ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 56. № 10/2 ФИЗИКА 2013

УДК 521.1

В.А. АВДЮШЕВ

ДВОЙНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ И ОЦЕНИВАНИЕ ЕГО НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ[1]

В работе представлен подход для моделирования составного облака неопределенности при наличии двух решений в обратных задачах спутниковой орбитальной динамики. Подход основан на нелинейной итерационной схеме статистического моделирования с поочередным использованием номинальных решений в качестве начальных приближений. Экспериментально показано, что моделирование облака неопределенности только на основе одного из двух решений может привести к невозможности отождествления спутника при его очередном наблюдении.

1. Введение

В работе [1] показано, что если параметры орбитальной модели естественного спутника определяются в рамках задачи наименьших квадратов из наблюдений, сгруппированных на малом временном интервале и покрывающих короткую орбитальную дугу, то могут иметь место два решения, одинаково хорошо представляющие наблюдательные данные. В спутниковой системе Юпитера было обнаружено несколько объектов, орбиты которых не определялись однозначно. Очевидно, ими оказались относительно недавно открытые далекие спутники (семейства S/2003) с малочисленными и малоинформативными составами наблюдений.

Наблюдения содержат ошибки, которые невозможно оценить точно в силу их случайности. Они передаются определяемым параметрам, а затем параметрические ошибки — прогнозируемым положениям спутника. Впрочем, оценивание параметрических ошибок возможно посредством методов регрессионного анализа на основании каких-либо предположений о вероятностном распределении ошибок наблюдений. Чаще всего предполагают, что ошибки распределены по нормальному закону с нулевым средним.

В этом случае регрессионный анализ позволяет выделить область параметрического пространства, называемую доверительной, в которой с некоторой заданной вероятностью может содержаться точка, соответствующая истинным значениям параметров. Размер доверительной области по сути является своего рода мерой возможных параметрических ошибок, вызванных случайными ошибками наблюдений.

В линейной обратной задаче доверительная область в параметрическом пространстве представляет собой гиперэллипсоид с центром в точке, соответствующей значениям параметров, полученным из наблюдений. С уменьшением значения параметра вероятности эллипсоид стягивается к центру, с устремлением к единице — неограниченно увеличивается. В нелинейных задачах, вообще говоря, доверительная область может принимать самые причудливые формы, в особенности для больших вероятностей. Впрочем, если параметр вероятности достаточно мал, то доверительная область становится очень близкой к эллипсоиду линеаризированной задачи.

Наличие двух решений является явным свидетельством нелинейности обратной задачи. Однако в этом случае, помимо того что доверительная область будет довольно сложной, она может быть также и несвязной, что, разумеется, должно иметь место для малых значений параметра вероятности.

Построение доверительных областей в нелинейном случае — нетривиальная задача, которая к тому же неоднозначна [2]. Однако проблема оценивания параметрической неопределенности может решаться иным способом, а именно путем (нелинейного) отображения вероятностной плотности ошибок наблюдений с использованием статистического и динамического моделирования: от пространства наблюдений к пространству параметров и, если это необходимо, от последнего к иному (возможно, физическому) пространству.

2. Статистическое моделирование облака неопределенности

Часто используемый способ нелинейного отображения от пространства наблюдений к пространству параметров — это ортогональное проецирование облака виртуальных наблюдений в

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 12-02-00294-а

пространстве наблюдений на подпространство оценок, с последующим взаимооднозначным отображением в параметрическое пространство. Технически это реализуется как многократное численное решение задачи наименьших квадратов при различных выборках возмущенных наблюдений, получаемых путем внесения в реальные наблюдения случайных нормально распределенных величин с дисперсией ошибок измерений. Для каждой выборки нелинейная задача наименьших квадратов может быть представлена в виде [3]

$$\mathbf{q}:\ S(\mathbf{q}) = \| \mathbf{p}^O + \delta\mathbf{p} - \mathbf{p}^C(\mathbf{q}) \|^2 \to \min, \tag{1}$$

где $\mathbf{q}$ — вектор орбитальных параметров; $\mathbf{p}^O$ — вектор реальных наблюдений; $\mathbf{p}^C$ — представления наблюдений орбитальной моделью; $\delta\mathbf{p}$ — случайный нормально распределенный вектор с нулевым векторным средним и ковариационной (диагональной) матрицей с дисперсиями, равными среднеквадратической ошибке, которая является (несмещенной) оценкой дисперсии ошибок наблюдений. В результате отображения будем иметь облако виртуальных динамических состояний в параметрическом пространстве.

Решение нелинейной задачи (1) (минимизация целевой функции S) выполняется итерационно методами спуска, как правило, методом Гаусса–Ньютона. Поэтому для запуска итерационного процесса необходимо начальное приближение $\mathbf{q}_0$. От его выбора зависит не только то, как скоро итерации сойдутся, но и то, куда они сойдутся вообще, поскольку целевая функция может иметь множество минимумов. Для статистического моделирования облака неопределенности посредством многократного численного решения нелинейной обратной задачи (1) в качестве начального приближения выбирают решение $\hat{\mathbf{q}}$, полученное из реальных наблюдений. Но что делать, когда таких решений два: $\hat{\mathbf{q}}_1$ и $\hat{\mathbf{q}}_2$? Совершенно очевидно, что если выбирать только одно из них, то естественно в результате мы получим облако с более высокой концентрацией виртуальных динамических состояний около этого решения, нежели около другого. Тогда как при отсутствии какой-либо дополнительной информации о спутниковом движении, ожидать истинное динамическое состояние спутника около оценочных (определяемых из наблюдений) следует с равной вероятностью. В этом случае было бы вполне логичным моделировать облако неопределенности с равновероятным выбором начальных приближений между $(\mathbf{q}_0)_1 = \hat{\mathbf{q}}_1$ и $(\mathbf{q}_0)_2 = \hat{\mathbf{q}}_2$.

Впрочем, для случайного выбора начальных приближений вполне бы можно было воспользоваться информацией о качестве их представления реальных наблюдений, мерой чего обычно выступает среднеквадратическая ошибка. Иначе говоря, в случайном выборе каждому номинальному решению приписывать вероятность, пропорциональную соответствующей среднеквадратической ошибке. Возможность использования такого подхода мы рассмотрели на примере спутника S/2003 J04, для которого имеются два решения.

3. S/2003 J04

Орбитальное движение спутника моделировалось в йовицентрической геоэкваториальной системе координат с учетом гравитационного влияния Юпитера, Солнца, галилеевых спутников, а также Сатурна, Урана и Нептуна. В основу модели положены дифференциальные уравнения орбитального движения в прямоугольных координатах, которые интегрируются численно методом Эверхарта 12-го порядка [4]. Для определения правых частей уравнений координаты галилеевых спутников вычисляются из теории Леней L1 [5], а координаты Солнца и планет — из эфемериды DE405 [6]. Константы гравитационного поля Юпитера, а также массы галилеевых спутников берутся из теории Лиске E5 [7], тогда как массы сторонних планет — из DE405. Для представления наблюдений учитывается также эффект запаздывания света.

Орбитальные параметры спутника определялись из наблюдений, расположенных на сайте Центра данных естественных спутников планет (ГАИШ МГУ) [8]. Наблюдений очень мало и они распределены на короткой орбитальной дуге: в течение 27 суток 11 моментов наблюдений, поэтому орбитальные параметры спутника определяются крайне ненадежно. Этим наблюдениям соответствуют два решения $\hat{\mathbf{q}}_1$ и $\hat{\mathbf{q}}_2$. Их среднеквадратические ошибки $\hat{\sigma}_1 = 0.23''$ и $\hat{\sigma}_2 = 0.19''$ свидетельствуют о том, что решения одинаково хорошо представляют наблюдения. На рис. 1 показано поведение среднеквадратической ошибки вдоль прямой, соединяющей эти решения в параметрическом пространстве, точнее, на множестве $\mathbf{q} = \hat{\mathbf{q}}_1(1-s) + \hat{\mathbf{q}}_2 s$ (прямая Безье), где $s \in [-1, 2]$. Как видно, явно выделяются два почти равнозначных минимума ($s = 0,1$), соответствующие решениям обратной задачи.

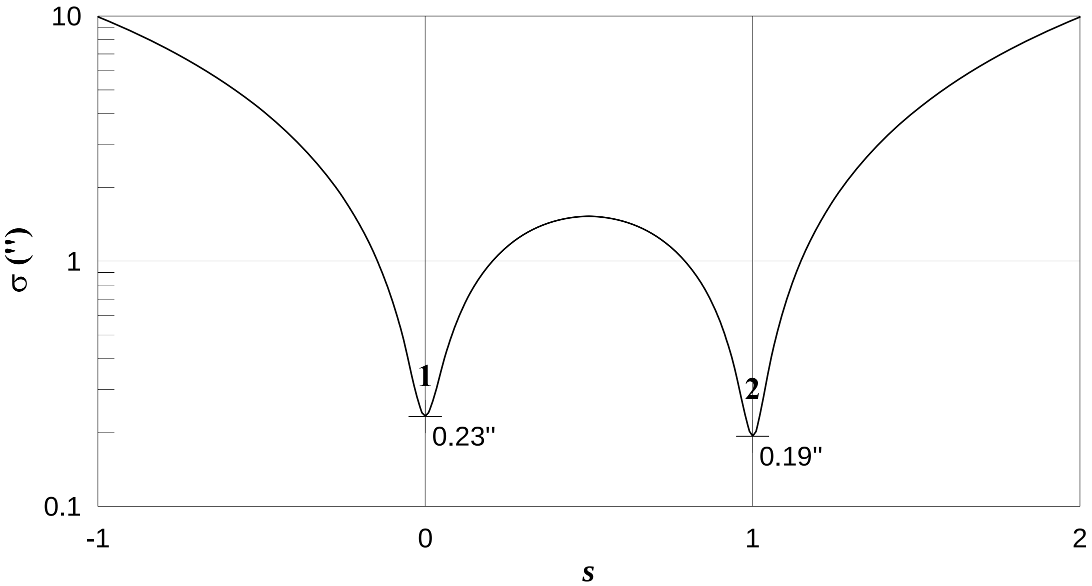

Рис. 1. Поведение среднеквадратической ошибки вдоль прямой Безье (с параметром s), проходящей через решения обратной задачи для спутника S/2003 J04

Далее мы приняли модельные представления реальных наблюдений первым решением в качестве точных, на основе которых, в свою очередь, путем внесения нормально распределенных случайных величин с дисперсией $\sigma = 0.1''$ смоделировали множество выборок наблюдений. Для каждой выборки затем получали два решения и соответствующие им среднеквадратические ошибки $\hat{\sigma}_1$ и $\hat{\sigma}_2$. Множество пар среднеквадратических ошибок показано на рис. 2 (черный цвет). Тот же эксперимент мы выполнили при использовании второго решения (серый цвет).

Из рисунка в общем видно, что значения среднеквадратической ошибки для определяемых из наблюдений орбит около истинной заметно меньше значений для альтернативных определяемых орбит, т.е. в большинстве случаев $\hat{\sigma}_1 < \hat{\sigma}_2$, когда истинные параметры $\hat{\mathbf{q}}_1$; и $\hat{\sigma}_1 > \hat{\sigma}_2$, когда истинные параметры $\hat{\mathbf{q}}_2$. Впрочем, все же среднеквадратические величины остаются одного порядка. Более того, имеются довольно много случаев, в особенности для $\hat{\mathbf{q}}_1$ (черный цвет), когда малость среднеквадратической величины не указывает на принадлежность определяемой орбиты соответствующей истинной. Таких случаев, возможно, стало бы еще больше с увеличением дисперсии ошибок моделируемых наблюдений.

Поэтому, как нам кажется, отношение среднеквадратических ошибок, вообще говоря, вряд ли можно рассматривать как надежный критерий для установления вероятностей в случайном отборе номинальных решений в качестве начальных приближений при статистическом моделировании облака неопределенности. В принципе к показаниям среднеквадратических ошибок иногда прибегать стоит, в особенности, когда они различаются существенно, в 2–4 раза. Между тем, если они отличаются в пять раз и более, то решение с большей среднеквадратической ошибкой вообще можно исключить.

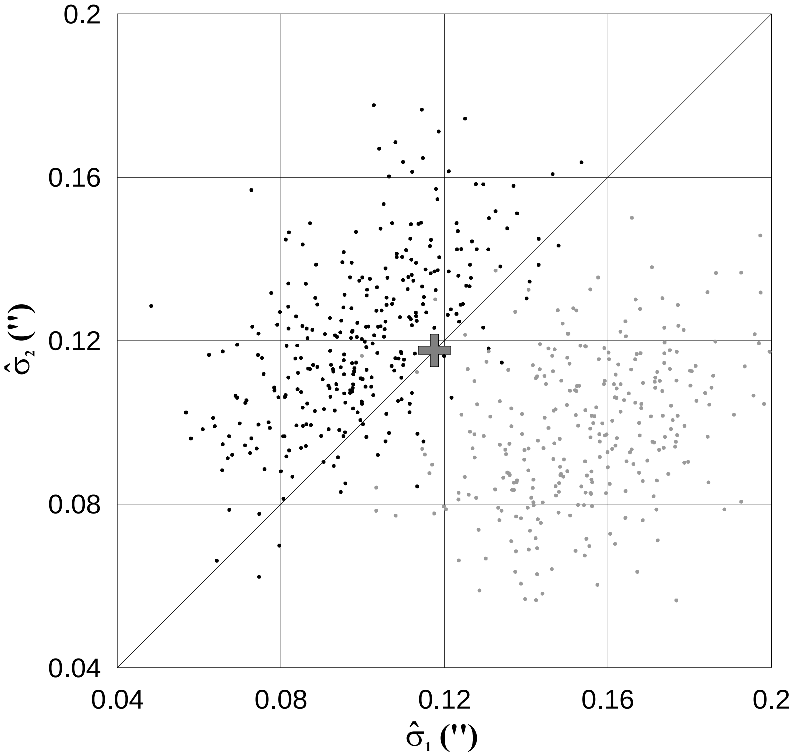

Рис. 2. Распределение возможных среднеквадратических ошибок для двух решений (черный цвет — истинные значения $\hat{\mathbf{q}}_1$; серый цвет — $\hat{\mathbf{q}}_2$). Серым крестиком указаны значения $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2$, характеризующие взаимную рассогласованность точных наблюдений для решений $\hat{\mathbf{q}}_1$ и $\hat{\mathbf{q}}_2$.

Реальные наблюдения дают два решения с близкими среднеквадратическими ошибками, поэтому при отсутствии иной информации о движении спутника можно полагать, что определяемые орбиты соответствуют истинной орбите с равными вероятностями. Методом возмущенных наблюдений (1) мы смоделировали два облака неопределенности по 1000 виртуальных динамических состояний с поочередным использованием начальных приближений $\hat{\mathbf{q}}_1$ и $\hat{\mathbf{q}}_2$. Виртуальные спутники в физическом пространстве на начальный момент времени (внутри временного интервала наблюдений) представлены на рис. 3. Как видно, виртуальные спутники располагаются на одной прямой, соединяющей два номинальных положения. Таким образом, составное облако неопределенности вытягивается вдоль направления на Землю, что как раз обусловлено недостатком наблюдательной информации вдоль радиальной составляющей от Земли на спутник.

Черное облако на рисунке построено при начальном приближении $\hat{\mathbf{q}}_1$, тогда как серое — при $\hat{\mathbf{q}}_2$. Следовательно, если получено только одно решение и соответствующее ему облако неопределенности, то вполне возможно в будущем оно окажется в отрыве от реальных положений спутника, и при его очередном наблюдении он может быть не отождествлен. На рис. 4, например, видно, насколько удалено номинальное положение 2, соответствующее второму решению $\hat{\mathbf{q}}_2$, от облака первого решения $\hat{\mathbf{q}}_1$ при прогнозе движения только через оборот. Поскольку облако неопределенности дискретно описывает вероятностное распределение возможных положений спутника, то получается, что появление спутника в окрестности номинального положения 2 с точки зрения описания вероятностной плотности облаком первого решения оказывается совершенно невозможным или, точнее, чрезвычайно маловероятным событием.

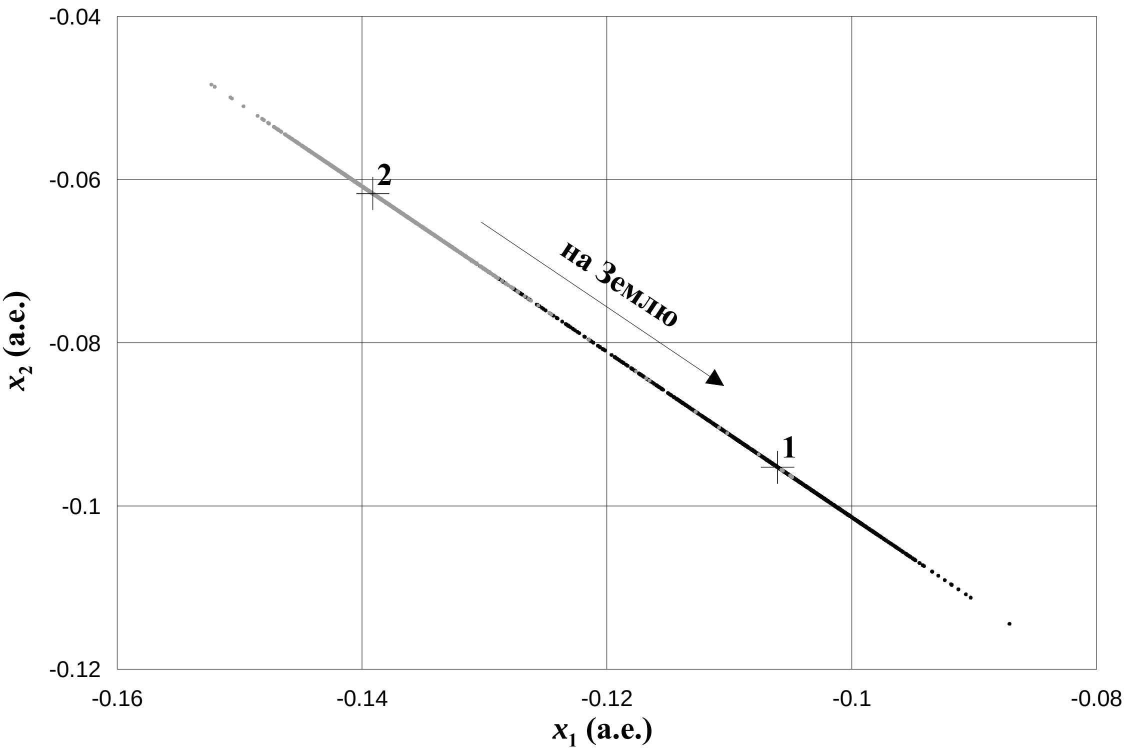

Рис. 3. Начальное облако виртуальных спутников

4. Заключение

Таким образом, в работе представлен подход для моделирования составного облака неопределенности при наличии двух решений в обратных задачах спутниковой орбитальной динамики. Подход основан на нелинейной схеме статистического моделирования с поочередным использованием номинальных решений в качестве начальных приближений. Частоты выбора начальных приближений могут приниматься в зависимости от взаимного отношения среднеквадратических ошибок, соответствующих номинальным решениям. Предлагаемый подход опробован на примере спутника Юпитера S/2003 J04. В частности, экспериментально показано, что моделирование облака неопределенности только на основе одного решения может привести к невозможности отождествления спутника при его очередном наблюдении.

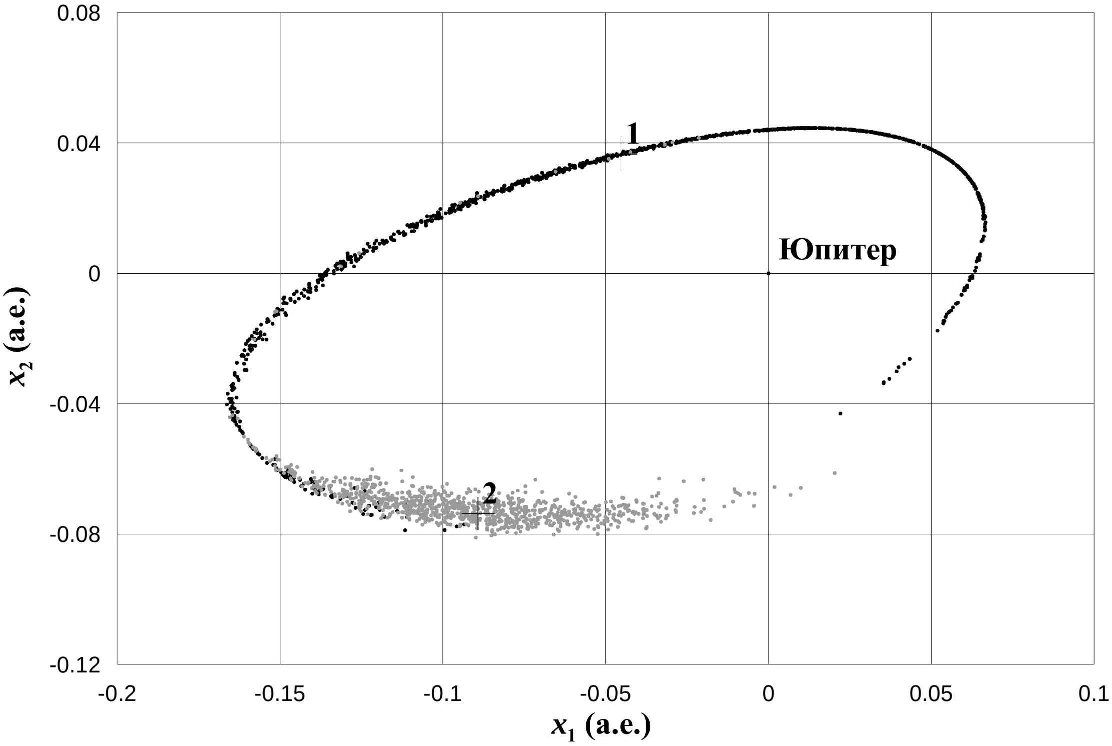

Рис. 4. Облако виртуальных спутников через один оборот

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдюшев В.А., Баньщикова М.А. // Изв. вузов. Физика. 2010. № 10. С. 27–30.
2. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 282 с.
3. Avdyushev V.A. // Celest. Mech. 2011. Vol. 110. No. 4. P. 369–388.
4. Авдюшев В.А. // Вычисл. технологии. 2010. Т. 15. № 4. С. 31–47.
5. Lainey V., Duriez L., Vienne A. // Astron. Astrophys. 2004. Vol. 420. P. 1171–1183.
6. Standish E.M. // Interof. Memor. 1998. Vol. 312. F-98-048. P. 1–18.
7. Lieske J.H. // Astron. Astrophys. 1998. Vol. 129. P. 205–217.
8. Arlot J.-E., Emelyanov N.V. // Astron. Astrophys. 2009. Vol. 503. I. 2. P. 631–638.

V.A. AVDYSHEV

DOUBLE SOLUTION OF ORBITAL DYNAMICS INVERSE PROBLEM AND ESTIMATION OF ITS UNCERTAINTY

In the paper is presented an approach for simulating a compound cloud of uncertainty if there exist two solutions to a satellite orbital dynamics inverse problem. The approach is based on a nonlinear iterative scheme of statistic simulation with alternate using the nominal solutions as initial estimates. It is shown experimentally that simulating the cloud of uncertainty based only one of two solutions can result in the impossibility of identification of the satellite by its next observations.