

УДК 521.1, 519.62

В.А. АВДЮШЕВ, Н.В. СИМОНОВА
**ЭФФЕКТИВНОСТЬ КОЛЛОКАЦИОННЫХ МЕТОДОВ
 НА СИММЕТРИЧНЫХ РАЗБИЕНИЯХ ГАУССА
 В ЗАДАЧАХ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ¹**

В работе обсуждается эффективность коллокационных методов Рунге–Кутты на симметричных разбиениях Гаусса применительно к задачам орбитальной динамики. Экспериментально показано, что коллокационные методы представляют собой высокоэффективный инструментарий для численного моделирования орбит. Несмотря на то что в круговой задаче они уступают по эффективности многошаговым методам, в сложных задачах классические коллокационные методы Рунге–Кутты оказываются столь же хороши, а в алгоритмической реализации Эверхарта их эффективность даже заметно выше многошаговых методов.

Ключевые слова: орбитальное движение, численное интегрирование, коллокационные методы Рунге–Кутты.

1. Введение

Почти все важные для современной практики дифференциальные уравнения, описывающие динамические системы, не интегрируются аналитически. Поэтому для их решения прибегают к приближенным методам интегрирования, которые условно делят на аналитические и численные. В последнее время главным образом за счет бурного развития компьютерных технологий все чаще прибегают к численным методам интегрирования. Среди них широко применяются методы Рунге–Кутты, в особенности неявные коллокационные на разбиениях Гаусса: Лобатто, Радо или Лежандра. В настоящей работе представлены результаты исследования эффективности коллокационных методов на симметричных разбиениях: Гаусса–Лобатто и Гаусса–Лежандра, которые, как известно [1], обладают полезными для практики геометрическими свойствами: во-первых, они симметричные и отвечают свойству обратимости решений дифференциальных уравнений во времени; во-вторых, на разбиениях Лежандра они симплектические и, соответственно, отвечают свойству симплектичности фазового потока в случае гамильтоновых систем [1,2].

Одна из старейших отраслей астрономии, небесная механика, образно говоря, предоставляет превосходный полигон для тестирования численных методов интегрирования. Их успешная апробация только на задачах орбитальной динамики — уже залог широкого признания специалистами, чья деятельность непосредственно связана с численными исследованиями динамических систем. Поэтому рассматриваемые в работе коллокационные методы скрупулезно тестировались именно применительно к решению задач небесной механики.

2. Теория коллокационных методов

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

где t — независимая переменная; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ — вектор искомых переменных; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ — заданная вектор-функция t и \mathbf{x} . Штрих означает полную производную по независимой переменной t .

Основная идея коллокационных методов состоит в том, чтобы в качестве приближенного решения \mathbf{x} подобрать такой полином \mathbf{g} степени s , который бы удовлетворял условиям задачи Коши (1) в $s+1$ точках:

$$\mathbf{g}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{g}'(t_0 + hc_i) = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{g}(t_0 + hc_i)) \quad (i=1, \dots, s), \quad (2)$$

где c_i — вещественные числа, выбираемые на отрезке $[0,1]$. Тогда приближенное решение уравнения на конце шага интегрирования h представляется в виде $\mathbf{x}_1 = \mathbf{g}(t_0 + h)$.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 1567).

Учитывая условия (2), применим интерполяцию Лагранжа для $\mathbf{g}'(t)$:

$$\mathbf{g}'(t_0 + h\tau) = \sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j l_j(\tau), \quad \text{где } \mathbf{k}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{g}(t_0 + hc_i)), \quad l_j(\tau) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^s \frac{\tau - c_m}{c_j - c_m}, \quad (3)$$

а $\tau = (t - t_0) / h$. Отсюда, интегрируя (3) по τ , будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j \int_0^1 l_j(\tau) d\tau = \mathbf{g}(t_0 + h), \quad \mathbf{k}_i = \mathbf{f}(t_0 + hc_i, \mathbf{y}_i), \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j \int_0^{c_i} l_j(\tau) d\tau = \mathbf{g}(t_0 + hc_i) \quad (i = 1, \dots, s). \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что формулы (4) совпадают с формулами неявного метода Рунге–Кутты [3], если в качестве его коэффициентов a_{ij} и b_i выступают интегралы

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} l_j(\tau) d\tau, \quad b_j = \int_0^1 l_j(\tau) d\tau \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (5)$$

Методы Рунге–Кутты с коэффициентами (5) называются коллокационными.

Для вычисления интегралов (5) можно использовать простые рекуррентные формулы. Для каждого коэффициента a_{ij} имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{0l} &= c_i^l / l! \quad (l = 1, \dots, s+1), \quad \gamma_{kl} = ((c_i - c_k) \gamma_{k-1,l} - l \gamma_{k-1,l+1}) / (c_j - c_k) \\ &\quad (k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, s; l = 1, \dots, s-k+1), \end{aligned} \quad (6)$$

причем $\gamma_{j,l} = \gamma_{j-1,l}$ ($l = 1, \dots, s-j+1$). Тогда $a_{ij} = \gamma_{s1}$. Для b_j используются те же формулы (6), но с заменой c_i на единицу.

Отметим, что коллокационные формулы очень удобны для определения приближенных значений \mathbf{k} следующего шага. Обозначая их как $\bar{\mathbf{k}}$, а величину следующего шага \bar{h} , согласно формулам (3), получаем экстраполированную оценку

$$\bar{\mathbf{k}}_i \approx \sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j l_j(1 + c_i \bar{h} / h) \quad (i = 1, \dots, s). \quad (7)$$

Кроме того, оценка $\bar{\mathbf{k}}$ может быть уточнена путем внесения поправки $\Delta \mathbf{k}$, получаемой как разность между значениями \mathbf{k} после итераций и оценкой $\bar{\mathbf{k}}$ на текущем шаге.

В общем случае метод (4) имеет порядок $p = s$ [1]. Однако, если коэффициенты c_i являются корнями смещенного полинома Лежандра, иначе говоря, они являются решениями уравнения

$$\frac{d^s}{d\tau^s} [\tau^s (\tau - 1)^s] = 0, \quad (8)$$

то коллокационный метод будет иметь порядок $p = 2s$ [1]. Разбиение шага узловыми значениями c_i , удовлетворяющими уравнению (8), называется разбиением Гаусса–Лежандра. Если зафиксировать начальное узловое значение ($c_1 = 0$), либо конечное ($c_s = 1$), либо и то и другое ($c_1 = 0$ и $c_s = 1$), то получим другие известные разбиения Гаусса: левое и правое разбиения Радо и разбиение Лобатто, узловые значения которых соответственно удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^{s-1}}{d\tau^{s-1}} [\tau^s (\tau - 1)^{s-1}] = 0, \quad \frac{d^{s-1}}{d\tau^{s-1}} [\tau^{s-1} (\tau - 1)^s] = 0, \quad \frac{d^{s-2}}{d\tau^{s-2}} [\tau^{s-1} (\tau - 1)^{s-1}] = 0.$$

Однако любой коллокационный метод, построенный на одном из этих разбиений, будет иметь порядок ниже $p = 2s$: узловые значения Радо дают метод порядка $p = 2s - 1$, а узловые значения Лобатто — $p = 2s - 2$. Методы, основанные на рассмотренных разбиениях, называют еще методами Гаусса.

Коллокационные схемы допускают интегрирование с переменным шагом. Пусть $\|\mathbf{e}\|_{tol}$ — заданная точность. Потребуем, чтобы на каждом следующем шаге в каноническом полиномиаль-

ном представлении численного решения [4] сохранялась величина старшего члена $\|\mathbf{e}\|_{cal}$, равная $\|\mathbf{e}\|_{tol}$:

$$h \|\mathbf{a}_s\| / s \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbf{e}\|_{cal} = \|\mathbf{e}\|_{tol}.$$

Длина следующего шага \bar{h} оценивается по формуле, часто используемой в методах Рунге–Кутты:

$$\bar{h} = h \left(\frac{\|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{e}\|_{cal}} \right)^{1/s} \quad \text{или} \quad \bar{h} = h \left(\frac{s \|\mathbf{e}\|_{tol}}{h \|\mathbf{a}_s\|} \right)^{1/s}, \quad (9)$$

где разделенная разность \mathbf{a}_s определяется по формуле

$$\mathbf{a}_s = \sum_{j=1}^s \mathbf{k}_j \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^s \frac{1}{C_j - C_m}.$$

При разбиениях Гаусса недостаток такой оценки состоит в том, что шаг по ней выбирается как для решения порядка $s-1$, поскольку фактически \mathbf{e}_{cal} рассматривается как главный член погрешности порядка s . Поэтому она не обеспечивает сохранение требуемой локальной точности, и в действительности ошибка на шаге оказывается значительно меньше $\|\mathbf{e}\|_{tol}$.

Во избежание слишком больших локальных ошибок при быстром увеличении следующего шага, на отношение $\bar{h}/h = r$ налагается ограничение $r^s < \sigma$. Для того чтобы сохраняемая величина $h \|\mathbf{a}_s\| / s$ на следующем шаге была не более половины порядка, значение σ должно быть равно $\sqrt{10}$.

Начальное приближение стартового шага получается из оценки, подобной (9) для $s=2$ [2]:

$$\bar{h} = \sqrt{\frac{2h \|\mathbf{e}\|_{tol}}{\|\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1\|}}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(t_0 + h, \mathbf{x}_0 + h\mathbf{k}_1),$$

где h — малая величина. Если h настолько мала, что в компьютерной арифметике $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$, она увеличивается на порядок, и оценка повторяется снова.

3. Численные результаты

Коллокационные методы (4) тестировались применительно к дифференциальным уравнениям задачи двух тел и ограниченной задачи трех тел. В качестве показателей эффективности численного интегрирования рассматривались точность и быстродействие. Точность интегрирования в векторе фазовых переменных $|\Delta \mathbf{x}|$ оценивалась путем сравнения получаемых численных результатов с эталонным решением: в случае задачи двух тел в качестве эталонного принималось аналитическое решение уравнений, тогда как в задаче трех тел — численное решение, полученное при более высокой задаваемой локальной точности. Быстродействие оценивалось по количеству обращений NF к процедуре правых частей уравнений. Эффективность коллокационных методов также сравнивалась с эффективностью одношагового метода Эверхарта [4] и многошагового метода Адамса–Мультона [3].

В задаче двух тел будем рассматривать плоское движение материальной точки с бесконечно малой массой в поле тяготения центрального тела с единичной массой. Тогда движение малого тела относительно центрального будет описываться уравнениями:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad \text{или} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \mathbf{r}' \\ \mathbf{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ -\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Эффективность коллокационного интегратора тестировалась на однопараметрическом семействе орбит с единичной полуосью и аргументом перицентра $\omega = 0$, которое соответствует начальным условиям $r_1 = 1 - e$, $r_2 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = \sqrt{(1+e)/(1-e)}$, где e — эксцентриситет орбит (свободный параметр). Здесь $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ и $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ — векторы положения и скорости соответственно.

Точность интегрирования $|\Delta x|$ оценивалась на конце временного интервала, кратного целому числу оборотов (орбитальных периодов), путем сравнения результатов численного интегрирования с начальными данными. Характеристики точность–быстродействие получались по оценкам эффективности при различных значениях задаваемой локальной точности $\|e\|_{tol}$.

Поскольку коллокационные значения решений y_i находятся из решения системы (4) итерационным способом, необходимо было выяснить, какое число итераций является оптимальным с точки зрения отношения точность–быстродействие. Мы получили характеристики эффективности для интегратора восьмого порядка ($s = 4$) на разбиении Лежандра с числом итераций $NI = 2-6$ применительно к моделированию круговой орбиты на десяти оборотах (см. рис. 1). Характеристики строились по результатам интегрирования при разных значениях $\|e\|_{tol}$. Таким образом, они показывают зависимость качества результатов, количественно выражаемого точностью интегрирования, от трудоемкости вычислительного процесса, и как видно из рис. 1, достаточно высокая эффективность метода имеет место при $NI = 4-6$ итераций.

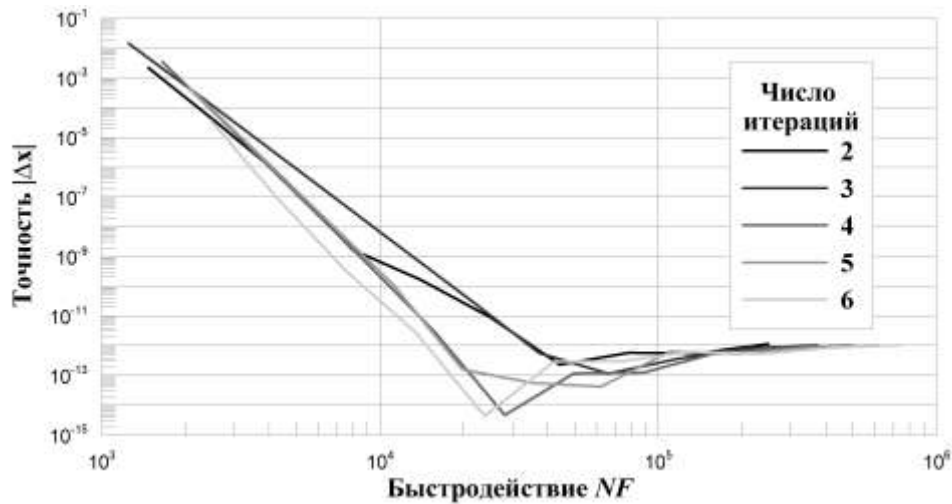


Рис. 1. Характеристики точность–быстродействие для метода порядка $p = 8$ ($s = 4$) в зависимости от числа итераций в численном решении системы уравнений (4) ($e = 0$; $\Delta t = 10$ оборотов; разбиение Лежандра)

Эффективность коллокационного интегратора (4) сравнивалась с эффективностью интегратора Гаусса–Эверхарта [4], который также является коллокационным [2] и широко используется в небесной механике для численного интегрирования орбит. Тестирование выполнялось на примере сильноэллиптической задачи, где орбита также интегрировалась на десяти оборотах интеграторами 8-го порядка ($p = 8$). При этом в интеграторе использовалось разбиение Лежандра ($s = 4$), тогда как в интеграторе Гаусса–Эверхарта — разбиение Лобатто ($s = 5$). Характеристики точность–быстродействие для интеграторов приведены на рис. 2.

Характеристики показывают, что коллокационный интегратор (4) при двух итерациях ($NI = 2$) заметно менее эффективен, нежели интегратор Гаусса–Эверхарта. На первый взгляд, это может показаться странным, ведь первый имеет меньше число этапов s , нежели второй, причем при одном и том же порядке. Поэтому, казалось бы, коллокационный интегратор (4) должен работать быстрее. Однако парадокс объясняется очень просто: все дело в экстраполяции. Начальные приближения для итерационного процесса в обоих интеграторах определяются на основе интерполяции правых частей уравнений (3) текущего шага с последующей их экстраполяцией (7) на новый шаг. Однако точность интерполяции на разбиении с пятью узлами выше, нежели с четырьмя, поэтому соответственно начальные приближения для итерационного процесса в интеграторе Гаусса–Эверхарта определяются лучше и, следовательно, итерационный процесс сходится быстрее.

Это объяснение подтверждают другие характеристики, полученные при пяти итерациях ($NI = 5$). Они почти совпадают. Для интегратора Гаусса–Эверхарта пять итераций избыточны, и поведение характеристики определяется непосредственно ошибками метода интегрирования, а не ошибками итерационно уточняемых приближений для правых частей уравнений. В то же время коллокационному интегратору (4) эти пять итераций как раз необходимы, с тем чтобы его эффективность стала сопоставимой с эффективностью интегратора Гаусса–Эверхарта.

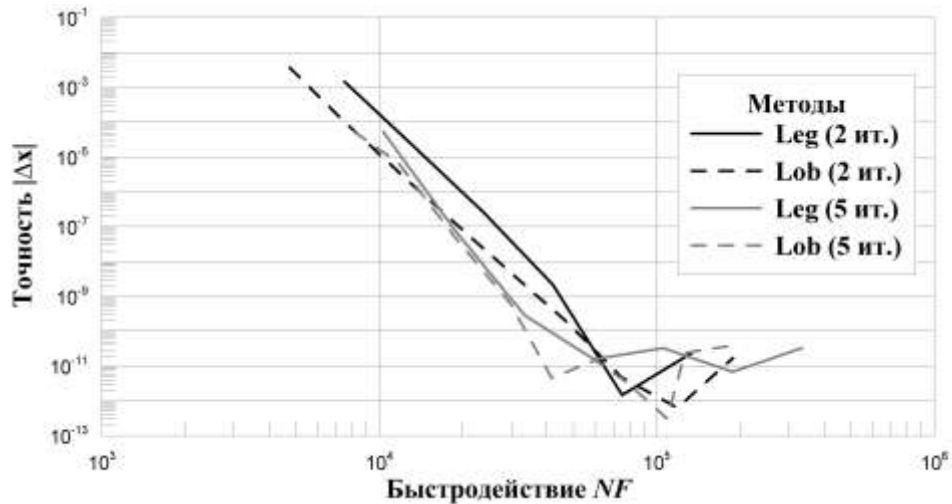


Рис. 2. Характеристики точность–быстродействие для коллокационного интегратора на разбиении Лежандра (**Leg**) и интегратора Гаусса–Эверхарта на разбиении Лобатто (**Lob**) ($e = 0.9$; $\Delta t = 10$ оборотов)

Далее мы исследовали вопрос: насколько значительно экстраполяция, используемая для получения начальных приближений в итерационном решении системы (4), повышает эффективность численного интегрирования? Представленные на рис. 3 характеристики точность–быстродействие фактически говорят о том, что экстраполяция (**fx**) является важным этапом в численном интегрировании. Если отказаться от экстраполяции и на следующем шаге в качестве начальных приближений принимать полученные на текущем шаге коллокационные значения правых частей уравнения (**f**), то это может понизить быстродействие вычислительного процесса в 2–4 раза. Если же в численном итерационном решении системы (4) вообще стартовать от нулевых начальных приближений (**0**), как на первом шаге, то быстродействие упадет почти на порядок. Кроме того, на рисунке показано, что учет в экстраполяции на каждом следующем шаге погрешности начального приближения текущего шага (Δf) может существенно повысить эффективность численного интегрирования, в частности по точности в векторе положения на несколько порядков.

Примечательно, что коллокационные методы на разбиениях Лежандра являются геометрическими [1]: симметричными и симплектическими. Между тем геометрические свойства методов интегрирования улучшают поведение глобальной методической ошибки, что весьма полезно при численном моделировании на длительных временных интервалах. Если для обычных методов ошибка ведет себя со временем квадратично, то для геометрических — линейно, т.е. медленнее.

Впрочем, геометрические свойства коллокационных методов на разбиениях Лежандра будут иметь место только в том случае, если коллокационные значения правых частей уравнений удовлетворяют соотношениям (4), иными словами, если приближения \mathbf{k}_i , полученные итерационно, достаточно точные. В противном случае геометрические свойства нарушаются. Кроме того, чтобы улучшить поведение ошибки, интегрирование необходимо выполнять с постоянным шагом [1].

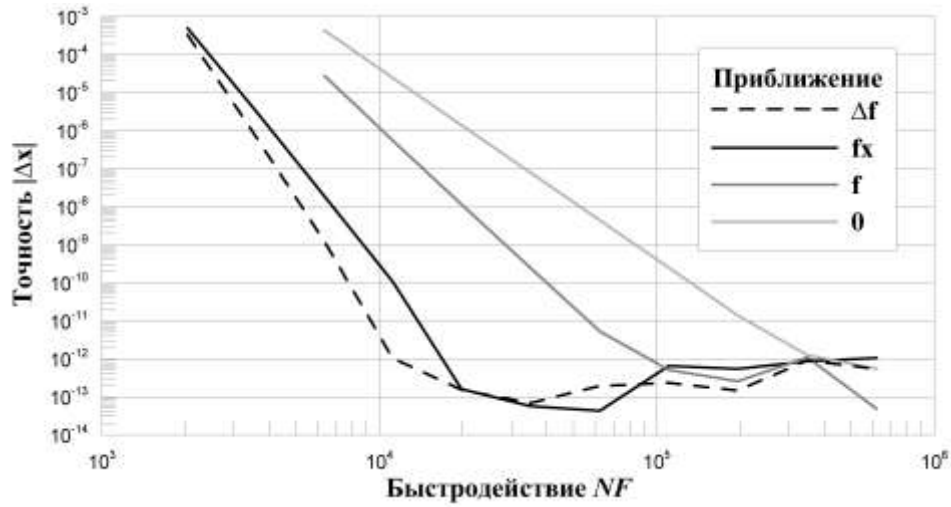


Рис. 3. Эффективность численного интегрирования в зависимости от точности начальных приближений в итерационном решении системы (4) ($e = 0$; $\Delta t = 10$ оборотов; разбиение Лежандра)

На рис. 4 и 5 показано поведение глобальной ошибки для коллокационных методов (на разбиениях Лежандра) 4-го и 6-го порядков соответственно при интегрировании круговой орбиты с постоянным шагом на временном интервале $\Delta t = 1000$ оборотов. Как видно из рисунков, принятых нами ранее оптимальных пять итераций оказывается недостаточно для обеспечения геометрических свойств интегратора, поэтому глобальная ошибка ведет себя квадратично со временем. Ситуация кардинально меняется, если число итерации увеличить до десяти: геометрические свойства сразу же проявляются в линейном поведении глобальной ошибки. Тем не менее, следует иметь в виду, что достижение геометрических свойств может быть сопряжено с увеличением объемов вычислений и тем самым с понижением эффективности численного интегрирования.

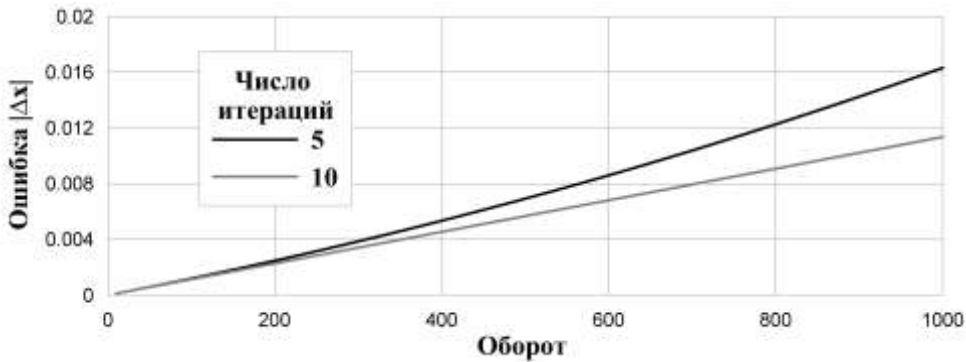


Рис. 4. Поведение методической ошибки со временем для метода 4-го порядка с величиной шага $h = 2\pi / 64$

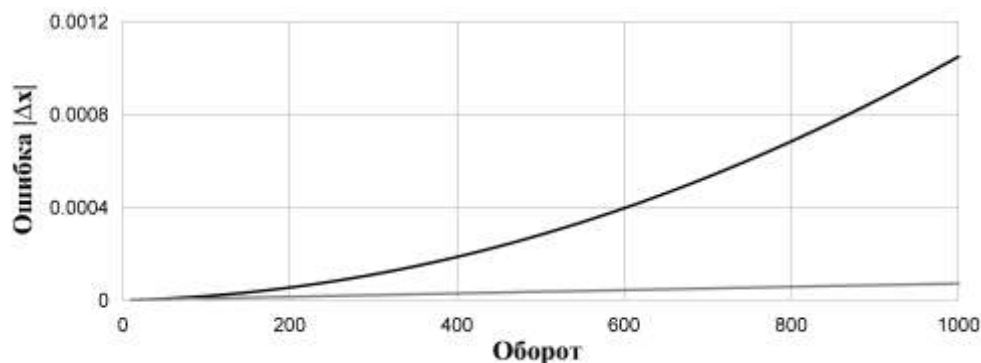


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, но для метода 6-го порядка с величиной шага $h = 2\pi / 32$

Помимо этого, перед нами стояла задача сравнить эффективность коллокационных интеграторов (4) с широко используемыми в орбитальной динамике интеграторами. Интегрирование выполнялось: 1) многошаговым интегратором Адамса; 2) интегратором Эверхарта, а также интеграторами (4) на разбиениях 3) Лежандра и 4) Лобатто. Результаты эксперимента представлены на рис. 6 и 7. Из рис. 6 видно, что по эффективности коллокационные интеграторы при интегрировании круговой орбиты существенно уступают многошаговому интегратору. Однако картина меняется (см. рис. 7) при интегрировании сильноэллиптической орбиты. Здесь мы уже видим, что эффективность всех рассматриваемых интеграторов становится сравнимой.

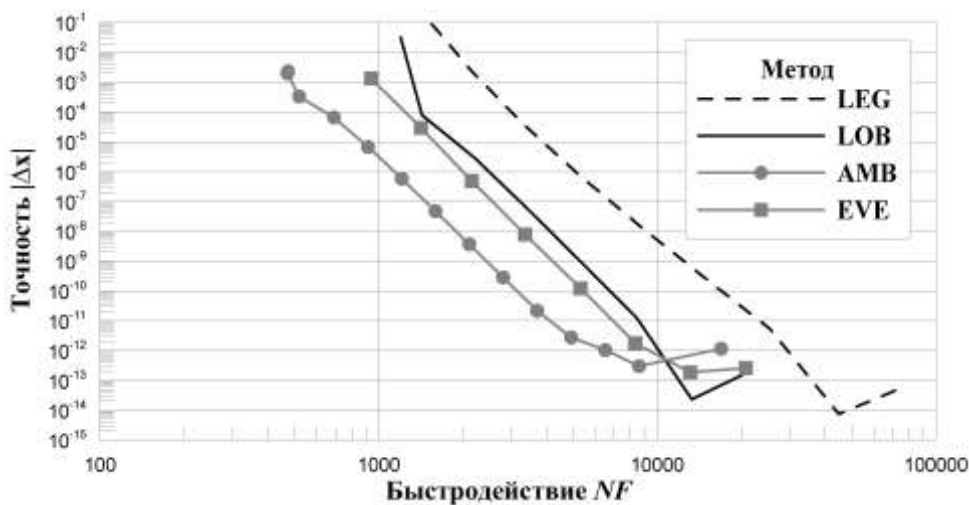


Рис. 6. Эффективность методов для круговой задачи ($p = 8$; $e = 0$; $\Delta t = 10$ оборотов)

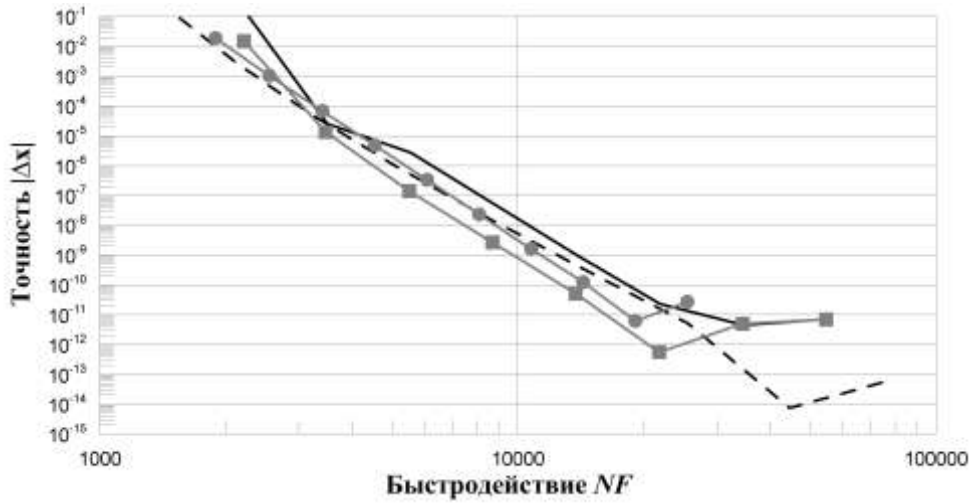


Рис. 7. Эффективность методов для эллиптической задачи ($p = 8; e = 0.75; \Delta t = 10$ оборотов)

Пусть теперь малое тело движется в поле тяготения центрального тела единичной массы под действием притяжения возмущающего тела массой $\mu_p = 0.1$ (см. рис. 8). Причем второе тело вращается вокруг центрального по круговой кеплеровской орбите с радиусом a_p . Дифференциальные уравнения (ограниченной задачи) имеют вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}' = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_p|^3} - \mu_p \frac{\mathbf{r}_p}{|\mathbf{r}_p|^3}$$

с начальными условиями

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 0, \quad v_1 = 0, \quad v_2 = 1,$$

где \mathbf{r}_p — вектор положения второго (возмущающего) тела, вычисляемый по формулам кругового движения:

$$r_{p1} = a_p \cos n_p t, \quad r_{p2} = a_p \sin n_p t, \quad n_p = a_p^{-3/2}.$$

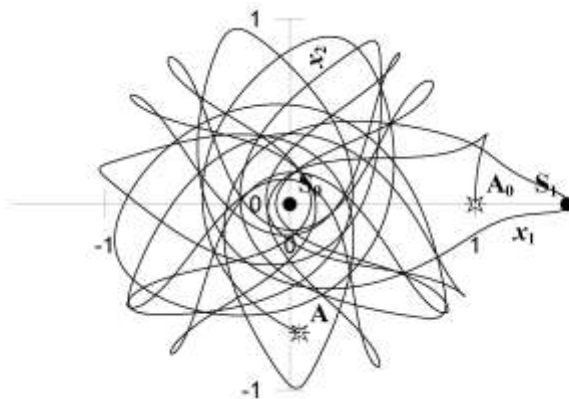


Рис. 8. Орбита третьего тела \mathbf{A} (\mathbf{A}_0 — начальное положение) в ограниченной задаче трех тел $\mathbf{S}_0 - \mathbf{S}_1 - \mathbf{A}$ во вращающейся системе координат

Точность интегрирования $|\Delta \mathbf{r}|$ оценивалась на конце временного интервала путем сравнения результатов интегрирования с эталонными значениями, полученными методом Гаусса–Эверхарта более высокого, а именно 14-го порядка. Численные результаты эксперимента приведены на рис. 9. Как видно из рисунка, эффективность коллокационных интеграторов на разбиении

Лежандра и Лобатто значительно ниже, чем эффективность многошагового интегратора. Однако многошаговый интегратор в этом случае уступает коллокационному методу Эверхарта, чья эффективность несколько выше.

Заметим, что интегратор Эверхарта, как и интеграторы на основе формул (4), также является коллокационным. Тем не менее его эффективность оказывается выше. Это связано с иным по конструкции полиномиальным представлением решения в интеграторе Эверхарта, а именно в форме канонического полинома:

$$\mathbf{g}(t_0 + h\tau) = \mathbf{x}_0 + h \sum_{j=1}^s \frac{\mathbf{a}_j}{j} \tau^j.$$

В то же время начальные приближения $\bar{\mathbf{a}} + \Delta\mathbf{a}$ (иначе говоря, экстраполяция коэффициентов на следующий шаг $\bar{\mathbf{a}}$ с уточнением по информации об ошибках начальных коэффициентов $\Delta\mathbf{a}$ на текущем шаге [4]) для итерационного решения нелинейных уравнений лучше с точки зрения сходимости, нежели аналогичные начальные приближения $\bar{\mathbf{k}} + \Delta\mathbf{k}$. Эта особенность интегратора Эверхарта позволяет получить достаточно хорошие результаты уже после двух итераций на шаге, тогда как другие интеграторы, основанные на интерполяции Лагранжа, могут потребовать больше итераций.

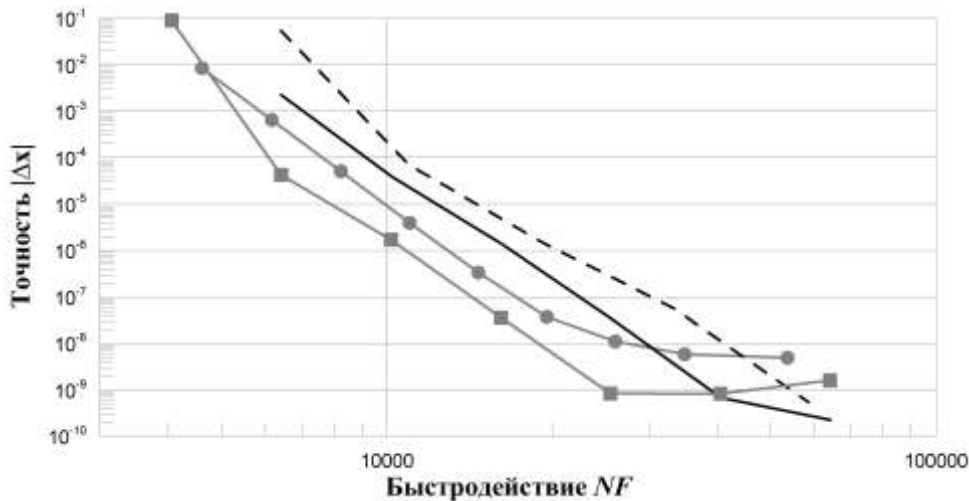


Рис. 9. Эффективность методов для ограниченной задачи трех тел ($p = 8$; $\Delta t = 20\pi$)

4. Заключение

Как мы видим, численные результаты эксперимента дают нам основание рассматривать коллокационные интеграторы как высокоэффективный инструментальный для численного исследования орбитальной динамики. Несмотря на то что в круговой задаче коллокационные методы явно и значительно уступают своему главному конкуренту — многошаговому методу Адамса, в сложных задачах (эллиптической и ограниченной трех тел) классические коллокационные методы (4) столь же эффективны, что и метод Адамса, а в алгоритмической реализации Эверхарта методы Рунге–Кутты даже заметно превосходят по эффективности многошаговый метод. Кроме того, нельзя также не заметить, что и предельно достижимая вычислительная точность коллокационных методов на несколько порядков выше. Это, прежде всего, связано с использованием в методах Рунге–Кутты гауссовых разбиений, которые позволяют получать численное решение на шаге с меньшим объемом вычислений, нежели в многошаговых методах того же порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations — Springer — 2002. — 659 p.
2. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит. — Томск: Изд-во НТЛ, 2010. — 284 с.
3. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems — Springer — 1993. — 539 p.
4. Everhart E. // Cel. Mech. — 1974. — Vol. 10 — P. 35–55.

V.A. AVDYSHEV, N.V. SIMONOVA

EFFICIENCY OF COLLOCATION METHODS ON GAUSSIAN SYMMETRIC SPACINGS IN CELESTIAL MECHANICS PROBLEMS

Tomsk State University, Tomsk, Russia

In the paper is discussed the efficiency of Runge–Kutta collocation methods on Gaussian symmetric spacings applied to problems of orbital dynamics. It is shown that the collocation methods are high-efficient tools for numerical orbit simulation. Although in the circular problem they are slightly inferior to multistep methods in efficiency, in complex problems the classical Runge–Kutta collocation methods turn out to be as good as the multistep methods and in Everhart’s algorithmic implementation their efficiency is even appreciably higher.

Keywords: *orbital motion, numerical integration, Runge–Kutta collocation methods*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (ДЛЯ SCOPUS)

1. Hairer E., Lubich C., Wanner G. Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations — Springer — 2002. — 659 p.
2. Avdyushev V. A. Numerical Orbit Simulation. — Tomsk: STL, 2010. — 284 p.
3. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations. Nonstiff Problems — Springer — 1993. — 539 p.
4. Everhart E. // Cel. Mech. — 1974. — Vol. 10 — P. 35–55.

Авдюшев Виктор Анатольевич, д.ф.-м.н., профессор
Симонова Наталья Владимировна, магистрант