

УДК 521.1

В.А. АВДИУШЕВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭЛЕМЕНТАХ ПАЙНСА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОРБИТ¹

В работе представлены дифференциальные уравнения в элементах Пайнса. Исследуется их численная эффективность в ограниченной задаче трех тел. Экспериментально показано, что уравнения Пайнса позволяют повысить точность численного интегрирования орбитального движения на несколько порядков.

Ключевые слова: орбитальное движение, численное интегрирование, метод вариации постоянных, уравнения Пайнса.

1. Введение. Метод Лагранжа

Идея метода вариации произвольных постоянных впервые была предложена еще Л. Эйлером в 1748 г. [1], в частности, для исследования взаимных возмущений Юпитера и Сатурна, хотя детально метод разработал и представил его только Ж.Л. Лагранж в 1783 г. [2]. Изначально метод применялся в теории общих возмущений, хотя сейчас он успешно используется и при численном моделировании.

В методе вариации постоянных орбита представляется в невозмущенном виде, где орбитальные параметры (элементы) рассматриваются как переменные. В соответствии с формой представления орбиты составляются дифференциальные уравнения для орбитальных параметров, которые затем интегрируются приближенными методами. Следует заметить, что методику Лагранжа можно применять не только к постоянным параметрам, но также и к различным функциям этих параметров и времени. В случае малых и гладких возмущающих сил параметры — медленноменяющиеся переменные, поэтому их уравнения при использовании численных методов будут интегрироваться гораздо эффективнее, нежели классические уравнения небесной механики в прямоугольных координатах.

Рассмотрим основные положения метода Лагранжа. Предположим, что невозмущенная \mathbf{p}_k и возмущенная \mathbf{p} орбиты небесного тела описываются уравнениями первого порядка

$$\frac{d\mathbf{p}_k}{dt} = \mathbf{P}_k(t, \mathbf{p}_k), \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{P}(t, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{P}_k(t, \mathbf{p}) + \mathbf{P}(t, \mathbf{p}) - \mathbf{P}_k(t, \mathbf{p}), \quad (1)$$

причем известен закон невозмущенного движения $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k(t, \mathbf{q})$, где \mathbf{q} — орбитальные параметры суть постоянные. Представим возмущенное движение как $\mathbf{p} = \mathbf{p}_k(t, \mathbf{q})$, где, однако, орбитальные параметры уже переменные величины. Тогда

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{P}_k(t, \mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt},$$

и в соответствии с (1)

$$\frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{P}(t, \mathbf{p}) - \mathbf{P}_k(t, \mathbf{p}). \quad (2)$$

Выражая из (2) временные производные от \mathbf{q} , получим в итоге дифференциальные уравнения в орбитальных параметрах.

Метод вариации произвольных постоянных Лагранж впервые применил для получения уравнений в кеплеровских элементах [2]. При численном интегрировании они неудобны тем, что довольно сложны, содержат много тригонометрических функций и, кроме того, имеют особенность для нулевых наклонений и эксцентриситетов. Чтобы обойти эти недостатки, позже, во второй половине прошлого века, предлагались более удобные с вычислительной точки зрения уравнения, например, в элементах Роя [3], а также уравнения в регулярных SB- [4] и KS-элементах [5]. Эти уравнения достаточно широко известны в небесной механике и их эффективность хорошо

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания №2014/223 (код проекта 1567).

изучена [6]. Впрочем, незаслуженно остались за бортом весьма изящные, на наш взгляд, уравнения, предложенные С. Пайнсом еще в 1961 г. [7]. Спустя уже более полувека напомним об этих уравнениях и покажем, почему все же их забвение было действительно незаслуженным.

2. Уравнения Пайнса

Координаты и скорости на начальную эпоху также можно рассматривать как орбитальные элементы некоторой невозмущенной (кеплеровской) орбиты, оскулирующей возмущенную не только на начальную эпоху, а на какой-либо произвольный момент времени вообще. Такую систему элементов в методе вариации параметров предложил использовать С. Пайнс [7]. Выведем дифференциальные уравнения для этих столь необычных элементов.

Примем $\mathbf{p} = (\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})^T$, а $\mathbf{q} = (\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0)^T$. Дифференциальные уравнения для динамического состояния \mathbf{p} имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} + \mathbf{Q}, \quad (3)$$

где \mathbf{Q} — возмущающая сила; а μ — гравитационный параметр центральной массы, обуславливающей кеплеровское движение без наличия внешних сил. Следовательно, невозмущенные дифференциальные уравнения будут

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}.$$

Между векторами динамического состояния \mathbf{p} (или \mathbf{p}_K) и \mathbf{q} имеет место взаимоднозначное соответствие, поэтому (2) можно переписать как

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{p}_K} (\mathbf{P} - \mathbf{P}_K).$$

Поскольку $\mathbf{P} - \mathbf{P}_K = (\mathbf{0}, \mathbf{Q})^T$, получаем окончательную систему уравнений в элементах Пайнса

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \dot{\mathbf{x}}_K} \mathbf{Q}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}_0}{dt} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_0}{\partial \dot{\mathbf{x}}_K} \mathbf{Q}. \quad (4)$$

Начальные условия для этой системы очевидны.

Текущий вектор динамического состояния \mathbf{p} задается положением и скоростью на кеплеровской орбите с изменяемым начальным динамическим состоянием \mathbf{q} : $\mathbf{p} = \mathbf{p}_K(t, \mathbf{q})$, определяемым системой уравнений (4). Что касается частных производных в системе, то они задаются аналитически и получаются путем прямого дифференцирования формул задачи двух тел.

Главный недостаток системы (4), однако, является то, что с отдалением времени t от начальной эпохи t_0 частные производные возрастают и это существенно может усложнять поведение правых частей уравнений (4) даже при малых возмущающих силах \mathbf{Q} . Впрочем, разрешается этот недостаток довольно просто: как только величины правых частей уравнений при численном интегрировании становятся больше величины возмущающей силы, скажем, в несколько раз, необходимо переопределять систему (4), приняв за начальные параметры t_0 , \mathbf{x}_0 и $\dot{\mathbf{x}}_0$ их текущие аналоги t , \mathbf{x} и $\dot{\mathbf{x}}$.

3. Численные результаты

Эффективность дифференциальных уравнений Пайнса (4) исследовалась в ограниченной плоской безразмерной задаче трех тел (рис. 1). Моделировалось движение малого (третьего) тела A ($M_A \ll 1$) по почти круговой орбите единичного радиуса ($a_A \approx 1$) в поле тяготения центрального (первого) тела S единичной массы ($M_S = 1$) под действием притяжения (второго) тела J с массой $M_J = 10^{-3}$, движущегося по круговой орбите радиуса $a_J = 2.08$, на временном интервале

1000 оборотов третьего тела. Таким образом, принятая динамическая система приближенно соответствовала тройной системе Солнце–Юпитер–астероид (главного пояса).

Для сравнительного анализа численных результатов, помимо уравнений Пайнса, рассмотрены также классические уравнения небесной механики (3) и уравнения Энке [7] в возмущениях координат $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_K$ и скоростей $\delta\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_K$ относительно кеплеровской орбиты, оскулирующей возмущенную на эпоху t_0 :

$$\frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} = \delta\dot{\mathbf{x}}, \quad \frac{d\delta\dot{\mathbf{x}}}{dt} = -\frac{\mu}{|\mathbf{x}_K|^3}(\delta\mathbf{x} - D\mathbf{x}) + \mathbf{Q}, \quad D \equiv \left(1 + \frac{\zeta^2}{1+\zeta}\right) \frac{(\mathbf{x}_K + \mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}, \quad \zeta = \frac{|\mathbf{x}_K|}{|\mathbf{x}|}, \quad (5)$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{x}_K + \delta\mathbf{x}$; $\delta\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ и $\delta\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$. Все системы уравнений интегрировались численно классическим методом Рунге–Кутты (4-го порядка) с постоянным шагом $h = 2\pi/1024$. Причем в процессе интегрирования переменные Пайнса \mathbf{x}_0 и $\dot{\mathbf{x}}_0$ переопределялись на новую эпоху t_0 через каждый шаг. Во избежание больших возмущений $\delta\mathbf{x}$ и $\delta\dot{\mathbf{x}}$ подобный прием применялся для уравнений Энке (5).

Из рис. 2, где показано поведение ошибок численного интегрирования для всех систем уравнения, видно, что уравнения Пайнса позволяют повысить точность моделирования на несколько порядков. Причем эта эффективность сохраняется на протяжении всего временного интервала интегрирования. Между тем следует заметить, что эффективность интегрирования для систем уравнений Пайнса и Энке фактически одинаковая. Не удивительно, ведь это объясняется прежде всего тем, что правые части обеих систем в окрестности начальной эпохи t_0 (которая меняется на каждом шаге) ведут себя подобным образом, а именно

$$\frac{d\mathbf{x}_0}{dt} \sim \frac{d\delta\mathbf{x}}{dt} \sim \mathbf{0}, \quad \frac{d\dot{\mathbf{x}}_0}{dt} \sim \frac{d\delta\dot{\mathbf{x}}}{dt} \sim \mathbf{Q}.$$

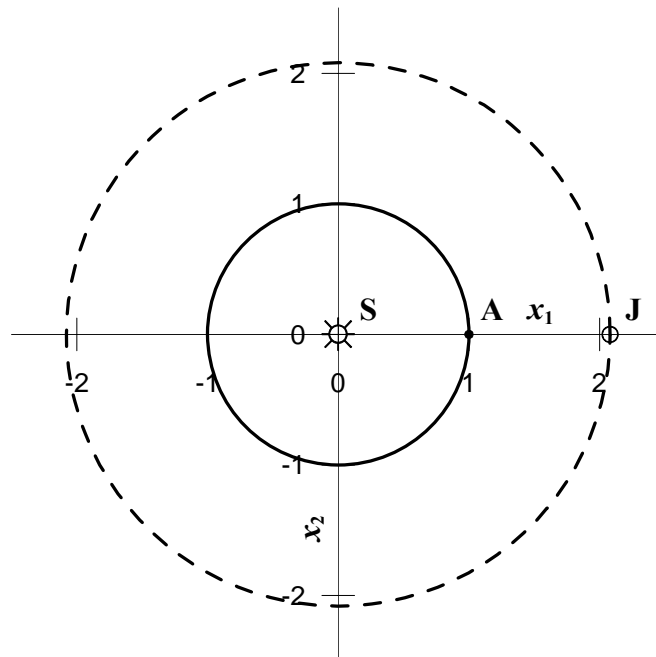


Рис. 1 — Ограниченная задача трех тел

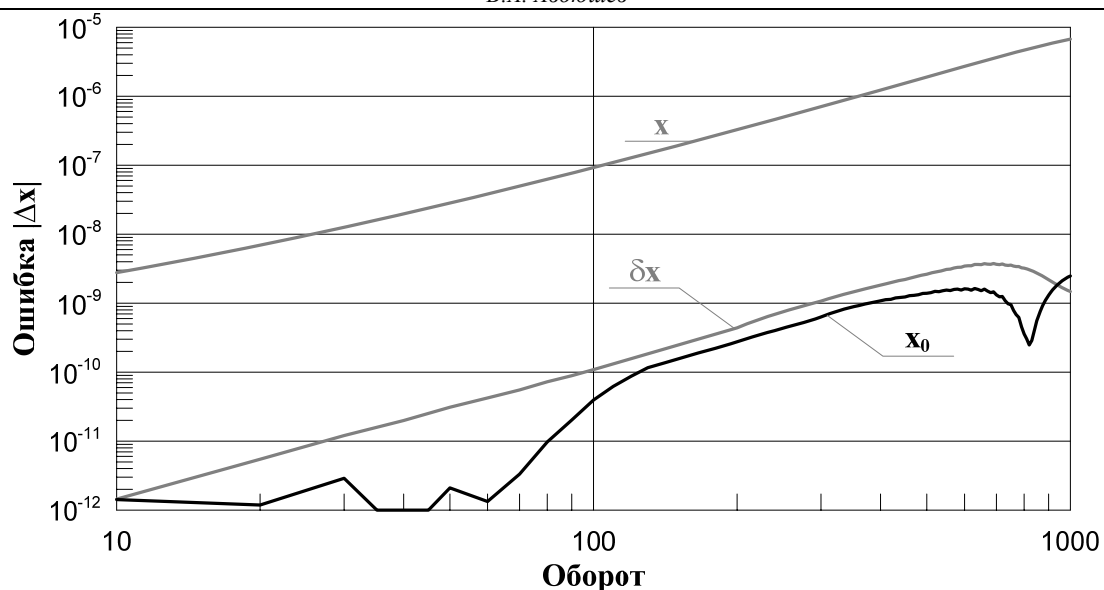


Рис. 2 — Ошибки интегрирования классических уравнений (x), а также уравнений Энке (δx) и Пайнса (x_0)

4. Заключение

Несмотря на то, что системы уравнений Пайнса и Энке одинаковы хороши с точки зрения точности численного интегрирования, следует все же признать, что первая значительно сложнее последней. Действительно, помимо кеплеровского решения x_K , которое используется в обеих системах, для составления правых частей уравнений Пайнса требуются также весьма непростые частные производные $\partial x_K(t_0)/\partial \dot{x}_K(t)$ и $\partial x_K(t_0)/\partial x_K(t)$ (от кеплеровского решения по параметрам). Впрочем, если уравнения Пайнса применяются для моделирования орбитального движения с богатым спектром возмущающих факторов, т.е. когда возмущающая функция Q достаточно сложная и она, главным образом, определяет сложность правых частей, как например в задачах динамики искусственных спутников Земли, то указанный недостаток уравнений Пайнса оказывается не столь уж значительным.

Как показывают численные результаты проведенного нами эксперимента, в решении слабо-возмущенных задач орбитальной динамики уравнения Пайнса могут представлять собой весьма эффективное подспорье и, таким образом, подход Пайнса имеет полное право занять достойное место в арсенале других подходов, составляющих неотъемлемый и широко используемый математический инструментарий в современной небесной механике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lovett E. O. // The Quart. J. of Pure and Appl. Math. — 1899. — Vol. 30. — P. 47–149.
2. Lagrange J. L. // Nouveaux memoires de l'Academie royale des sciences et belles-lettres. — 1783. — P. 296–332.
3. Рой А. Е. Движение по орбитам. — М.: Мир, 1981. — 544 с.
4. Авдюшев В. А., Бордовицына Т. В. // Изв. вузов. Физика. — 2006. — № 2. — Приложение. — С. 27–30.
5. Bordovitsyna T., Avdyushev V., Chernitsov A. // Celest. Mech. — 2001. — Vol. 80. — I. 3. P. 227–247.
6. Авдюшев В. А. Численное моделирование орбит. — Томск: Изд-во НТЛ, 2010. — 284 с.
7. Pines S. // Astron. J. — 1961. — Vol. 66. — No. 1. — P. 5–7.

V.A. AVDYSHEV

**DIFFERENTIAL EQUATIONS IN ELEMENTS OF PINES AND
THEIR APPLICATION TO NUMERICAL SIMULATION OF ORBITS**

Tomsk State University, Tomsk, Russia

Differential equations in elements of Pines are presented. Their numerical efficiency is investigated in the restricted three-body problem. It is shown experimentally that the equations of Pines allow one to improve accuracy of numerical integration of orbital motion by several orders.