

УДК 521.1

В.А. АВДЮШЕВ

ВНУТРЕННЯЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ¹

В работе формулируется проблема сильной внутренней нелинейности в обратных задачах при исследовании параметрической неопределенности стохастическими методами. Предлагается рассматривать нормальную и тангенциальную кривизну многообразия оценок в качестве показателей соответственно внутренней и внешней нелинейности. Приводятся формулы их приближенного вычисления. Оценивание нелинейности обратной плоской задачи двух тел с применением предлагаемых показателей выявляет тенденцию к ослаблению нелинейности при уменьшении мерного интервала. Причем внутренняя нелинейность оказывается на несколько порядков меньше внешней, что фактически является основанием для использования так называемого метода возмущенных наблюдений в исследовании больших параметрических неопределенностей вследствие малых мерных интервалов.

Ключевые слова: орбитальное движение, обратная задача, нелинейность.

1. Введение

Наблюдения любого небесного тела обременены ошибками различного происхождения, неустранимыми в силу их случайности. При определении орбиты из наблюдений они неизбежно передаются параметрам принятой орбитальной модели. Таким образом, определение орбиты всегда сопряжено с неопределенностью, вызываемой неизвестными ошибками.

Между тем численное оценивание неопределенностей в орбитальных параметрах вследствие случайных ошибок обычно выполняется на основе стохастического моделирования. Применяя какой-либо метод регрессионного анализа (как правило, наименьших квадратов), из наблюдений определяют орбитальные параметры астероида, составляют ковариационную матрицу параметрических ошибок, и стохастическими методами типа Монте-Карло формируют облако виртуальных динамических состояний небесного тела в фазовом пространстве орбитальных параметров (см., например, [1]). Плотность этого облака неопределенности отвечает вероятностной плотности многомерного нормального распределения.

Такой подход строго обоснован только для линейных моделей, т.е. когда связь между наблюдениями и параметрами является линейной. Орбитальные модели нелинейны. Однако, если на множестве виртуальных динамических состояний нелинейность незначительна, то подход на основе линейных оценок также вполне приемлем.

Если же нелинейность сильная, то разброс виртуальных состояний не будет соответствовать нормальному распределению, и в этом случае для моделирования облака неопределенности можно воспользоваться методом возмущенных наблюдений [1,2]. Формально он состоит в многократном решении задачи наименьших квадратов при различных выборках наблюдений, получаемых путем внесения в реальные наблюдения малых случайных величин, распределенных по нормальному закону с дисперсией ошибок наблюдений. Этот подход широко применяется на практике, однако также имеет ограничение, поскольку обоснован только в том случае, если многообразие оценок в пространстве наблюдений является плоским [3].

В любой линейной задаче многообразие оценок плоское. Это означает, что существует такая прямоугольная система координат, на которую можно натянуть многообразие оценок. Однако то же самое плоское многообразие можно натянуть и на криволинейную систему координат, и если эти координаты выбрать в качестве параметров, то задача, очевидно, станет нелинейной, но в то же время останется плоской. Таким образом, плоская задача может быть как линейной, так и нелинейной. Впрочем, если она нелинейная, то путем соответствующего преобразования параметров ее можно привести к линейной. Тогда говорят, что задача внутренне линейная (или внешне нелинейная) [3].

В обратных задачах орбитальной динамики многообразие оценок не плоское, и оно имеет условно называемую нормальную кривизну, которая непосредственно связана с геометрией многообразия оценок и не зависит от выбора параметров. Следовательно, если задача не плоская, то

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 1567).

ее, строго говоря, нельзя привести к линейной. В этом случае говорят, что задача внутренне нелинейная [3].

Тогда как быть, если метод возмущенных наблюдений — последняя надежда на спасение в нелинейном оценивании — работает только для плоских задач, какие не встречаются на практике? Хотя не все так удручающе безнадежно. В своей недавней работе [1] автор детально рассмотрел метод возмущенных наблюдений и на частном примере обнаружил, что даже при сильной нелинейности обратной задачи многообразие оценок оказывается почти плоским. Этот результат оказался весьма неожиданным для автора. Тогда то и встал вопрос: какова вообще внутренняя нелинейность задачи орбитальной динамики при сильной общей нелинейности, главным образом, когда орбита определяется очень плохо (с большой неопределенностью) из скудного состава наблюдений?

2. Показатели нелинейности

Проблема внутренней нелинейности хорошо известна в математической статистике [3,4,5], однако она совершенно не изучена в небесной механике. Более того, после детального обзора работ по нелинейности [1] у автора сложилось такое впечатление, что в небесной механике он первый обратил внимание на эту проблему и указал на возможные сопутствующие ей неприятности. На тот момент автор предложил только подход для оценивания внутренней нелинейности, позволяющий выявить проблему, однако систематических исследований о взаимосвязи внутренней нелинейности с условиями обратной задачи (в особенности при малых составах наблюдений) в дальнейшем так и не последовало.

В статье [1] автор вводит показатель внутренней нелинейности как угловое отклонение многообразия оценок в заданной точке от плоского подпространства, касательного в точке, соответствующей значениям оцениваемых орбитальных параметров. Геометрический смысл показателя легко демонстрируется для случая трех наблюдений ($N=3$) и двух оцениваемых параметров ($K=2$). См. рис. 1, где \mathbf{p} — трехмерный вектор пространства наблюдений; \mathbf{p}^o , $\delta\mathbf{p}^o$ и $\bar{\mathbf{p}}$ — векторы наблюдений, их ошибок и точных наблюдений соответственно; $\hat{\mathbf{p}}$ — вектор оценок, являющийся ортогональной проекцией точки \mathbf{p}^o на многообразие оценок \mathbf{p}^c , которое задается принятой моделью $\mathbf{p}^c = \mathbf{p}^c(\mathbf{q})$ с двумерным вектором оцениваемых параметров \mathbf{q} ; S — величина целевой функции наименьших квадратов, а в пространстве наблюдений это квадрат расстояния от точки наблюдений \mathbf{p}^o до произвольной точки многообразия оценок \mathbf{p}^c ; сеткой показано касательное к многообразию оценок в точке $\hat{\mathbf{p}}$ подпространство. Таким образом, показателем внутренней нелинейности будет угол φ , который можно вычислить из формулы

$$\cos(90^\circ + \varphi) = \frac{(\mathbf{p}^o - \hat{\mathbf{p}}) \cdot (\mathbf{p}^c - \hat{\mathbf{p}})}{\|\mathbf{p}^o - \hat{\mathbf{p}}\| \|\mathbf{p}^c - \hat{\mathbf{p}}\|}.$$

Чтобы практически оценить степень влияния внутренней нелинейности на формирование облака неопределенности методом возмущенных наблюдений, необходимо для каждого виртуального динамического состояния из этого облака вычислить угол φ и проанализировать его распределение. Очевидно, большая часть значений показателя будет концентрироваться около нуля, в то время как его больших значений будет существенно меньше. Из умозрительных соображений, можно считать, что если максимальная величина угла φ не превышает одного градуса, внутренняя нелинейность незначительна.

Неудобство в использовании углового показателя состоит в том, что для оценивания внутренней нелинейности необходим анализ большого множества его значений. Удобнее было бы иметь показатель, который бы только одним своим значением (возможно несколькими) характеризовал внутреннюю нелинейность, по меньшей мере, в окрестности оценки $\hat{\mathbf{p}}$. В качестве такого показателя может выступать кривизна многообразия оценок в точке $\hat{\mathbf{p}}$. Она, в свою очередь, непосредственно связана с кривизной координатных линий

$$\mathbf{p}^i(s) = \mathbf{p}^C(\hat{q}_1, \dots, \hat{q}_{i-1}, \hat{q}_i + s, \hat{q}_{i+1}, \dots, \hat{q}_K) \quad (i = 1, \dots, K),$$

на которые натянуто многообразие. Чтобы оценить внутреннюю или условно называемую нормальную кривизну многообразия, необходимо вычислить кривизну каждой линии в проекции на подпространство, ортогональное касательному подпространству к многообразию оценок в точке $\hat{\mathbf{p}}$. Максимальное из всех значений кривизны можно принять за показатель внутренней нелинейности. Тогда максимальное из значений кривизны спроецированных на касательное подпространство координатных линий будет выступать как показатель внешней нелинейности.

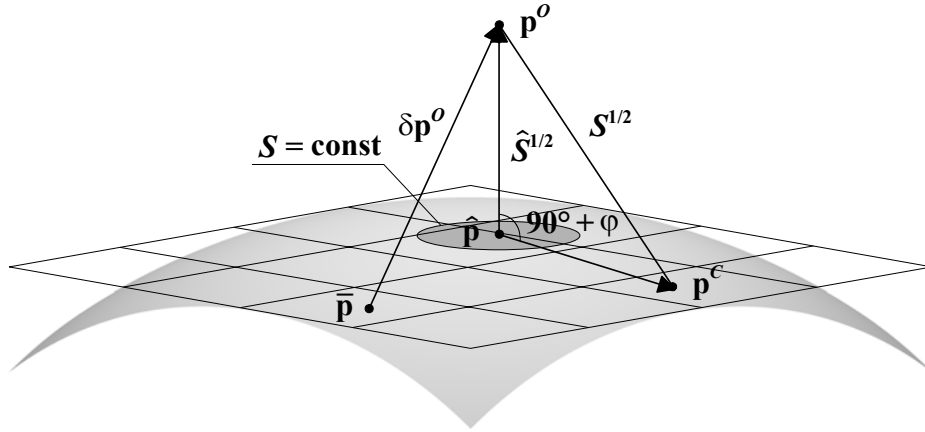


Рис. 1 — Неплоское многообразие оценок в пространстве наблюдений

Оценить нормальную и тангенциальную кривизну можно следующим образом. Находим вариации координатных линий как

$$\delta \mathbf{p}^i = \mathbf{p}^i(\delta s) - \hat{\mathbf{p}} \quad (i = 1, \dots, K),$$

где δs — вариация параметров, малая величина. Очевидно, вектор $\delta \mathbf{p}^i$ будет направлен почти вдоль i -ой координатной линии. Используя матрицу частных производных $\mathbf{p}'_q = \partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$, составляем идемпотентную матрицу

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{p}'_q ((\mathbf{p}'_q)^T \mathbf{p}'_q)^{-1} (\mathbf{p}'_q)^T,$$

ортогонально проецирующую любой вектор пространства наблюдений на тангенциальное подпространство, базисом которой являются столбцы матрицы \mathbf{p}'_q . Действуя матрицей-проектором на секущие вектора координатных линий $\delta \mathbf{p}^i$, получаем их проекции $\mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i$ ($i = 1, \dots, K$).

Далее для каждой i -ой координатной линии вычисляем углы φ^i и ψ^i (см. рис. 2):

$$\cos \varphi^i = \frac{\delta \mathbf{p}^i \cdot \mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i}{\|\delta \mathbf{p}^i\| \|\mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i\|} = \frac{\|\mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i\|}{\|\delta \mathbf{p}^i\|} = c_{\varphi}^i, \quad \cos \psi^i = \frac{(\partial \mathbf{p} / \partial q_i) \cdot \mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i}{\|\partial \mathbf{p} / \partial q_i\| \|\mathbf{\Pi} \delta \mathbf{p}^i\|} = c_{\psi}^i,$$

характеризующие соответственно нормальное отклонение координатной линии от тангенциального подпространства и отклонение ее тангенциальной проекции от касательного вектора $\partial \mathbf{p} / \partial q_i$. В линейном случае, очевидно, $\varphi^i = 0$ и $\psi^i = 0$, тогда как в плоском только $\varphi^i = 0$, а величина ψ^i будет характеризовать степень внешней нелинейности обратной задачи.

Наконец, через углы φ^i и ψ^i для каждой i -ой координатной линии приближенно находим нормальную и тангенциальную кривизну:

$$\kappa_{\text{Norm}}^i \approx \frac{2 \sin \varphi^i}{\|\delta \mathbf{p}^i\|}, \quad \kappa_{\text{Tang}}^i \approx \frac{2 \sin \psi^i}{\|\delta \mathbf{p}^i\|},$$

как показатели внутренней и внешней нелинейности. Заметим, что вычисление углов φ^i и ψ^i можно избежать, поскольку их синусы явно выражаются через c_φ^i и c_ψ^i . Следовательно,

$$\kappa_{\text{Norm}}^i \approx \frac{2\sqrt{1-(c_\varphi^i)^2}}{\|\delta\mathbf{p}^i\|}, \quad \kappa_{\text{Tang}}^i \approx \frac{2\sqrt{1-(c_\psi^i)^2}}{\|\delta\mathbf{p}^i\|}.$$

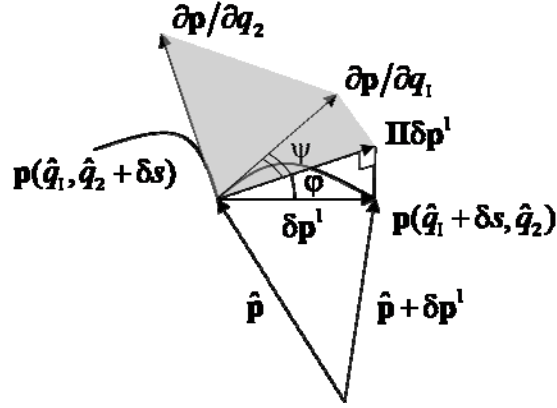


Рис. 2 — Углы φ и ψ для первой координатной линии в случае $K=2$ и $N=3$ (серым цветом показана касательная к поверхности оценок плоскость)

3. Обратная задача двух тел

Предлагаемые показатели применялись для исследования нелинейности в обратной плоской безразмерной задаче двух тел (см. рис. 3) с единичным гравитационным параметром. В качестве определяемых рассматривались четыре параметра ($K=4$), компоненты начального вектора динамического состояния $\mathbf{q} = (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)^T$ на момент времени t_0 , тогда как в качестве измеряемой величины выступал полярный угол α , аналог прямого восхождения, т.е. $\mathbf{p} = \mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$. Основная цель исследования состояла в том, чтобы определить, какой может быть внутренняя нелинейность задачи в сравнении с внешней нелинейностью. Для этого рассматривались различные варианты орбит \mathbf{q} , выборки наблюдений \mathbf{p} и положения центра наблюдений O' , и сопоставлялись нормальная κ_{Norm} и тангенциальная κ_{Tang} кривизна. В общем, результаты позволили прийти к единому выводу.

На рис. 4–7 показаны нормальная и тангенциальная кривизна многообразия оценок для каждой координатной линии в зависимости от длины мерного интервала. Эти оценки получены для вектора параметров $\hat{\mathbf{q}}$:

$$x_0 = 1 - e, \quad \dot{y}_0 = \sqrt{(1+e)/(1-e)}, \quad y_0 = \dot{x}_0 = 0, \quad e = 0.75,$$

соответствующего эллиптической орбите с единичной большой полуосью, орбитальным периодом 2π и эксцентриситетом 0.75; и для малой выборки наблюдений ($N=8$), задаваемых по равномерно распределенным на орбите положениям на моменты времени

$$t_i = t_0 + \Delta t \left(\frac{i-1}{N-1} - \frac{1}{2} \right) \quad (i=1, \dots, N),$$

где Δt — длина мерного интервала. Таким образом, момент времени t_0 начального динамического состояния $\hat{\mathbf{q}}$ находился в середине мерного интервала $(-\Delta t/2, \Delta t/2)$. Положение центра наблюдений $\mathbf{r} = (1, 1)^T$.

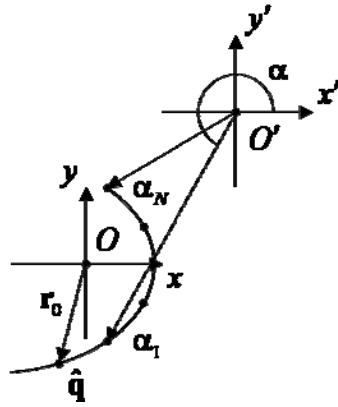


Рис. 3 — Орбита небесного тела и его наблюдения. Динамические состояния объекта задаются в системе координат Oxy , связанной с центральным телом O , тогда как наблюдения относятся к центру удаленной системы $O'x'y'$.

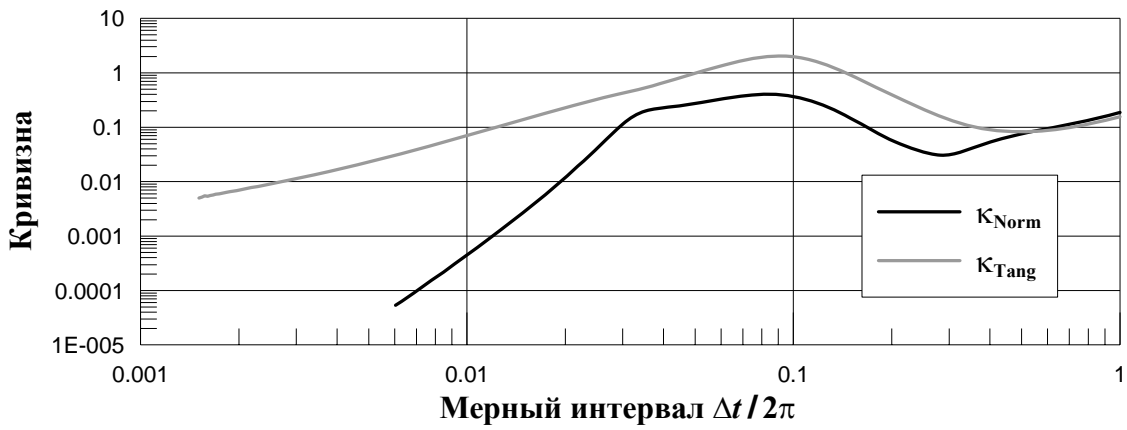


Рис. 4 — Нормальная и тангенциальная кривизна многообразия оценок для координатной линии x_0 в зависимости от длины мерного интервала

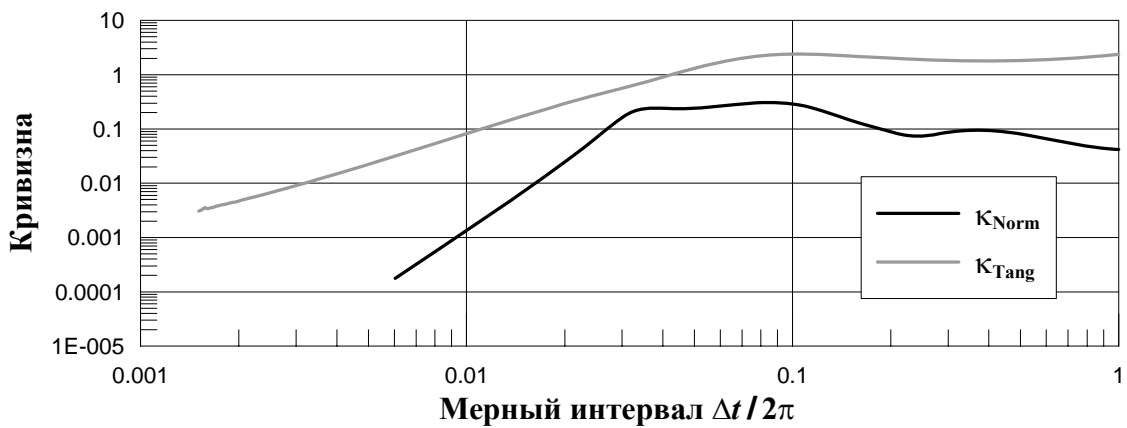


Рис. 5 — То же, что и на рис. 4, но для y_0

Как видно из рисунков, наибольшее значение нормальной кривизны κ_{Norm} не превышает значение тангенциальной кривизны κ_{Tang} . Самое важное, однако, то, что обе кривизны стремительно слабеют с уменьшением мерного интервала, причем нормальная кривизна существенно быстрее, и для коротких мерных интервалов она становится на порядки меньше тангенциальной кривизны. Поясним, в чем заключается практическая значимость этого факта.

Несмотря на простоту рассматриваемой модельной задачи, она вполне может быть пригодной для изучения свойств иной более общей и в то же время важной с практической точки зрения обратной задачи, в которой орбитальные параметры определяются из наблюдаемых положений небесного тела на короткой орбитальной дуге. Действительно, угловые наблюдения в этом случае распределяются на небесной сфере почти вдоль большого круга, на котором, очевидно, положения могут задаваться одним углом, аналогичным α , между тем для описания движения объекта на коротком временном интервале вполне пригодна модель кеплеровского движения.

Следовательно, полученные результаты приводят к более общим выводам и позволяют заключить, что в обратных задачах вообще с малым количеством наблюдений, распределенных на короткой орбитальной дуге, когда орбитальные параметры определяются плохо и неопределенность в параметрах большая, внутренняя нелинейность оказывается достаточно слабой и поэтому использование метода возмущенных наблюдений для стохастического моделирования облака неопределенности оказывается вполне обоснованным. Впрочем, окончательные выводы возможны лишь после непосредственного изучения усложненных задач.

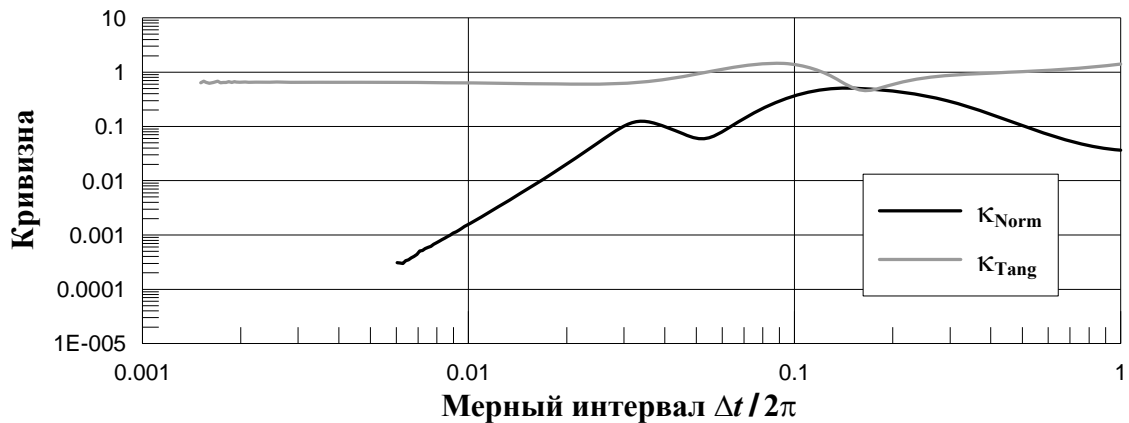


Рис. 6 — То же, что и на рис. 4, но для \dot{x}_0

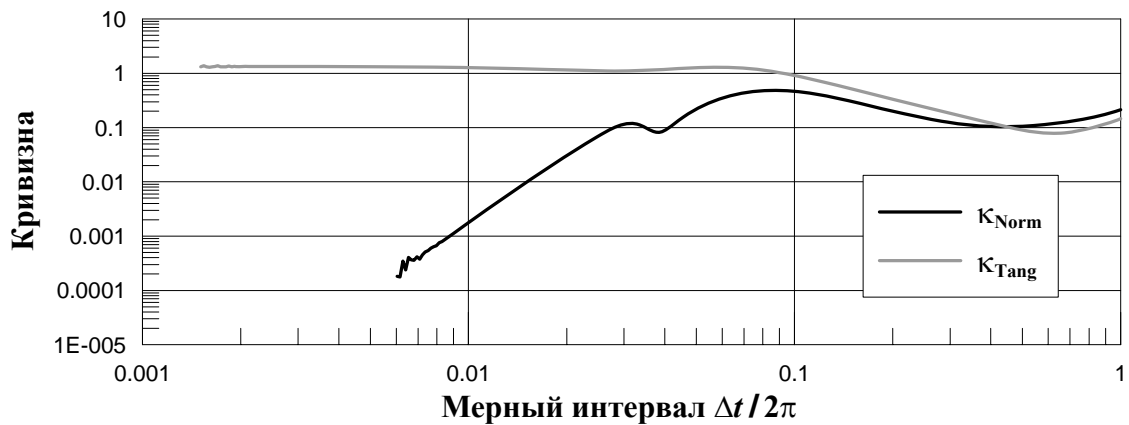


Рис. 7 — То же, что и на рис. 4, но для \dot{y}_0

4. Заключение

Таким образом, в работе формулируется проблема сильной внутренней нелинейности в обратных задачах при исследовании параметрической неопределенности стохастическими методами. Предлагается рассматривать нормальную и тангенциальную кривизну многообразия оценок в качестве показателей соответственно внутренней и внешней нелинейности.

Оценивание нелинейности обратной плоской задачи двух тел с применением предлагаемых показателей выявляет тенденцию к ослаблению нелинейности при уменьшении мерного интервала. Причем внутренняя нелинейность оказывается на несколько порядков меньше внешней, что фактически является основанием для использования так называемого метода возмущенных наблюдений в исследовании больших параметрических неопределенностей вследствие малых мерных интервалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Avdyushev V. A. // *Celest. Mech.* — 2011. — Vol. 110. — No. 4. — P. 369–388.
2. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* — Cambridge: University Press, 1987. — 499 p.
3. Draper N. R., Smith H. *Applied Regression Analysis.* — John Wiley & Sons Ltd., 1981. — 709 p.
4. Bates D. M., Watts D. G. *Nonlinear Regression Analysis and Its Applications.* — John Wiley & Sons Inc., 1988. — 365 p.
5. Beale E. M. L. // *J. R. Statist. Soc.* — 1960. — Vol. 22. — No. 1. — P. 41–88.

V.A. AVDYUSHEV

INTRINSIC NONLINEARITY IN INVERSE TWO-BODY PROBLEM

Tomsk State University, Tomsk, Russia

In the paper is stated the problem of strong intrinsic nonlinearity in inverse tasks when parametric uncertainty is investigated by stochastic methods. Normal and tangential curvatures are suggested to consider as indices of intrinsic and external nonlinearities respectively. Formulas for their numerical evaluation are given. Investigation of the nonlinearity of an inverse plane two-body problem with the use of the indices reveals a tendency to weakening of the nonlinearity with reducing of the observational time interval, and the intrinsic nonlinearity is found to be less by several orders than the external one. This is actually a ground for using the stochastic method of disturbed observations in evaluation of big parametric uncertainties owing to small observational time intervals.

Keywords: *orbital motion, inverse problem, nonlinearity.*