

УДК 521.1, 519.6

В.А. АВДЮШЕВ

**ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ<sup>1</sup>**

В работе обсуждается и исследуется обусловленность обратных задач орбитальной динамики. Показано, что она зависит, главным образом, от длины мерного интервала: как его уменьшение, так и увеличение приводит к ухудшению обусловленности, причем настолько, что обратная задача становится не решаемой численно. Впрочем, в случае малых мерных интервалов обусловленность может быть существенно улучшена путем масштабирования орбитальных параметров.

*Ключевые слова:* орбитальное движение, определение орбит, обусловленность.

**1. Введение**

Обусловленность — это характеристика задачи, которая говорит о том, насколько хорошо (или плохо) исходные данные задачи обуславливают ее решение, иначе говоря, насколько чувствительно решение к ошибкам исходных данных. Если задача плохо обусловлена, то какими бы малыми не были ошибки исходных данных, решение может содержать настолько большие ошибки, что оно совершенно не будет иметь какой-либо практической ценности.

Обусловленность может быть как абсолютной, так и относительной. Допустим, мы имеем аналитическую функцию  $y = f(x)$  — решение задачи. Входную переменную  $x$  можно рассматривать как параметр задачи, а выходную переменную  $y$  — как результат решения. С точностью до малых первого порядка связь между ошибками переменных  $\Delta x$  и  $\Delta y$  представима в виде

$$\Delta y = f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

Производная  $f'(x)$  здесь выступает как раз в роли так называемого абсолютного числа обусловленности. Впрочем, с вычислительной точки зрения весьма полезной является связь между относительными ошибками  $\delta x = \Delta x / x$  и  $\delta y = \Delta y / y$ , поскольку они несут в себе информацию о потере точности в значащих цифрах. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)} x \frac{\Delta x}{x} \Rightarrow \delta y = \text{cond } f(x) \delta x, \quad \text{cond } f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} x, \tag{2}$$

где  $\text{cond } f(x)$  — относительное число обусловленности, которое на практике называют просто числом обусловленности.

Как мы видим, число обусловленности (2) можно рассматривать как отношение относительных ошибок выходных и входных параметров. Из этих соображений вводится понятие обусловленности в векторном случае. Пусть имеем векторное взаимоднозначное соответствие  $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  между входными  $\mathbf{x}$  и выходными  $\mathbf{y}$  параметрами. В малой окрестности входных параметров  $\mathbf{x}^*$  с точностью до малых первого порядка связь между  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  представима в виде

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}^* = \mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*),$$

где  $\mathbf{y}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ . Тогда (относительную) обусловленность задачи можно ввести как

$$\text{cond } \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \max \left( \frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \right) = \max \frac{\|\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\Delta \mathbf{x}\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} \max \frac{\|(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})^{-1}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)\|}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|} = \|\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\| \|(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})^{-1}(\mathbf{x}^*)\|,$$

где  $\Delta \mathbf{x}$  и  $\Delta \mathbf{y}$  — ошибки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Таким образом, число обусловленности векторной задачи есть произведение норм исходной матрицы Якоби  $\mathbf{f}'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)$  и обратной к ней  $(\mathbf{f}'_{\mathbf{x}})^{-1}(\mathbf{x}^*)$ . Если же матрица Якоби нормальная, то число обусловленности задачи определяется как отношение максимального собственного числа матрицы к минимальному, следовательно,  $\text{cond } \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) \geq 1$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 1567).

## 2. Двупараметрическая обратная задача двух тел

Модель орбитального движения можно представить в виде  $\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \mathbf{q})$ , где  $t$  — время;  $\mathbf{q}$  —  $K$ -мерный вектор орбитальных параметров;  $\mathbf{p}^C$  — вектор положения небесного тела в наблюдаемом  $L$ -мерном пространстве (например, на небесной сфере, когда  $L=2$ ). Параметры орбитальной модели определяются из наблюдений  $\mathbf{p}_i^O$  на моменты времени  $t_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) в рамках нелинейной задачи наименьших квадратов [1]

$$\Phi(\mathbf{q}) \equiv \|\mathbf{p}^O - \mathbf{p}^C(\mathbf{q})\|^2 \rightarrow \min, \quad (3)$$

где  $\mathbf{p}^O = (\mathbf{p}_1^O, \dots, \mathbf{p}_N^O)^T$ ;  $\mathbf{p}^C(\mathbf{q}) = (\mathbf{p}_1^C, \dots, \mathbf{p}_N^C)^T$ ;  $\mathbf{p}_i^C = \mathbf{p}^C(t_i, \mathbf{q})$  ( $i=1, \dots, N$ );  $\dim \mathbf{p}^O = \dim \mathbf{p}^C = LN$ . Для минимизации функционала (3) обычно применяется итерационный метод спуска Гаусса–Ньютона, где каждая итерация фактически предполагает решение нормальной системы линейных уравнений с матрицей

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{p}'_q)^T (\mathbf{p}'_q). \quad (4)$$

Таким образом, для найденного решения, доставляющего минимум функционалу  $\Phi(\mathbf{q})$ , величина  $\text{cond} \mathbf{Q} = \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{Q}^{-1}\| = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$  (отношение максимального собственного числа  $\lambda_{\max}$  матрицы  $\mathbf{Q}$  к минимальному  $\lambda_{\min}$ ) фактически будет представлять обусловленность задачи (3).

Рассмотрим сначала плоскую ( $L=2$ ) двупараметрическую ( $K=2$ ) обратную круговую задачу. Орбитальную модель кругового движения можно представить как

$$\mathbf{p}^C = (x_1^C, x_2^C)^T, \quad x_1^C = a \cos \varphi, \quad x_2^C = a \sin \varphi, \quad \varphi = n\Delta t + \varphi_0, \quad n = \sqrt{\mu/a^3}, \quad \Delta t = t - t_0.$$

Определяемые параметры здесь — большая полуось  $a$  (радиус орбиты) и начальная аномалия  $\varphi_0$  на эпоху  $t_0$ , т.е.  $\mathbf{q} = (a, \varphi_0)^T$ , а наблюдаемые величины — координаты  $x_1^C$  и  $x_2^C$  на плоскости.

Нормальная матрица в двупараметрической задаче имеет очень простой вид

$$\mathbf{Q} = N \begin{pmatrix} 1 + \frac{9}{4}n^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 & -\frac{3}{2}an \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i \\ -\frac{3}{2}an \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i & a^2 \end{pmatrix}.$$

Для нее обусловленность определяется по формуле

$$\text{cond} \mathbf{Q} = \frac{q_{11} + q_{22} + \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{q_{11} + q_{22} - \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}, \quad (5)$$

$$q_{11} = 1 + \frac{9}{4}n^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2, \quad q_{12} = -\frac{3}{2}an \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i, \quad q_{22} = a^2.$$

В задаче, помимо определяемых параметров, имеется еще один свободный параметр, который непосредственно влияет на обусловленность. Это — начальная эпоха  $t_0$ . Выберем ее таким образом, чтобы обусловленность принимала минимальное значение. Нетрудно показать, что оптимальной эпохе соответствует среднее арифметическое всех моментов наблюдений. Тогда будем иметь

$$\text{cond} \mathbf{Q} = \frac{q_{11} + q_{22} + |q_{11} - q_{22}|}{q_{11} + q_{22} - |q_{11} - q_{22}|} = \frac{\max(q_{11}, q_{22})}{\min(q_{11}, q_{22})}, \quad (6)$$

$$q_{11} = 1 + \frac{9}{4}n^2 \sigma_t^2, \quad q_{12} = 0, \quad q_{22} = a^2, \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2.$$

Интересно заметить, что матрица  $\mathbf{Q}$  не вырождается при уменьшении мерного интервала. Это видно из определителя  $\det \mathbf{Q} = N^2 a^2 (1 + \frac{9}{4}n^2 \sigma_t^2)$ . Если мы устремим дисперсию (разброс) моментов времени  $\sigma_t^2$  к нулю, то определитель будет принимать ненулевое значение, что весьма необычно, поскольку на практике при решении сложных обратных задач ситуация совершенно иная.

Следовательно, нет необходимости проводить какие-либо специальные изыскания для подбора оптимальной эпохи. В качестве таковой можно просто выбрать среднее арифметическое всех моментов наблюдений [2]. Разумеется, в сложных задачах оно будет отличаться от точного значения оптимальной начальной эпохи, обеспечивающей минимум числа обусловленности, хотя отличие этих значений на практике обычно незначительное.

С другой стороны, не стоит быть щепетильным и бояться слегка ошибиться с эпохой. Формула (5) вполне пригодна для качественного описания зависимости обусловленности задачи от начальной даты, к которой отнесены параметры. Пусть моменты времени  $t_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) распределены равномерно на временном отрезке  $[-\tau, \tau]$ . Оптимальной начальной эпохой, очевидно, будет  $t_0 = 0$ . Из формулы (5) можно установить следующее неравенство

$$\frac{\text{cond } \mathbf{Q}(t_0 = k\tau)}{\text{cond } \mathbf{Q}(t_0 = 0)} \leq (3k^2 + 1)^2.$$

Отсюда видно, что даже если выбрать  $t_0$  на границе мерного интервала ( $k=1$ ), обусловленность может стать хуже только на порядок, что в общем практически не столь значительно.

Вернемся к формуле (6). Как видно, в ней присутствует большая полуось, поэтому число обусловленности непосредственно зависит от того, в каких единицах задается параметр. Следовательно, одна и та же задача в разных единицах измерения может иметь разную обусловленность, как хорошую, так и плохую.

Чтобы выяснить, насколько удачно выбраны единицы измерения, достаточно рассмотреть так называемую масштабированную нормальную матрицу

$$\mathbf{R}: r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}} \quad (i, j = 1, \dots, K).$$

Если ее обусловленность существенно лучше исходной матрицы, т.е.  $\text{cond } \mathbf{R} \ll \text{cond } \mathbf{Q}$ , значит, требуется масштабирование параметров. В двухпараметрической задаче

$$\text{cond } \mathbf{R} = \frac{1+r}{1-r}, \quad r = \frac{3}{2}n \frac{1}{N} \left| \sum_{i=1}^N \Delta t_i \right| + \frac{9}{4}n^2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta t_i^2 \quad^{-1/2}.$$

Поэтому при начальной эпохе, равной среднему арифметическому всех моментов наблюдений ( $t_0 = 0$ ), путем масштабирования параметров можно вообще добиться единичного числа обусловленности.

### 3. Трехпараметрическая обратная задача двух тел

Теперь усложним задачу и пополним состав определяемых параметров массой центрального тела, т.е.  $\mathbf{q} = (a, \varphi_0, \mu)^T$ . Нормальная матрица в этом случае будет

$$\mathbf{Q} = N \begin{pmatrix} 1 + \frac{9}{4}\mu a^{-3}\sigma_t^2 & 0 & -\frac{3}{4}a^{-2}\sigma_t^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ -\frac{3}{4}a^{-2}\sigma_t^2 & 0 & \frac{1}{4}a^{-1}\mu^{-1}\sigma_t^2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i.$$

Прежде всего, она показывает, что задача невырожденная

$$\det \mathbf{Q} = \frac{aN^3\sigma_t^2}{4\mu} \neq 0$$

и, кроме того, число обусловленности

$$\text{cond } \mathbf{Q} \approx \frac{4\mu a}{\sigma_t^2} \quad \text{при} \quad \sigma_t^2 \rightarrow 0$$

может принимать вполне приемлемые значения для численного решения обратной задачи. Даже если величина  $\sigma_t^2$  чрезвычайно мала, большое число обусловленности можно избежать путем соответствующего масштабирования параметров  $\mu$  и  $a$ .

Между тем ковариационная матрица ошибок, которая пропорциональна обратной нормальной матрице:

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{Q}^{-1} = \frac{\sigma^2}{N} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\mu a^{-1} \\ 0 & a^{-2} & 0 \\ 3\mu a^{-1} & 0 & 4\mu a \sigma_i^{-2} (1 + \frac{9}{4} \mu a^{-3} \sigma_i^2) \end{pmatrix},$$

показывает, что параметрические ошибки, согласно дисперсиям ковариационной матрицы, в действительности представляют собой малые величины, если учитывать малость дисперсии ошибок наблюдений  $\sigma^2$ . Следовательно, задача вполне решается.

Попутно хотелось бы обратить внимание на то, что ошибки большой полуоси и аномалии в эпоху не зависят от длины мерного интервала (см. диагональные элементы). В то же время ошибка массы чрезвычайно слабо чувствительна к длительным мерным интервалам, иначе говоря, увеличение мерного интервала не приводит к неограниченному повышению точности определения массы. В данном случае повышение точности параметров возможно за счет увеличения количества (равноточных) наблюдений.

Конечно, все эти оценки получены на примере простых кинематических моделей. Как же обстоят дела в случае более сложных динамических моделей?

#### 4. Обратная задача двух тел

Допустим, орбита описывается формулами плоской задачи двух тел, а в качестве определяемых выбираются пять параметров: две координаты и две компоненты скорости в начальную эпоху, а также масса центрального тела:  $\mathbf{q} = (x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \mu)^T$ . Аналитическая формула обусловленности в данном случае чрезвычайно сложна для анализа, поэтому приведем лишь ее численные характеристики в некоторых частных задачах.

Рассмотрим сначала безразмерную задачу с параметрами

$$t_0 = 0, \quad x_{10} = 1, \quad x_{20} = 0, \quad \dot{x}_{10} = 0, \quad \dot{x}_{20} = 1, \quad \mu = 1,$$

которые соответствуют круговой орбите единичного радиуса с периодом обращения  $2\pi$ . Предполагалось, что параметры  $\mathbf{q}$  определяются по  $N = 128$  положениям, равномерно распределенным на наблюдаемой орбитальной дуге. При этом угол между картинной плоскостью  $(p_1, p_2)$  и орбитальной  $(x_1, x_2)$  составляет  $60^\circ$  (Рис. 1), т.е.

$$p_1^C = x_1^C \quad \text{и} \quad p_2^C = \cos 60^\circ x_2^C = \frac{1}{2} x_2^C, \quad (7)$$

где координаты  $x_1^C$  и  $x_2^C$  вычисляются по формулам плоской задачи двух тел. Наблюдения моделировались на моменты времени  $t_i = \tau(-1 + 2(i-1)/(N-1))$  ( $i = 1, \dots, N$ ), где  $\tau$  — половина длины мерного интервала.

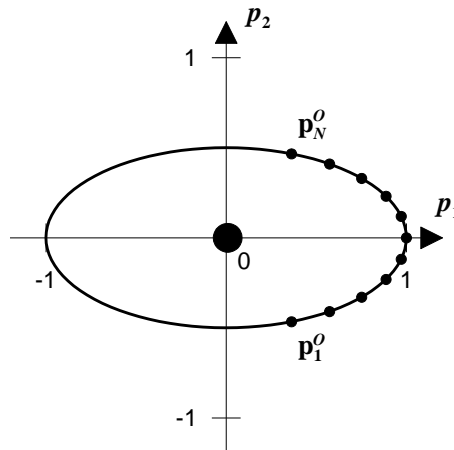


Рис. 1. Орбита в картинной плоскости

Зависимость обусловленности, а также среднеквадратических ошибок параметров от длины мерного интервала  $2\tau$  приведена на рис. 1. Здесь среднеквадратические ошибки приведены за единичную дисперсию ошибок наблюдений ( $\sigma^2 = 1$ ), иначе говоря, они просто представляют собой корни диагональных элементов обратной нормальной матрицы. Из рисунка видно, что как уменьшение, так и увеличение мерного интервала приводят к ухудшению обусловленности задачи ( $\mathbf{Q}_{5 \times 5}$ ). Между тем для малых мерных интервалов (до полуоборота) обусловленность может быть существенно улучшена путем масштабирования параметров, на что указывает очень хорошая обусловленность масштабированной матрицы  $\mathbf{R}_{5 \times 5}$ . Исключение массы  $\mu$  из состава определяемых параметров практически не влияет на обусловленность для длительных мерных интервалов ( $\mathbf{Q}_{4 \times 4}$ ), хотя для коротких обусловленность обратной задачи без массы на несколько порядков меньше, нежели исходной задачи.

Что касается среднеквадратических ошибок, то для массы и скорости ( $\sigma_\mu$  и  $\sigma_x$ ) они весьма чувствительны к длине мерного интервала в тех случаях, когда наблюдения покрывают дугу орбиты до полуоборота. В то же время точность определения положения  $\sigma_x$  практически не зависит от длительности периода наблюдений, что также имеет место для массы и скорости в случае больших мерных интервалов. Впрочем, следует помнить, что оценки на рис. 1 получены при одинаковом количестве наблюдений ( $N = 128$ ), хотя точность определяемых параметров непосредственно зависит также и от объема наблюдательного материала, причем, как и для арифметического среднего, ошибки определяемых параметров при  $N \rightarrow \infty$  оказываются пропорциональными  $N^{-1/2}$ .

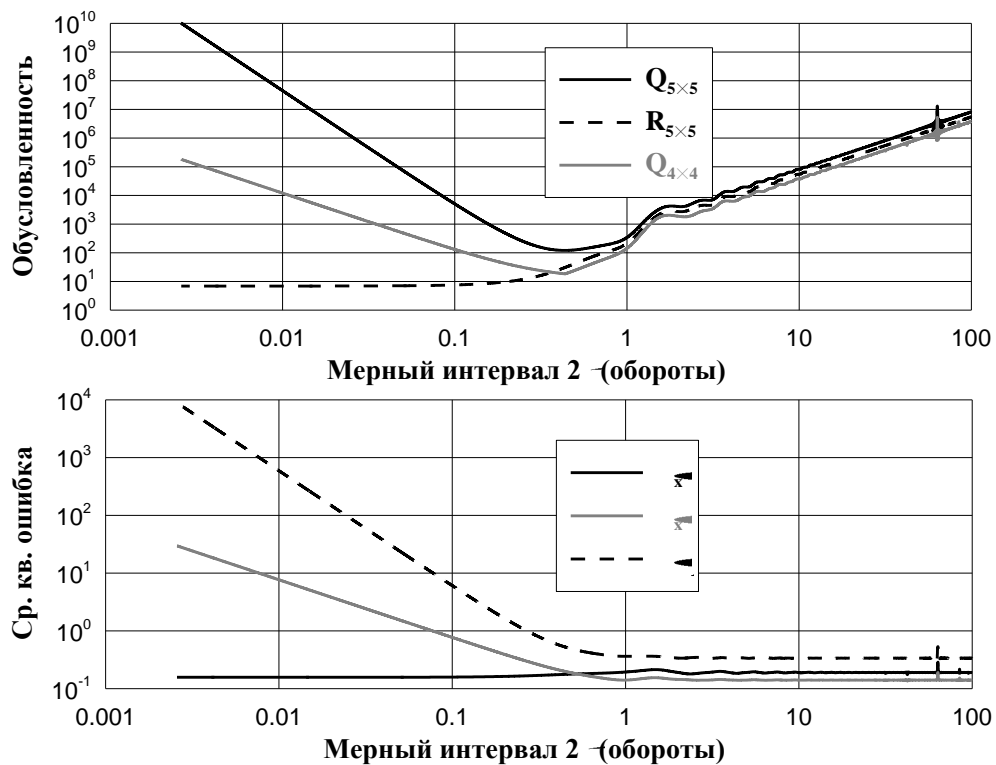


Рис. 2. Безразмерная обратная задача. Обусловленность и среднеквадратические ошибки параметров за единичную дисперсию ошибок наблюдений в зависимости от длины мерного интервала

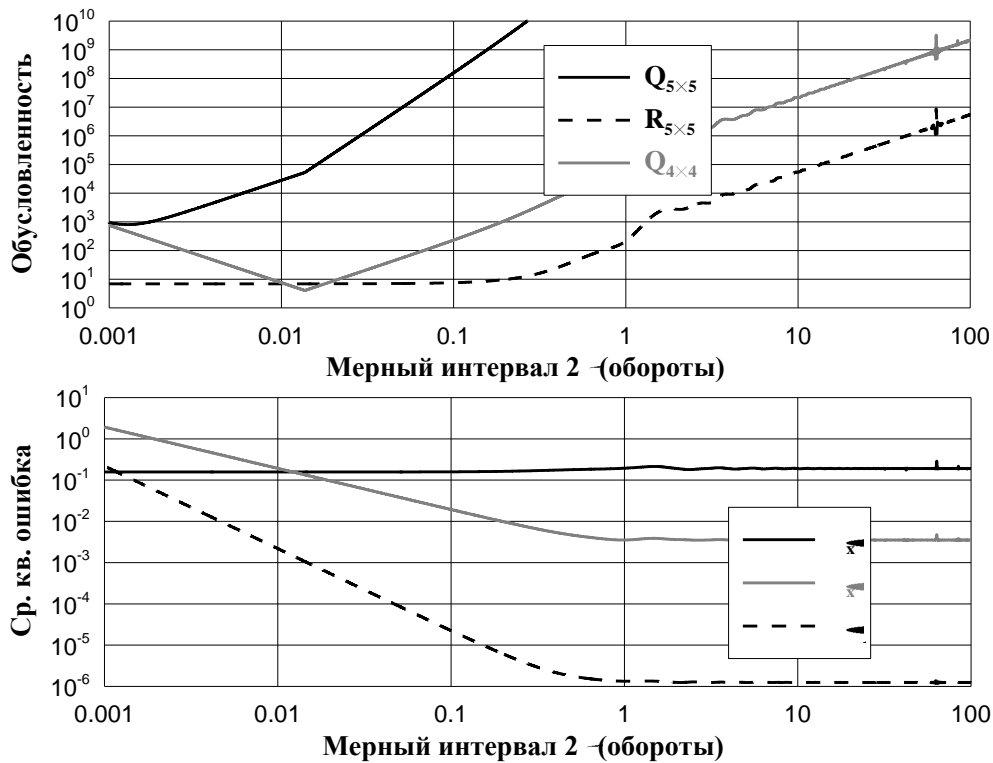


Рис. 3. Определение параметров динамической системы Гималия–Юпитер. Обусловленность и среднеквадратические ошибки параметров за единичную дисперсию ошибок наблюдений в зависимости от длины мерного интервала.

### 5. Обратная спутниковая задача

Условия рассмотренной выше безразмерной обратной задачи подобны тем, которые имеют место на практике при определении орбитальных параметров естественного спутника и массы его планеты по астрометрическим наблюдениям малого тела. Поэтому используя простую модель этой задачи, можно, по крайней мере, качественно оценить обусловленность в конкретных обратных спутниковых задачах.

Рассмотрим задачу об определении массы Юпитера  $\mu$  по астрометрическим наблюдениям Гималии, шестому спутнику планеты [3]. При этом в задаче совместно определяются и орбитальные параметры спутника  $x_{10}, x_{20}, \dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}$ . В модели (7) определяемые величины теперь имеют размерности:  $[x_{10}, x_{20}] = \text{а.е.}$ ,  $[\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}] = \text{а.е.}/\text{сут}$  и  $[\mu] = \text{а.е.}^3/\text{сут}^2$ . Масса Юпитера (гравитационный параметр центрального тела)  $\mu = 2.8 \cdot 10^{-7} \text{ а.е.}^3/\text{сут}^2$ , а орбитальные параметры спутника соответствуют круговой орбите радиуса  $a = 7.7 \cdot 10^{-2} \text{ а.е.}$  (большая полуось Гималии). В действительности же орбита Гималии эллиптическая с умеренным эксцентриситетом  $e \approx 0.16$ , однако для приближенных оценок обусловленности этот факт не столь принципиален и им можно пренебречь. Угол между картинной и орбитальной плоскостью, как и выше, составляет  $60^\circ$ , что почти отвечает условиям наблюдения спутника, когда его линия узлов оказывается перпендикулярной направлению от наблюдателя на планету. Наблюдения моделировались так же, как и в безразмерной задаче ( $N = 128$ ).

Как показывают результаты на рис. 3, наивысшая точность определения параметров  $(\sigma_x, \sigma_{\dot{x}}, \sigma_\mu)$  достигается для мерных интервалов более одного оборота спутника. Однако, даже несмотря на то что масса Юпитера и орбитальные параметры его спутника могут быть определены с

весьма приемлемой точностью, при выбранных параметрах обратная задача оказывается плохо обусловленной ( $\mathbf{Q}_{5 \times 5}$ ) [3], а потому не решаемой, и определить параметры просто не представляется возможным, по крайней мере, в арифметике с двойной точностью. Уже при длительности наблюдений в один орбитальный период спутника число обусловленности достигает  $10^{12}$ , а с увеличением мерного интервала оно возрастает квадратично.

Главная причина плохой обусловленности — наличие в составе определяемых параметров массы  $\mu$ : ее исключение из состава существенно улучшает обусловленность, при которой обратная задача становится решаемой, однако определить массу, разумеется, не удастся. Между тем проблема практически разрешается путем соответствующего масштабирования параметров: как видно из рисунка, обусловленность масштабированной матрицы  $\mathbf{R}_{5 \times 5}$  очень хорошая и даже для больших мерных интервалов порядка ста оборотов спутника число обусловленности не превышает  $10^7$ , что вполне допустимо для численного решения обратной задачи с высокой точностью.

## 6. Заключение

Таким образом, в работе исследована обусловленность обратных задач орбитальной динамики в зависимости от специфики наблюдательной информации. Показано, что обусловленность зависит, главным образом, от длины мерного интервала: как его уменьшение, так и увеличение приводит к ухудшению обусловленности, причем настолько, что обратная задача становится не решаемой численно. Впрочем, в случае малых мерных интервалов обусловленность может быть существенно улучшена путем масштабирования параметров обратной задачи. Так, численное решение задачи об определении массы Юпитера по астрометрическим наблюдениям его шестого спутника Гималии не представляется возможным, по крайней мере, в арифметике с двойной точностью, если параметры задаются в часто используемых единицах измерения, т.е. когда расстояния измеряются в астрономических единицах, а время — в сутках. Между тем масштабирование параметров позволяет существенно уменьшить число обусловленности, почти на десять порядков. Следовательно, задача становится вполне решаемой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит. — Томск: Изд-во НТЛ, 2010. — 284 с.
2. Черницов А. М. // Астрон. и геод. Вып. 5. Томск: Изд-во ТГУ, 1975. С. 6–19.
3. Быкова Л. Е. // Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР. Л.: Наука, 1979. — Т. 14. — № 7. — С. 402–406.

V.A. AVDYSHEV

## CONDITIONALITY IN INVERSE PROBLEMS OF CELESTIAL MECHANICS

*Tomsk State University, Tomsk, Russia*

In the paper is discussed the conditionality of inverse problems of orbital dynamics versus peculiarity of observational information. It is shown that the conditionality mainly depends on the size of the observation span: both its decrease and increase result in the worsening of the conditionality so that the inverse problem just becomes unsolvable numerically. Nevertheless, in the case of short observation spans the conditionality can be appreciably improved by scaling the orbital parameters of the inverse problem.

**Keywords:** *orbital motion, orbit determination, conditionality*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (ДЛЯ SCOPUS)

1. Avdyushev V. A. Numerical Orbit Simulation. — Tomsk: STL, 2010. — 284 p.
2. Chernitsov A. M. // Астрон. и геод. Вып. 5. Томск: Изд-во ТГУ, 1975. С. 6–19.
3. Bykova L. E. // Institut Teoreticheskoi Astronomii, Biulleten'. — Vol. 14. — No. 7. — 1979. — P. 402–406.