КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РУНГЕ–КУТТЫ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

В середине прошлого века было обнаружено, что многие неявные методы Рунге–Кутты являются коллокационными. Это означает, что приближенное решение метода может быть представлено в виде многочлена, который определяется из так называемых условий коллокации, т.е. он должен удовлетворять дифференциальному уравнению лишь в некоторых точках и, кроме того, конечно же, должен удовлетворять начальному условию.

Условия коллокации позволяют построить интерполяцию для производной от многочлена. Интегрируя интерполяционную формулу, мы получаем сам многочлен и соответственно приближенное решение на шаге.

Эта идея на самом деле не столь уж оригинальна, поскольку еще даже до появления методов Рунге–Кутты она применялась для построения многошаговых схем интегрирования Адамса и фактически для получения квадратурных формул Ньютона–Котеса.

Как видно, коллокационный метод является методом Рунге–Кутты, где его коэффициенты, однако, выражаются через интегралы.

Коллокационными были первые простые и хорошо известные методы Рунге–Кутты: например, методы Эйлера, метод средней точки или трапеций.

Если мы используем интерполяцию Лагранжа, то непосредственно в чистом виде получаем метод Рунге–Кутты. Почти все коллокационные методы неявные, поэтому коэффициенты приближенного решения, а именно правые части в точках коллокации, находятся итерационно. Сначала задаются начальные приближенния коэффициентов, по ним определяются коллокационные решения на шаге, по которым снова получаются коэффициенты, и так далее до сходимости итерационного процесса. Затем формируется решение на конце шага.

Полиномиальная интерполяция может быть иной. Например, если мы воспользуемся каноническим полиномом, то получим не что иное, как схему интегрирования Эверхарта. Это тоже неявный метод Рунге–Кутты, однако решение формируется уже посредством коэффициентов полинома, которые прямо связаны с правыми частями. Впрочем, итерационный процесс для нахождения коэффициентов заметно усложняется.

Можно также воспользоваться ньютоновской интерполяцией, тогда будем иметь следующую схему интегрирования. Если использовать интерполяцию полиномами Чебышева, то получим широко известный чебышевский интегратор.

Поскольку коэффициенты решения находятся итерационно, для них требуются начальные приближения. Определяются они путем продолжения интерполяционного полинома на следующий шаг, что дает достаточно хороший предиктор.

В общем случае коллокационный метод имеет порядок, равный числу условий коллокаций. Однако Джон Бутчер показал, что если коллокационный метод строить на разбиении Гаусса–Лежандра, то порядок повышается вдвое. Можно использовать другие гауссовы разбиения, например, Радо или Лобатто, но тогда порядки методов будут соответственно на один, два ниже.

Впрочем, в гауссовых методах возникает сложность с выбором переменного шага для обеспечения заданной локальной точности, поскольку практически невозможно получить оценку реальной точности. Например, в методе Эверхарта, который также является гауссовым, точность оценивается по старшему члену коллокационного полинома, который почти совпадает с соответствующим членом ряда Тейлора. Однако порядок его существенно ниже, нежели порядок гауссова метода. Таким образом, выбираемый шаг будет обеспечивать локальную точность гораздо выше требуемой.

Интересный вопрос: а насколько могут быть эффективны коллокационные методы в задачах небесной механики? Я взял шесть популярных интеграторов: (имп.) Рассмотрим пока эффективность интеграторов на примере задачи двух тел.

На рисунке представлены характеристики точность–быстродействие для каждого метода. Как мы видим, в круговой задаче эффективность коллокационного метода Эверхарта далеко не самая высокая. Он уступает многошаговым методам, а также симплектическому. Высокая эффективность многошаговых методов объясняется прежде всего тем, что они требуют меньше обращений к правым частям уравнений, нежели Эверхарт, а симплектический метод просто улучшает поведение глобальной ошибки. Впрочем, следует заметить, что вычислительные ошибки для Эверхарта существенно меньше. Сумасшедшая эффективность же для метода Куинлэна–

Тремейна — это следствие его геометрических свойств, которые также благоприятно сказываются на точности.

Однако как только мы переходим к эллиптическому движению, эффективность конкурентов существенно падает, она становится сравнимой с эффективностью коллокационного метода Эверхарта.

Что касается сильно возмущенных задач, то лишь только метод Адамса может составлять конкуренцию методу Эверхарта.

МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ЗАДАЧА КОШИ

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

КОЛЛОКАЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН

$$\mathbf{g}'(t_0 + hc_i) = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{g}(t_0 + hc_i)) = \mathbf{f}_i \quad (i = 1,\ldots,s),$$
$$\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(t_0 + h)$$

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j l_j(\tau), \quad l_j(\tau) = \prod_{m\neq j} \frac{\tau - c_m}{c_j - c_m}$$

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j \int_0^1 l_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$
$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j \int_0^{c_i} l_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$$

ЗАДАЧА КОШИ

МЕТОД АДАМСА

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{x}_s = \mathbf{x}_{s-1} + \int_{t_{s-1}}^{t_s} \mathbf{g}'(t)\,\mathrm{d}t$$

…$= \mathbf{x}(t_0)$

…МНОГОЧЛЕН

…$)) = \mathbf{f}_i \quad (i = 1,\ldots,s),$

…$\mathbf{g}(t_0 + h)$

$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s}$…

КВАДРАТУРА НЬЮТОНА–КОТЕСА

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{f}(t)\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \int_{t_0}^{t_0+h} \mathbf{g}'(t)\,\mathrm{d}t$$

ПРИБЛИ…

$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum$…

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j \int_0^{c_i} l_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau)$$

К. Рунге

М. Кутта

СХЕМА РУНГЕ–КУТТЫ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{f}_j,$$
$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{f}_j)$$
$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad b_j = \int_0^1 l_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ПРОСТЫЕ КОЛЛОКАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

МЕТОДЫ ЭЙЛЕРА

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_0, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_1$$

МЕТОД СРЕДНЕЙ ТОЧКИ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}_{1/2}$$

МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \tfrac{1}{2}h(\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1)$$

СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j l_j(\tau)$$

СХЕМА РУНГЕ–КУТТЫ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j \mathbf{f}_j, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{y}_i)$$
$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\mathbf{f}_j$$

ИТЕРАЦИИ

$$\bar{\mathbf{f}} \to \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{f} \to \mathbf{x}$$

СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

КАНОНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{a}_j \tau^{j-1}$$

Э. Эверхарт

СХЕМА ЭВЕРХАРТА

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \frac{\mathbf{a}_j}{j}$$
$$+ h\sum_{j=1}^{s} \frac{\mathbf{a}_j}{j} c_i^j, \quad \sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j b_{ij} = \mathbf{a}_i$$

ИТЕРАЦИИ

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{f} & \to & \mathbf{a} & \to \mathbf{x} \\ & \uparrow & \swarrow & & \\ \bar{\mathbf{a}} \to & \mathbf{y} & & & \end{array}$$

СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НЬЮТОНА

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\alpha}_j \prod_{i=1}^{j-1} (\tau - c_i)$$

СХЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\alpha}_j \int_0^1 \prod_{i=1}^{j-1} (\tau - c_i)\,\mathrm{d}\tau$$

ИТЕРАЦИИ

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{f} & \to & \boldsymbol{\alpha} & \to \mathbf{x} \\ & \uparrow & \swarrow & & \\ \bar{\boldsymbol{\alpha}} \to & \mathbf{y} & & & \end{array}$$

СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЧЕБЫШЕВА

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\beta}_j T_{j-1}(\tau)$$

СХЕМА ЧЕБЫШЕВА

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \boldsymbol{\beta}_j \int_0^1 T_{j-1}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

ИТЕРАЦИИ

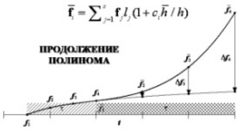
$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{f} & \to & \boldsymbol{\beta} & \to \mathbf{x} \\ & \uparrow & \swarrow & & \\ \bar{\boldsymbol{\beta}} \to & \mathbf{y} & & & \end{array}$$

ПРЕДИКТОР

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{f}_j l_j (1 + c_i \bar{h} / h)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПОЛИНОМА



Дж. Бутчер

МЕТОДЫ ГАУССА

РАЗБИЕНИЕ ЛЕЖАНДРА

$$c_1,\ldots,c_s \;\to\; p = 2s$$
$$\uparrow$$
$$\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}t^s}[\tau^s(\tau-1)^s] = 0$$

Е РАДО

$$p = 2s - 1$$
$$\frac{\mathrm{d}^{s-1}}{\mathrm{d}t^{s-1}}[\tau^s(\tau-1)^{s-1}] = 0$$

РАЗБИЕНИЕ ЛОБАТТО

$$p = 2s - 2$$
$$\frac{\mathrm{d}^{s-2}}{\mathrm{d}t^{s-2}}[\tau^{s-1}(\tau-1)^{s-1}] = 0$$

МЕТОДЫ ГАУССА

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\sum_{j=1}^{s} \frac{\mathbf{a}_j}{j} \;\to\; \|\mathbf{e}\|_{cal} = h\frac{\|\mathbf{a}_s\|}{s}, \quad \mathbf{a}_s = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \mathbf{f}_j$$

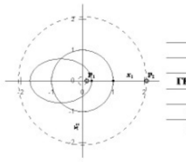
ВЫБОР ШАГА

$$\bar{h} = h\left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}}\right)^{\frac{1}{s}}$$

ПРОБЛЕМА

$$p = \begin{cases} 2s - 2 & \text{(Lobatto)} \\ 2s - 1 & \text{(Radau)} \\ 2s & \text{(Legendre)} \end{cases} \quad \leftarrow \; \bar{h} \;\; \text{for} \;\; p = s - 1$$

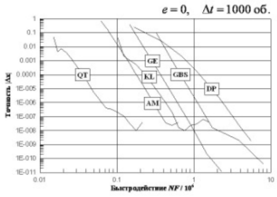
ЭФФЕКТИВНОСТЬ



МЕТОДЫ (8-го порядка)	
ДОРМАНА–ПРИНСА	DP
ГАУССА–ЭВЕРХАРТА	GE
ГРЭГГА–БУЛИРША–ШТЕРА	GBS
АДАМСА–МУЛЬТОНА	AM
КАХАНА–ЛИ (ЙОШИДЫ)	KL
КУИНЛЭНА–ТРЕМЕЙНА	QT

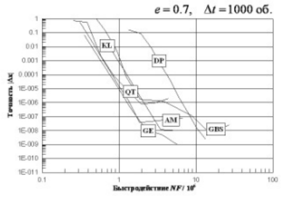
КРУГОВАЯ ОРБИТА

$e = 0, \quad \Delta t = 1000$ об.



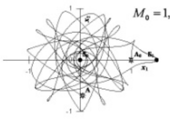
ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ОРБИТА

$e = 0.7, \quad \Delta t = 1000$ об.

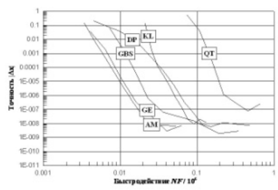


ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

$M_0 = 1, \quad M_1 = 0.1$



ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ



ДОСТОИНСТВА

1. РЕШЕНИЕ КАК ПОЛИНОМ
2. ПРОСТОЙ КОНТРОЛЬ ШАГА
3. ХОРОШИЙ ПРЕДИКТОР
4. ЛЮБОЙ ПОРЯДОК
5. ГАУССОВ
6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ
7. ОРБИТАЛЬНО УСТОЙЧИВ

НЕДОСТАТКИ

1. НЕЯВНЫЙ
2. ЛОКАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ (?)