифеля в задачах динамики астероидов и спутников планет. Диссертация на соискание научной степени канд. физ.-мат. наук. 1999. 110 с.
- [18] Silver M. A short derivation of the Sperling-Burdet equations // *Cel. Mech.* V. 11. 1975. P. 39–40.
- [19] Jacobson R.A. Revised Ephemerides of the Inner Jovian Satellites // *JPL IOM*. 1994. V. 314. P. 10–101.
- [20] Lieske J.H. Galilean Satellites Ephemerides E-5 // *Astron. Astrophys.* 1998. V. 129. P. 205–217.
- [21] Rohde J.R., Sinclair A. Orbital Ephemerides and Rings of Satellites // *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. 1992. P. 325–381.
- [22] Эфемериды малых планет на 1994 год / под ред. Батракова Ю. В. СПб.: ИТА РАН. 1993. С. 552.
- [23] Everhart E. Implicit Single-Sequence Methods for Integrating Orbits // *Cel. Mech.* 1974. V. 10. P. 35–55.
- [24] Everhart E. On Efficient Integrator of Very High Order and Accuracy with Appendix Listing of RADAU // *Denver., Univ. of Denver*. 1974. P. 20.
- [25] Астрономический ежегодник на 1996 год. Часть I. Эфемериды Солнца, Луны и планет. / под ред. Абалкин В.К.. СПб.: ИТА РАН. 1995. С. 416.
- [26] Rocher P., Chapront J. Observations and Ephemerides of the Faint Satellites of Jupiter. // *Astron. Astrophys.* V. 311. 1996. P. 710–714.