ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
Т. 55. № 10/2 ФИЗИКА 2012

УДК 521.1

В.А. АВДЮШЕВ

ЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИИ ЛОКАЛЬНОЙ ОРБИТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ[1]

В работе рассматриваются несколько приложений линейных отображений орбитального движения для определения некоторых динамических характеристик. Предлагается основанный на линейных отображениях эффективный метод для быстрого оценивания вероятности попадания небесного объекта в малый объем с сингулярностью и без.

1. Введение

В численном решении обратной задачи орбитальной динамики, иначе говоря, при определении орбиты небесного тела из астрометрических наблюдений неизменно требуются так называемые изохронные производные от наблюдаемых величин по определяемым орбитальным параметрам. Они вычисляются либо посредством численного интегрирования дифференциальных уравнений в вариациях, либо через разделенные разности. В прямых задачах изохронные производные обычно не используются, однако порой они могут быть весьма полезными для получения некоторой дополнительной информации о тех или иных свойствах орбитального движения. В работе рассматриваются несколько небесно-механических приложений изохронных производных: это — временной перенос доверительной области, вычисление ляпуновских показателей, а также быстрое оценивание вероятности попадания небесного объекта в малый объем пространства.

2. Линеаризация

Допустим, орбита исследуемого небесного тела с орбитальными параметрами $\hat{\mathbf{q}}$ известна и в некотором L-мерном пространстве $\mathbf{p}$ она описывается формулами

$$\mathbf{p}^C = \mathbf{p}^C(t, \hat{\mathbf{q}}).$$

Тогда орбиту любого близкого попутчика с параметрами $\mathbf{q}$ приближенно (с точностью до малых первого порядка) можно представить в виде

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^C(t, \hat{\mathbf{q}}) + \left.\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}}\right|_{t,\hat{\mathbf{q}}} (\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}), \tag{1}$$

где $\partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$ — изохронные производные.

Таким образом, механический смысл выражения (1) состоит в том, что оно описывает локальную динамику около номинальной орбиты $\hat{\mathbf{q}}$, и чем ближе к номинальной орбите, тем лучше. Поэтому очевидное назначение (1) — это отображение близких (к номинальному) возможных положений небесного тела на заданные моменты времени. Далее рассмотрим некоторые ситуации, когда целесообразно прибегать к линейным отображениям.

3. Временной перенос доверительной области

Линейные отображения могут служить полезным подспорьем для исследования эволюции малых доверительных областей, а также компактных разбросов возможных значений параметров. Предположим, доверительная область, характеризующая параметрическую неопределенность в $\mathbf{q}$, настолько мала, что может рассматриваться как гиперэллипсоид, описываемый ковариационной матрицей $\mathbf{C}_\mathbf{q}$ посредством уравнения [1]

$$(\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q})^T \hat{\mathbf{C}}_\mathbf{q}^{-1} (\hat{\mathbf{q}} - \mathbf{q}) \le \kappa^2,$$

где $\kappa^2 = K F_{K,N-K,\alpha}$; K — размерность вектора параметров $\mathbf{q}$; N — количество измерений, используемых для определения параметров; $F_{K,N-K,\alpha}$ — α-квантиль функции вероятности Фишера

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 11-02-00918-а

со степенями свободы K и $N-K$. Такая доверительная область будет содержать в параметрическом пространстве точку, соответствующую истинным значениям параметров, с вероятностью α.

Тогда, согласно линейному преобразованию (1), неопределенность в величинах $\mathbf{p}$, порождаемая неопределенностью в параметрах $\mathbf{q}$, на заданные моменты времени t будет приближенно описываться доверительным эллипсоидом с центром $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^C(t, \hat{\mathbf{q}})$ и ковариационной матрицей

$$\mathbf{C}_{\mathbf{p}} = \left.\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}}\right|_{t,\hat{\mathbf{q}}} \mathbf{C}_{\mathbf{q}} \left.\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}}\right|_{t,\hat{\mathbf{q}}}^T . \tag{2}$$

Производные $\partial \mathbf{p}^C / \partial \mathbf{q}$ в (2) вычисляются через $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{q}$, которые, в свою очередь, определяются из дифференциальных уравнений в вариациях. Таким образом, для исследования эволюции доверительного эллипсоида, как и при решении обратной задачи, необходимо численно интегрировать расширенную систему уравнений

$$\frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{x}}{\mathrm{d} t^2} = \mathbf{P}, \quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d} t^2}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{q}},$$

где $\mathbf{P}$ — результирующий вектор сил, действующих на исследуемое небесное тело.

Со временем значения изохронных производных, как правило, возрастают, и это свидетельствует об увеличении доверительной области, что сопряжено с усилением эффекта нелинейности, вызванного нелинейностью орбитальной модели. Поэтому нужно ясно осознавать, что какой бы малой ни была изначально доверительная область, линейные отображения (1) пригодны лишь на умеренных интервалах времени, когда нелинейность слаба. На длительных же интервалах получаемая ковариационная матрица $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}$ (2) будет грубо описывать доверительную область, хотя в некоторых случаях доставляемая ею информация бывает вполне достаточной для качественного представления неопределенностей в орбите.

Разумеется, ковариационная матрица $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}$ применима не только для описания доверительной области, но и для статистического моделирования возможных положений в пространстве $\mathbf{p}$ с использованием линейной схемы [2]

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{1/2} \mathbf{v}_L, \tag{3}$$

где $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{1/2}$ — матрица Холецкого, для которой $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{1/2} (\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{1/2})^T = \mathbf{C}_{\mathbf{p}}$, а $\mathbf{v}_L$ — случайный стандартный нормально распределенный L-мерный вектор.

Однако с вычислительной точки зрения, если требуются оценки на многочисленные моменты времени, проще осуществлять временной перенос уже смоделированных возможных значений параметров $\mathbf{q}$ линейными отображениями (1), нежели моделировать разброс величин $\mathbf{p}$, постоянно перевычисляя матрицу Холецкого $\mathbf{C}_{\mathbf{p}}^{1/2}$ для схемы (3) на каждый момент времени.

4. Вычисление ляпуновских показателей

Поскольку изохронные производные хорошо описывают локальную динамику около номинальной орбиты, они могут быть полезны для определения скорости разбегания возможных бесконечно близких положений, что бывает необходимо при вычислении ляпуновских показателей с целью выявления хаоса в орбитальном движении.

Показатель Ляпунова χ определяется как [3]

$$\chi(t) = \frac{\ln \| \Delta \mathbf{p}(t) \| / \| \Delta \mathbf{p}(t_0) \|}{t - t_0}, \tag{4}$$

где $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}$ — отклонение смежного возможного положения от номинального, которое вызвано вариацией параметров модели $\hat{\mathbf{q}}$. Если $\chi \to \mathrm{const}$ при $t \to \infty$, орбита — хаотична, и в этом случае показатель Ляпунова (4) будет представлять собой скорость экспоненциального разбегания возможных положений.

Чтобы точнее определить скорость разбегания, вариации параметров должны быть достаточно малыми. Между тем они должны быть достаточно большими, чтобы вычислительные ошибки не влияли существенно на оценку скорости. Эта дилемма разрешается, если прибегнуть к линейным отображениям.

Поскольку величина $\Delta\mathbf{p}$ должна быть малой, то для ее оценки можно воспользоваться формулой (1) и тогда

$$\frac{\|\Delta\mathbf{p}(t)\|}{\|\Delta\mathbf{p}(t_0)\|}=\frac{\|(\partial\mathbf{p}^C/\partial\mathbf{q})_{t,\hat{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})\|}{\|(\partial\mathbf{p}^C/\partial\mathbf{q})_{t_0,\hat{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})\|}. \qquad (5)$$

В свою очередь, для вычисления этого отношения требование малости отклонений уже не обязательно.

Обычно при исследовании орбитального движения на предмет хаотичности $\mathbf{p}=(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})^T$ и $\mathbf{q}=(\mathbf{x}_0,\dot{\mathbf{x}}_0)^T$ — векторы динамического состояния на текущий момент времени t и начальный t_0 соответственно. Тогда матрица изохронных производных становится не чем иным, как матрицей перехода [4]

$$\frac{\partial\mathbf{p}^C}{\partial\mathbf{q}}=\mathbf{\Phi}(t,t_0)=\begin{pmatrix}\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0 & \partial\mathbf{x}/\partial\dot{\mathbf{x}}_0\\ \partial\dot{\mathbf{x}}/\partial\mathbf{x}_0 & \partial\dot{\mathbf{x}}/\partial\dot{\mathbf{x}}_0\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что величина отношения (5) зависит от выбора вариации $\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}}$, однако для определения ляпуновского показателя имеет смысл использовать максимальную величину, которая фактически является нормой матрицы перехода [5]:

$$\max_{\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}}}\frac{\|\Delta\mathbf{p}(t)\|}{\|\Delta\mathbf{p}(t_0)\|}=\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\|.$$

Вычисление нормы симметричной матрицы на практике не составляет особого труда, но матрица перехода $\mathbf{\Phi}$ не симметрична. Чтобы найти ее норму, можно прибегнуть к симметризации $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}$. Корень из максимального собственного числа $\lambda_{\max}$ симметричной матрицы $\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}$ как раз и будет нормой матрицы перехода $\mathbf{\Phi}$. Тогда показатель Ляпунова можно переопределить как [6]

$$\chi(t)=\frac{\ln\sqrt{\lambda_{\max}}}{t-t_0}.$$

Для простоты вычислений вполне допустимо в качестве матрицы $\mathbf{\Phi}$ рассматривать матрицу производных $\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0$ в предположении, что, возникнув в фазовом пространстве, хаос непременно даст о себе знать и в физическом.

5. Оценивание вероятности попадания объекта в малый объем

Имея множество возможных значений параметров, можно непосредственно вычислить вероятность нахождения истинных значений в любом ограниченном объеме параметрического пространства как отношение числа возможных решений, попавших в объем, к общему числу. Очевидно, чем больше используемых решений, тем точнее будет оценка вероятности. Когда разброс возможных решений описывается в рамках линейной обратной задачи, никаких серьезных затруднений не возникает: используя лишь ковариационную матрицу для формирования разброса, можно достаточно быстро получить нужное число решений для оценивания искомой вероятности с заданной точностью.

Проблема возникает при сильной нелинейности, что предполагает многократное численное решение нелинейной обратной задачи. Более того, ситуация усугубляется, если на основе построенного разброса значений орбитальных параметров, отнесенного на начальный момент времени, требуется определить вероятность попадания небесного тела в ограниченный объем какого-либо другого, непараметрического пространства на некоторый удаленный от начального момент времени. Это, например, часто необходимо в задачах астероидной опасности для оценки вероятности столкновения астероида с Землей, либо может быть полезным при планировании наблюдений объекта в будущем для оценки вероятности появления объекта на наблюдаемом участке неба. Отображение разброса возможных решений в заданное пространство и на заданный момент времени осуществляется на основе численного моделирования орбитального движения, что с необходимость предполагает пошаговое численное интегрирование, требующее значительных затрат процессорного времени. К тому же на практике рассматриваемые объемы, как правило, очень малы, что, разумеется, сопряжено с малыми вероятностями попадания в них объектов. Следовательно, вычисление таких вероятностей должно быть чрезвычайно трудоемким, поскольку оно фактически выполнимо лишь при наличии весьма большого количества возможных решений.

Для разрешения указанных трудностей можно использовать быстрые отображения типа (1). Вследствие того, что эти отображения приближенные, их оценки вероятности могут не совпадать с оценками, получаемыми при использовании исходных орбитальных моделей, хотя различия в них могут быть практически незначительными. Тем не менее, если все же, скажем, в задачах астероидной опасности требуется точная оценка, то быстрые отображения, по крайней мере, можно использовать для предварительного отбора потенциально опасных возможных решений, увеличив в несколько раз область-мишень. Конечно, в этом случае численного интегрирования орбит не избежать, однако их будет уже существенно меньше, нежели всех возможных орбит.

Предположим, используя модель движения $\mathbf{p}^C(t,\mathbf{q})$, необходимо оценить вероятность попадания объекта в малый объем $V_\mathbf{p}$ в L-мерном пространстве $\mathbf{p}$ на момент времени t_1, когда на момент t_0 известен вероятностный разброс K-мерного параметрического вектора $\mathbf{q}$, который хорошо описывается ковариационной матрицей. При этом возможные движения внутри малого объема $V_\mathbf{p}$ происходят почти прямолинейно и равномерно.

Для определения плотности возможных положений объекта в области $V_\mathbf{p}$ на момент t_1 на основе начального вероятностного разброса $\mathbf{q}$ воспользуемся линейным отображением, сконструированным относительно точки $\mathbf{q}^*$ (целевая орбита), являющейся прообразом некоторой точки $\mathbf{p}^* \in V_\mathbf{p}$. Вообще говоря, точка $\mathbf{q}^*$ не является единственной, поскольку прообразом точки $\mathbf{p}^*$ в параметрическом K-мерном пространстве является некое $(K-L)$-мерное подпространство целевых орбит. Резонным было бы выбрать на нем ту точку $\mathbf{q}^*$, в которой плотность множества возможных значений параметров максимальна. Такая точка должна доставлять минимум квадратичной формы

$$Q(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})^T \mathbf{Q}(\mathbf{q}-\hat{\mathbf{q}})$$

на подпространстве прообразов. Здесь $\mathbf{Q}$ — нормальная матрица обратной задачи. Таким образом, отыскание прообраза $\mathbf{q}^*$ фактически сводится к задаче условной минимизации функции Q по $\mathbf{q}$, где в качестве ограничения выступает векторное равенство $\mathbf{p}^C(t_1,\mathbf{q}) = \mathbf{p}^*$. В свою очередь, решение этой задачи находится из минимизации функции Лагранжа [7]

$$\Lambda(\mathbf{q}) = Q(\mathbf{q}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\mathbf{p}^C(t_1,\mathbf{q}) - \mathbf{p}^*) \tag{6}$$

по параметрическому вектору $\mathbf{q}$ и L-мерному вектору множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$, для чего можно воспользоваться методом Гаусса–Ньютона с начальным приближением $\hat{\mathbf{q}}$.

Наконец, пользуясь линейным отображением $\mathbf{q}(t_0) \to \mathbf{p}(t_1)$:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^* + \left.\frac{\partial \mathbf{p}^C}{\partial \mathbf{q}}\right|_{t_1, \mathbf{q}^*} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^*), \tag{7}$$

для каждого возможного $\mathbf{q}$ вычисляем $\mathbf{p}$ и регистрируем попадание отображенного положения в объем $V_\mathbf{p}$, т.е. выполнение условия $\mathbf{p} \in V_\mathbf{p}$. Отношение числа возможных решений, для которых это условие выполняется, к их общему числу будет давать статистическую оценку вероятности попадания объекта в малый объем $V_\mathbf{p}$ на момент t_1.

Рассмотрим теперь особый случай, когда $\mathbf{p} = \mathbf{x}$ и любое возможное движение объекта в объеме $V_\mathbf{p}$ существенно отличается от прямолинейного и равномерного вследствие наличия в нем гравитирующей материальной точки (сингулярности). Это типично имеет место при оценивании вероятности столкновения астероида с планетой. Очевидно, что в данном случае использование линейных преобразований типа (7) уже будет необоснованным, каким бы малым не был объем $V_\mathbf{p}$, содержащий сингулярность.

Явление тесного сближения астероида с планетой, как правило, кратковременно. Несмотря на это, оно приводит к серьезной трансформации астероидной орбиты. Между тем движение астероида во время сближения происходит главным образом под влиянием массивной планеты, поэтому оно достаточно хорошо может быть описано простыми (нелинейными) формулами задачи двух тел. Эта особенность указывает на целесообразность применения составного отображения для разрешения проблемы сильной нелинейности, вызванной сингулярностью.

Составной подход состоит в том, что до тесного сближения облако виртуальных астероидов отображается линейно по формулам (7), тогда как во время сближения — нелинейно по формулам задачи двух тел. Сфера влияния планеты может рассматриваться как область сильной нелинейности. Тогда t_1 в (7) будет моментом времени прохождения номинального астероида с орбитальными параметрами $\mathbf{q}^*$ через сферу влияния.

Для функции Лагранжа, очевидно, следует принять ограничение

$$|\,\mathbf{p}^C(t_1, \mathbf{q}) - \mathbf{p}^*\,|^2 = b_S^2,$$

где $\mathbf{p}^*$ — положение планеты в физическом пространстве, а b_S — радиус сферы влияния. Следовательно, имеем целевую функцию

$$\Lambda(\mathbf{q}) = Q(\mathbf{q}) + \lambda(|\,\mathbf{p}^C(t_1, \mathbf{q}) - \mathbf{p}^*\,|^2 - b_S^2). \tag{8}$$

Проблема, однако, состоит в том, что итерационные методы, минимизирующие функцию (8), вследствие сильной нелинейности чрезвычайно плохо сходятся, и практически редко удается найти номинальные значения параметров $\mathbf{q}^*$. Впрочем, они могут быть определены иным способом.

Возьмем сначала в качестве $\mathbf{q}^*$ вектор оценок $\hat{\mathbf{q}}$ и выполним интегрирование орбиты до момента времени t_1, когда либо будет достигнуто минимальное расстояние до планеты, либо номинальный астероид пересечет сферу влияния. На этот момент отображаем начальное облако виртуальных астероидов по формулам (7). Находим среди отображенных астероидов тот, который максимально близок к центру планеты. Выбираем теперь его параметры в качестве номинальных, и повторяем описанные действия. И так далее до тех пор, пока до и после очередной итерации не получим те же самые номинальные значения параметров. Собственно, на этом этапе уже нужны не столько они, сколько линейно отображенное относительно них облако виртуальных астероидов, которое впоследствии отображается нелинейно по формулам задачи двух тел. Как показывает практика, поиск номинальных значений параметров на множестве возможных обычно требует всего несколько итераций, поэтому составное отображение может быть весьма востребованным для оперативного определения вероятности столкновения астероида с планетой, в особенности, если эта вероятность достаточно мала, а столкновение ожидается в неблизком будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Draper N.R., Smith H. Applied Regression Analysis. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1981. 709 p.
2. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. Томск: Изд-во НТЛ, 2010. 282 с.
3. Murray C.D., Dermott S.F. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 592 p.
4. Montenbruck O., Gill E. Satellite Orbits: Models, Methods and Applications. Springer Verlag, Heidelberg, 2000. 369 p.
5. Lekien F., Ross S.D. // Chaos. 2010. Vol. 20. P. 017505.
6. Ross S.D., Tallapragada P. // Applications of Chaos and Nonlinear Dynamics in Science and Engineering / ed. by S. Banerjee et al. Springer, 2012. Vol. 2. P. 155–183.
7. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.

V.A. AVDYSHEV

LINEAR MAPPING IN EXPLORING LOCAL ORBITAL DYNAMICS

In the paper are considered several applications of orbital motion linear mappings for determining some dynamical characteristics. An efficient method based on the linear mapping is proposed for quick estimating the probability that a celestial body can get into a small volume with a singularity.