

УДК 521.1

Н.С. ЦЫРЕМПИЛОВА, В.А. АДЮШЕВ, М.А. БАНЬЩИКОВА

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ СПУТНИКОВОЙ ДИНАМИКИ¹

Представлены результаты исследования некоторых итерационных методов решения обратных задач спутниковой динамики.

Ключевые слова: обратная задача, целевая функция, орбита, овражная задача.

Введение

Определение орбитальных параметров небесных тел из наблюдений является одним из основных этапов моделирования орбитального движения. Как правило, орбиты определяются в рамках задачи наименьших квадратов, которая состоит в минимизации по параметрам некоторой целевой функции, характеризующей близость наблюдаемых данных и их модельных представлений. В свою очередь, для минимизации целевой функции обычно применяются итерационные методы типа Гаусса – Ньютона, которые при хороших приближениях начальных параметров сходятся достаточно быстро. Однако, если начальные приближения грубые, а поведение целевой функции относительно параметров сложное, эффективность этих методов может быть довольно низкой, более того, итерационный процесс может быть вообще расходящийся. В этом случае необходимо прибегать к иным методам для определения орбитальных параметров.

При численном моделировании движения спутников Марса, Фобоса и Деймоса встал вопрос: какие итерационные методы необходимо использовать для эффективного определения спутниковых орбит. Вопрос этот весьма актуален даже при использовании современных компьютеров, поскольку каждая итерация предполагает долгосрочное численное моделирование (на основе пошагового интегрирования), которое может занимать до нескольких часов.

Цель данной работы заключалась в исследовании эффективности следующих итерационных методов:

- 1) метода наискорейшего градиентного спуска [3];
- 2) метода Гаусса – Ньютона;
- 3) демпфированного метода Гаусса – Ньютона;
- 4) модифицированного метода Левенберга – Марквардта;
- 5) составного метода [1, 2];
- 6) метода Хойна (Рунге – Кутты второго порядка).

Перечисленные методы использовались для поиска решения обратной задачи применительно к определению плоской круговой орбиты в рамках кеплеровской орбитальной модели при различных распределениях наблюдений.

1. Обратная задача орбитальной динамики

Обратная задача орбитальной динамики состоит в определении орбитальных параметров из астрометрических наблюдений в рамках выбранной модели. Пусть имеем J наблюдаемых положений p_i^O в двумерном пространстве на моменты времени t_i ($i = 1, \dots, J$). Требуется по наблюдениям p_i^O определить K орбитальных параметров q кеплеровской модели $p^C = p^C(t, q)$. Обратная задача состоит в минимизации следующей целевой функции:

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., госконтракт № П1247 от 27.08.2009 г.

$$S(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^J \|\mathbf{p}_i^O - \mathbf{p}_i^C\|^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$.

Минимум функции (1) находится из необходимого условия экстремума:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} = -2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C)^T \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} = 0. \quad (2)$$

Система уравнений (2) не линейна, и поэтому на практике для её решения прибегают к итерационным методам, которые будут изложены ниже.

2. Методы решения обратной задачи

Для решения системы уравнений (2) обычно прибегают к итерационным методам типа Ньютона, где привлекаются вторые производные $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$ или их приближения в качестве дополнительной информации, уточняющей локальное поведение целевой функции. Согласно итерационной схеме Ньютона, поправка к текущему приближению \mathbf{q} определяется как

$$\Delta \mathbf{q} = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} \right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \right)^T,$$

где $\partial^2 S / \partial \mathbf{q}^2$ – матрица Гессе:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}^2} = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}} - 2(\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}^2}. \quad (3)$$

Метод Гаусса–Ньютона (GN)

Ввиду проблематичности вычисления вторых производных в (3) на практике их опускают и, таким образом, используют упрощенную схему метода Гаусса – Ньютона. Метод Гаусса – Ньютона – это модификация метода Ньютона, где исключаются вторые изохронные производные от модельных представлений наблюдений по параметрам. Поправки итерационной схемы метода определяются по формуле

$$\Delta \mathbf{q} = -\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{G}, \quad (4)$$

где $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ – нормальная матрица, которая в минимуме $S(\mathbf{q})$ при достаточно малых невязках $\mathbf{B} = \mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C$ близка к матрице Гессе, а $\mathbf{G} = -\mathbf{A}^T \mathbf{B}$ – градиент функции S по \mathbf{q} , где $\mathbf{A} = \partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$.

Несмотря на такое упрощение, метод Гаусса – Ньютона (как и метод Ньютона) при достаточно хороших приближениях очень быстро сходится, поэтому часто используется на практике для определения орбит. Однако он наследует и недостатки исходного метода, и при грубых начальных приближениях метод Гаусса – Ньютона может вовсе расходиться. Для разрешения этой трудности на практике, как правило, прибегают либо к модифицированным методам Гаусса – Ньютона, либо к составным методам.

Метод наискорейшего градиентного спуска (G)

С целью достижения быстрой сходимости итерационного процесса можно совместно с методом Гаусса – Ньютона последовательно использовать метод наискорейшего градиентного спуска. В нашем случае в начале применяется метод градиентного спуска, а уже при малых значениях целевой функции включается метод Гаусса – Ньютона. Метод наискорейшего градиентного спуска – это известный метод, в котором каждое следующее приближение находится вдоль градиента \mathbf{G} , а шаг выбирается так, чтобы он минимизировал целевую функцию (1). Поправки метода вычисляются по формуле

$$\Delta \mathbf{q} = - \frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}{\mathbf{Q} \mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \mathbf{G}. \quad (5)$$

В окрестности минимума целевой функции метод градиентного спуска уступает методу Гаусса – Ньютона по эффективности. Однако область сходимости у него существенно больше.

Демпфированный метод Гаусса – Ньютона (DGN)

Демпфирование – это модификация метода Гаусса – Ньютона, которая состоит в уменьшении величины его поправок:

$$\Delta q = -hQ^{-1}G, \quad (6)$$

где $0 < h < 1$.

Демпфирование позволяет существенно увеличить область сходимости метода Гаусса–Ньютона. Такой подход практически всегда обеспечивает сходимость итерационного процесса при определенном выборе h . С другой стороны, очевидно, что уменьшение шага приводит к понижению скорости сходимости, в особенности когда начальное приближение достаточно далеко от минимума целевой функции. Кроме того, следует заметить, что эффективность метода непосредственно зависит от того, насколько удачно будут выбираться множители h на каждом шаге итерационного процесса.

Метод Левенберга – Марквардта (LMM)

Метод Левенберга – Марквардта – это, по сути, также модификация (демпфированного) метода Гаусса – Ньютона, которая состоит в увеличении диагональных элементов нормальной матрицы путем умножения их на коэффициент $1 + h^*$:

$$\Delta q = -h(Q + h^*E)^{-1}G, \quad (7)$$

где $0 < h < 1, 0 < h^* < \infty$; E – единичная матрица.

Итерационный процесс начинается с больших значений h^* , которые в дальнейшем уменьшаются до нуля. Большие значения коэффициента обеспечивают сходимость итераций при грубых начальных приближениях, как и для метода градиентного спуска. В то же время по мере уменьшения коэффициента метод вырождается в обычный метод Гаусса – Ньютона. Главным недостатком метода является неясная стратегия выбора оптимальных параметров в общем случае.

Составной метод (COMP)

Составной метод предполагает последовательное использование известных методов спуска, метода наискорейшего градиентного спуска и метода Гаусса – Ньютона. При определении спутниковых орбит из наблюдений, распределенных на длительном временном интервале, обратные задачи становятся овражными. Формально овражность обнаруживается в значениях (неотрицательных) собственных чисел нормальной матрицы Q . Целевая функция в окрестности минимума ведет себя как многомерный эллиптический параболоид, а ее поверхности постоянных значений близки к эллипсоидам. Число обусловленности $\text{cond } Q$ как отношение максимального собственного числа к минимальному определяет степень овражности целевой функции. Большое число обусловленности сигнализирует о сильной овражности. Фактически, это означает, что существуют такие направления в параметрическом пространстве, вдоль которых целевая функция меняется чрезвычайно медленно. В данной работе целевая функция в случае овражной задачи ведет себя так, как показано на рис. 1.

Известно, что вдоль оврага слабо меняется частотная переменная типа большой полуоси, орбитального периода или энергии. Эту информацию можно использовать для удерживания решения на дне оврага.

В процессе использования схемы (5) приближенное решение достаточно быстро (за несколько итераций) сваливается на дно оврага S , но в дальнейшем очень медленно сходится к минимуму S . На этом этапе можно было бы воспользоваться методом Гаусса – Ньютона. Однако, как показывает практика, если приближенное решение оказывается довольно далеко от минимума целевой функции, схема (4) будет давать такие поправки, которые способны выкинуть решение из области сходимости метода.

Как отмечалось выше, вдоль оврага S частотная переменная почти постоянна, поэтому схема градиентного спуска позволяет очень быстро получить уже достаточно хорошую ее оценку. Сле-

довательно, для дальнейшей минимизации целевой функции необходимо учитывать эту особенность и выполнять итерационный процесс с налагаемыми ограничениями, с тем чтобы сохранялось значение частотной переменной.

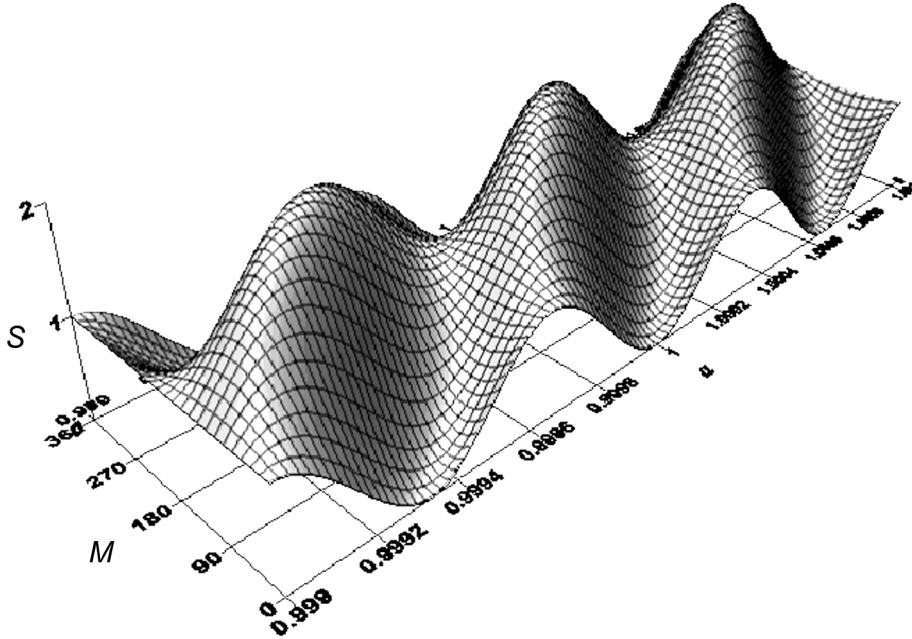


Рис. 1. Поведение целевой функции в случае двух групп наблюдений, распределенных на длительном интервале времени

В качестве такого ограничения принимается полная энергия $H(q)$. Предлагается использовать проекционный метод, который исправляет решение метода Гаусса – Ньютона за его отклонение от опорного значения кеплеровской энергии $H(q)$.

В общем случае налагаемое ограничение определяет множество поправок, однако из них целесообразно использовать лишь ортогональную проекцию приближенного решения (4) на поверхность $H(q)$. Алгоритмически это возможно по следующей итерационной схеме

$$\Delta q_{i+1} = \Delta q_i - \frac{H(q + \Delta q_i) - H(q)}{\mathbf{G}_H \cdot \mathbf{G}_H}, \quad (8)$$

где $\mathbf{G}_H = \partial H / \partial q$, а Δq_0 определяется по схеме Гаусса – Ньютона.

Метод Хойна (Н)

В качестве метода минимизации был рассмотрен также метод Хойна [7]. Он применялся для интегрирования дифференциального уравнения, описывающего траекторию спуска: $q' = f = Q^{-1}G$. Поправки к приближенному решению пошагового интегрирования вычислялись как

$$\Delta q = \frac{1}{2} h [f(q) + f(q + hf(q))].$$

Ожидалось, что данный метод позволит повысить эффективность демпфированного метода Гаусса – Ньютона (4).

3. Численные результаты

Представленные методы применялись для определения плоской кеплеровой орбиты по модельным наблюдениям, соответствующим круговой орбите единичного радиуса, как если бы она располагалась перпендикулярно направлению от наблюдателя к центральному телу. Естественно, что в реальности орбитальная плоскость спутников ориентирована неперпендикулярно к наблюда-

телю, однако предварительные исследования показали, что характерные особенности в поведении целевой функции зависят не столько от наклона орбиты, сколько от длины наблюдаемой орбитальной дуги.

Таким образом, определялись четыре параметра: две координаты и их скорости на начальный момент времени. Эффективность методов исследовалась в трех случаях распределения наблюдений на круговой орбите единичного радиуса:

- 1) на короткой дуге (1/8 об) (рис. 2);
- 2) на условно умеренном интервале времени с равномерным распределением наблюдений (100 наблюдений на 10 об) (рис. 3);
- 3) на длительном интервале времени, соответствующем 1000 об, с двумя группами наблюдений на его концах (рис. 4).

Первая задача характерна для объектов (астероидов и спутников), наблюдаемых в одном появлении, вторая – для объектов с богатой хронологией наблюдений, а третья – для близких спутников, которые наблюдаются время от времени.

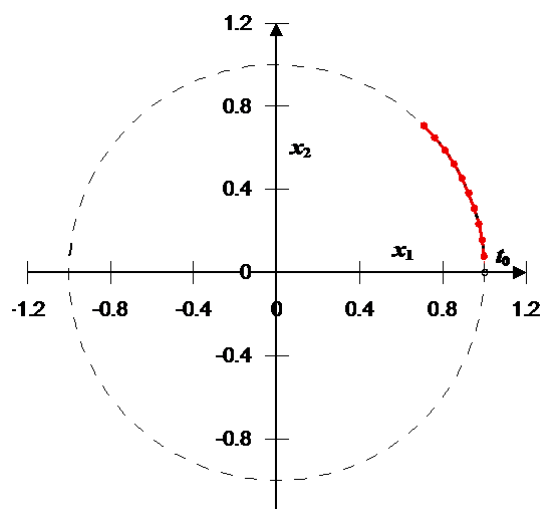


Рис. 2. Распределение наблюдений на короткой дуге

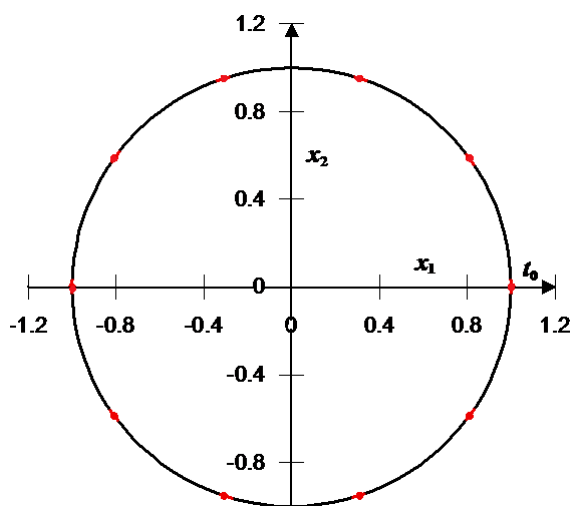


Рис. 3. Равномерное распределение наблюдений на умеренном временном интервале

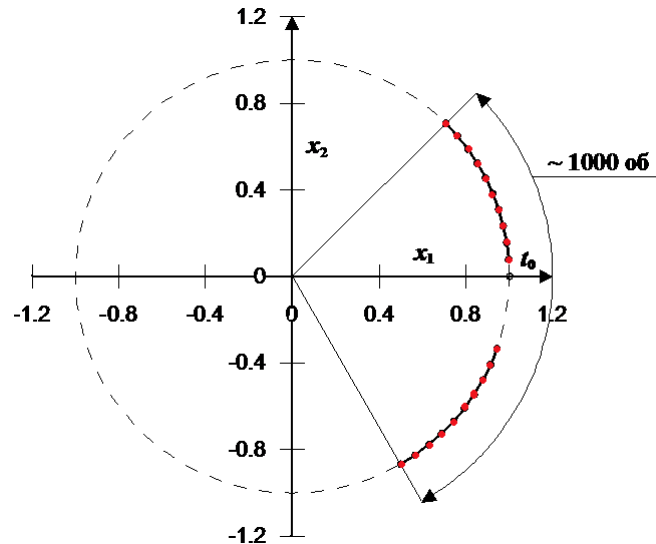


Рис. 4. Две группы наблюдений, распределенных на длительном интервале времени

В качестве показателя эффективности рассматривалось количество итераций (N), выполненных до сходимости с точностью 10^{-12} . Для каждого случая опытным путем была выработана стратегия выбора переменных параметров h и h^* в методах (4) и (5) (табл. 1) для повышения эффективности. В табл. 1 и 2 представлены численные результаты для каждого рассмотренного метода применительно к трем задачам соответственно. В этих таблицах знак « \times » означает, что метод GN не достигал сходимости ни для одного из случаев, знак « \rightarrow » означает, что метод Хойна не использовался в первом случае.

Таблица 1

Выбор параметров h и h^*

I	DGN	$H = 0,6 \cdot 1,1^i$
	LMM	$H = 0,6 \cdot 1,16^i$; $h^* = 10^3/50^i$
II	DGN	$H = 10^{-3} \cdot 1,02^i$
	LMM	$H = 10^{-3} \cdot 1,02^i$; $h^* = 10^3/50^i$
III	DGN	$H = 10^{-3} \cdot 1,01^i$
	LMM	$H = 10^{-3} \cdot 1,001^i$; $h^* = 10^3/1,001^i$

Сходимость методов исследовалась для довольно грубых начальных приближений, которые подбирались в результате предварительного изучения поведения целевой функции относительно параметров. Мониторинг итерационного процесса проводился в плоскости (a, e) .

Таблица 2

Характеристики быстродействия методов

Методы	N		
	I	II	III
GN	\times	\times	\times
G	570	$> 10^5$	$> 10^5$
DGN*	8	321	5636
LMM**	8	175	5610
COMP	10	14	11
CH	-	13	3871

Из таблиц видно, что итерационный процесс для метода GN не достигал сходимости ни для одного из рассмотренных случаев. Несмотря на то, что сходимость для метода градиентного спуска имела место во всех случаях, достигалась она при чрезвычайно низком быстродействии.

Демпфированные методы (DGN и LMM) демонстрируют более высокую эффективность, однако при определении орбит по наблюдениям, распределенных на длительном интервале времени, она остается еще довольно низкой, что связано со сложной (овражной) топографией целевой функции.

Очень высокая эффективность имеет место при использовании составного метода: независимо от сложности обратной задачи для сходимости итерационного процесса метод требует порядка десятка итераций.

Наконец, метод Хойна улучшает свойства сходимости демпфированных методов, но только лишь в случае наблюдений, распределенных на умеренно длинной орбитальной дуге.

Траектории сходимости для каждого случая представлены на рис. 5–7 соответственно.

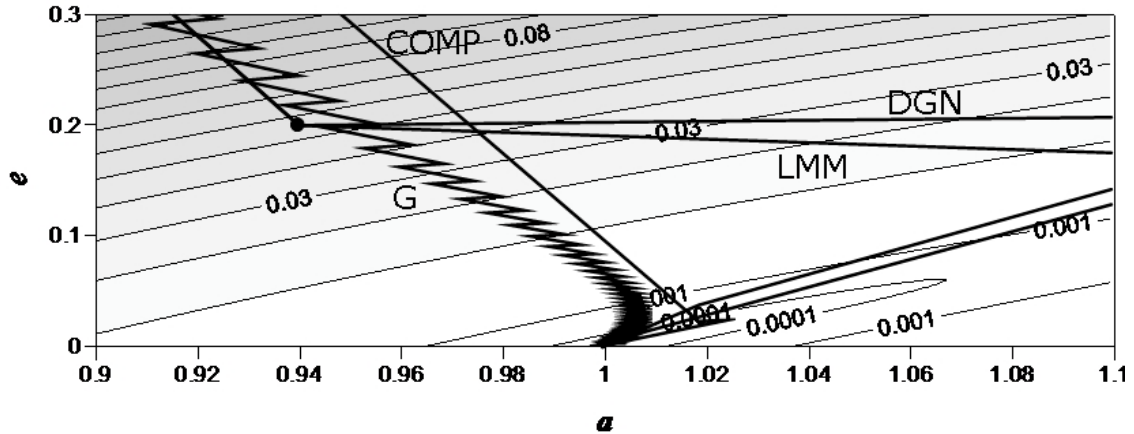


Рис. 5. Сходимость методов G, DGN, LMM и COMP в случае короткой дуги

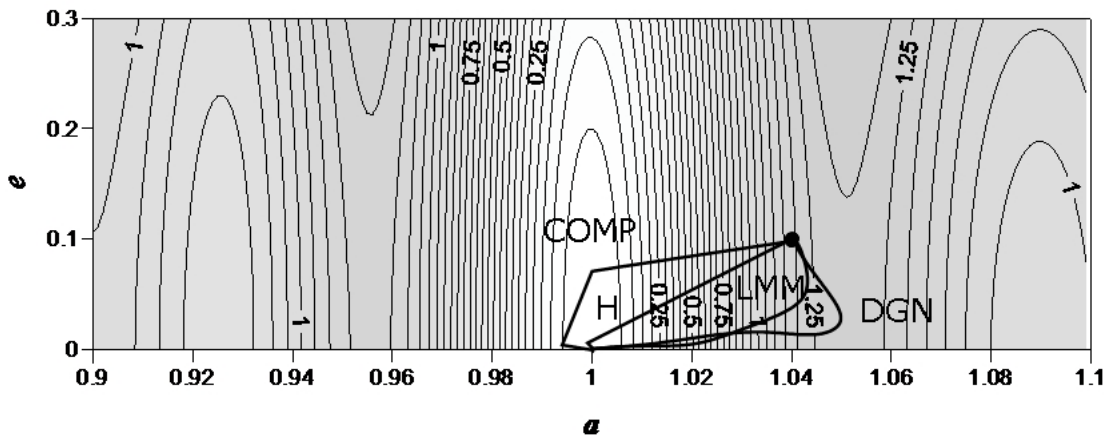


Рис. 6. Сходимость методов DGN, H, LMM и COMP в случае равномерного распределения наблюдений на умеренном интервале времени

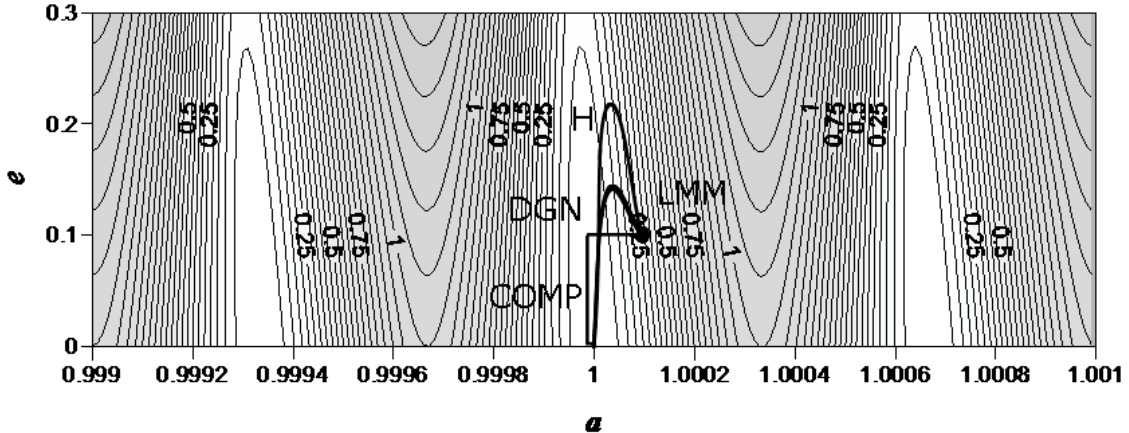


Рис. 7. Сходимость методов DGN, H, LMM и COMP в случае двух групп наблюдений через 1000 об

Заключение

В процессе решения данной задачи исследовалась эффективность некоторых итерационных методов улучшения орбитальных параметров. Все они применялись для плоской кеплеровской орбиты и рассматривались в трех случаях распределения наблюдений на орбите.

Таким образом, было осуществлено сравнение эффективности рассмотренных методов применительно к трем поставленным задачам. Полученные численные результаты позволили сделать следующие выводы. Если объект наблюдается на короткой дуге, достаточно использовать метод Гаусса – Ньютона. Если он не сходится, целесообразно прибегнуть к демпфированию, что в данном случае обеспечивает сходимость при незначительном понижении быстродействия. Когда объект определяется по немногочисленному составу наблюдений, рассредоточенных на длительном интервале времени, обратная задача становится овражной и для ее решения необходимо прибегать к составному подходу. Данный подход позволяет минимизировать целевую функцию с высокой точностью всего за несколько десятков итераций даже при плохих начальных приближениях. Также при многочисленном составе наблюдений вместо демпфированного метода Гаусса – Ньютона можно использовать метод Хойна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. – Томск: НТЛ, 2010. – 282 с.
2. Авдюшев В.А., Баньщикова М.А. // Астрон. вестн. – 2008. – Т. 42. – Вып. 4. – С. 317–340.
3. Аттетков А.В., Галкин С.В., Зарубин В.С. Методы оптимизации. – М.: Изд-во МГТУ, 2001. – 439 с.
4. Бэттин Р. Наведение в космосе. – М.: Машиностроение, 1966. – 448 с.
5. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1968. – 800 с.
6. Себекей В. Теория орбит. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
7. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.

Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
E-mail: mba-tomsk@mail.ru

Поступила в редакцию 02.06.11.

ITERATIVE METHODS OF ORBIT DETERMINATION IN INVERSE PROBLEMS OF SATELLITE DYNAMICS

N.S. TSYREMPILOVA, V.A. AVDUYSHEV, M.A. BAN'SCHIKOVA

Tomsk State University, Tomsk Russia

In the paper the results of investigation of some iterative methods for solving inverse problems of satellite dynamics are presented.

Цыремпилова Наталья Сергеевна, студентка ФФ;

Авдюшев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., ст. науч. сотр. НИИ ПММ ТГУ;

Баньщикова Мария Александровна, к.ф.-м.н., ст. науч. сотр. НИИ ПММ ТГУ.