В.А.Авдюшев

Численное моделирование движения галилеевых спутников Юпитера

 УДК 523.24

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики, Томск

На основе регуляризирующих и стабилизирующих преобразований Кустаанхеймо-Штифеля построена численная модель движения галилеевых спутников Юпитера. По аналитической теории Лиске получена и улучшена система начальных параметров численной модели движения спутников. Оценки точности численной модели на интервале времени от 1926 до 2026 г. составили (в а.е.) соответственно для Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто $\Delta r_1 = 7.8 \cdot 10^{-12}$, $\Delta r_2 = 6.2 \cdot 10^{-12}$, $\Delta r_3 = 5.8 \cdot 10^{-12}$, $\Delta r_4 = 3.7 \cdot 10^{-12}$, *а расхождения результатов численного моделирования с теорией Лиске* $\Delta r_1 = 4.358 \cdot 10^{-6}$, $\Delta r_2 = 6.023 \cdot 10^{-6}$, $\Delta r_3 = 7.436 \cdot 10^{-6}$, $\Delta r_4 = 7.411 \cdot 10^{-6}$.

Введение

Для исследования движения и вычисления эфемерид близких спутников планет традиционно применяются аналитические методы. Численные методы, несмотря на универсальность и простоту реализации, практически не используются для этих целей.

Главной особенностью движения близких спутников планет являются большие величины среднего движения этих объектов. Принято считать, что на интервалах времени в 100 и более лет, охваченных наблюдениями, численные методы не способны обеспечить точность прогнозирования движения, сравнимую с точностью наблюдений. По-видимому, это мнение оправдано при использовании в численном моделировании классических уравнений небесной механики, которые сингулярны в окрестности начала координат, а их решения неустойчивы по Ляпунову.

Как известно, устранить или хотя бы ослабить влияние этих факторов на процесс численного интегрирования позволяют преобразования Кустаанхеймо-Штифеля (KS) (Штифель, Шейфеле, 1975), приводящие уравнения движения к виду уравнений возмущенного гармонического осциллятора в четырехмерном параметрическом KS-пространстве.

Исследования показали (Бордовицына и др., 1998), что построение в KS-пространстве алгоритмов типа Энке, использующих в качестве опорного движения решение уравнений невозмущенного гармонического осциллятора и его модификаций, позволяет создать алгоритмы эффективные по точности и быстродействию на интервалах времени порядка десятков тысяч оборотов объекта.

В настоящей работе такого типа алгоритмы используются для численного моделирования движения галилеевых спутников Юпитера.

Аналитическая теория движения галилеевых спутников Лиске

К настоящему времени разработан ряд аналитических теорий галилеевых спутников, среди которых наиболее известны такие как теория Сэмпсона, Тиссерана, Лиске (Феррас-Меллу, 1983).

Таблицы Сэмпсона для четырех больших спутников, опубликованные в 1910 г., в течение многих лет служили единственным источником для предвычисления физических явлений и положений спутников. Теория и таблицы Сэмпсона заново пересмотрены Лиске (Лиске, 1974, 1977). На сегодняшний день пакет подпрограмм Лиске для вычисления эфемерид спутников является наилучшим.

Программное обеспечение Лиске производит алгебраические действия над рядами Пуассона вида

$$F(p,\theta) = \sum C_{ij} p_1^{i_1} \dots p_{73}^{i_{73}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (j_1\theta_1 + \ldots + j_{28}\theta_{28}),$$

представляющими решение уравнений движения в аналитической форме, где p_k — 73 различных полиномиальных переменных, $0 \le i_k \le 3$, а θ_k — 28 различных тригонометрических переменных, $-15 \le j_k \le 15$.

Путем использования алгебраических выкладок на ЭВМ Лиске уточнена теория Сэмпсона галилеевых спутников. Основная особенность теории Лиске состоит в том, что она позволяет легко проводить уточнение констант и произвольных параметров теории по данным наблюдений.

Методом Сэмпсона Лиске выводит аналитические выражения для координат спутников и их частных производных и производит переопределение констант новых теорий с целью лучшего представления наблюдений. Совокупность параметров теории постоянно обновляется с включением в обработку данных новых наблюдений. Последняя совокупность параметров E-5 (Лиске, 1998) была получена по наблюдениям взаимных явлений и покрытий до 1995 года.

Эфемерида E-5 и была использована нами для определения начальных параметров движения численной модели и последующего сопоставления с любезного разрешения Дж.Лиске.

Уравнения движения спутников в переменных Кустаанхеймо-Штифеля

Будем рассматривать систему галилеевых спутников как совокупность четырех точечных масс, движущихся в поле тяготения Юпитера с учетом второй и четвертой зональных гармоник, под влиянием возмущений от Солнца, Сатурна и взаимного притяжения.

В йовицентрической системе координат, связанной с плоскостью экватора Земли эпохи 1950 года (2433282.4234 JD), дифференциальные уравнения движения спутника в KS-элементах имеют вид (Авдюшев, 1997)

$$\frac{dq}{dE} = R\left(\frac{E}{2}\right)Q, \quad \frac{dt}{dE} = \frac{r}{2\omega}, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\alpha_0 = \alpha(0), \quad \beta_0 = \beta(0), \quad \omega_0 = \omega(0),$$

где $q = (\alpha, \beta, \omega)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)^T$, $\omega = \sqrt{h/2}$ —

регулярные KS-элементы ($-h$-полная энергия),

$$h = \frac{\mu}{r} - \frac{\dot{x}^2}{2} - V,$$
$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$Q = (Q_1, Q_2, Q_3)^T$ — вектор возмущений, компоненты которого Q_1, Q_2 — четырехмерные вектора, а Q_3 — скаляр:

$$Q_1 = 0,$$
$$Q_2 = -\frac{r}{4\omega^2} L^T(u) \left[V\frac{x}{r^2} + \frac{\partial V}{\partial x} - P + \frac{2\dot{x}}{r}\frac{d\omega}{dE} \right],$$
$$Q_3 = -\frac{r}{8\omega^2} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (\dot{x}, P) \right),$$

$L(u)$ — преобразование Кустаанхеймо-Штифеля, V — возмущающий потенциал, P — силы, не имеющие потенциала, $x = (x_1, x_2, x_3, 0)^T$ — вектор положения, r — модуль вектора положения, $E = 2\omega s$ — возмущенная эксцентрическая аномалия (s — фиктивное время), t — физическое время, $\mu = k^2(M + m), k^2$ — универсальная гравитационная постоянная, M — масса Юпитера, m — масса спутника.

Тогда система дифференциальных уравнений, описывающих движение совокупности галилеевых спутников, запишется следующим образом

$$\frac{dq_i}{dE_i} = R\left(\frac{E_i}{2}\right) Q_i, \qquad (2)$$
$$\frac{dt}{dE_i} = \frac{r_i}{2\omega_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Индекс i обозначает переменную i-го спутника: 1 — Ио, 2 — Европа, 3 — Ганимед, 4 — Каллисто.

При численном интегрировании дифференциальных уравнений все производные в левых частях должны быть отнесены к одной независимой переменной. Выберем в качестве таковой обобщенную эксцентрическую аномалию спутника Ио E_1. Так как движение спутников рассматривается в одном физическом времени, их эксцентрические аномалии будут связаны дифференциальными соотношениями

$$dE_i = \frac{r_1\omega_i}{\omega_1 r_i} dE_1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \qquad (3)$$

Применяя соотношение (3) к дифференциальным уравнениям (2), преобразуем систему к виду

$$\begin{gathered}\frac{dq_i}{dE_1} = \varepsilon_i^* R\left(\frac{E_i}{2}\right) Q_i,\\ \frac{dt}{dE_1} = \frac{r_1}{2\omega_1},\\ \frac{dE_i}{dE_1} = \frac{r_1\omega_i}{\omega_1 r_i} = \varepsilon_i^*, \quad i = 1, 2, 3, 4.\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнения (4) полностью определяют динамическую систему и задают семейство решений, которые в зависимости от начальных параметров однозначно представляют движение галилеевых спутников.

Модель возмущающих сил

Движение галилеевых спутников определяется в основном гравитационным притяжением планеты, рассматриваемой как точечная масса, возмущениями от взаимодействия спутников друг с другом, несферичностью центральной планеты, а также силами притяжения Солнца и Сатурна. Кроме того, возмущения от несферичности центрального тела зависят от ориентации его экватора, движение которого обусловлено действием Солнца и спутников, поэтому при моделировании возмущений необходимо учитывать прецессионное движение полюсов Юпитера. Другие возмущающие эффекты могут не приниматься во внимание ввиду их малости по сравнению с точностями наблюдаемых параметров.

В модели движения спутники, Солнце и Сатурн рассматриваются как материальные точки. В относительной системе координат возмущающее действие точечной гравитирующей массы m_P определяется силой P, вычисляемой по формуле

$$P = \mu_P \left\{\frac{x_P - x}{\Delta^3} - \frac{x_P}{r_P^3}\right\}, \qquad \mu_P = k^2 m_P, \tag{5}$$

где Δ — расстояние от спутника с координатами x до возмущающей точечной массы с координатами x_P.

Возмущающая функция, соответствующая влиянию несферичности планеты, представляется в форме

$$V = -\mu J_2 \frac{b^2}{r^3} L_2(\sin\varphi) - \mu J_4 \frac{b^4}{r^5} L_4(\sin\varphi), \quad (6)$$

где $\mu = k^2(M+m)$, M — масса Юпитера, m — масса спутника, b — экваториальный радиус Юпитера, J_2, J_4 — коэффициенты зональных гармоник, φ — широта спутника относительно экватора Юпитера, L_2 и L_4 — полиномы Лежандра

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad L_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Синус широты вычисляется по формуле (Дубошин, 1971)

$$\sin\varphi = \frac{R_1 x_1 + R_2 x_2 + R_3 x_3}{r}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sin\Phi \sin I_J \cos\Omega - \cos\Phi \sin I_J \times \\
&\times (-\cos I \sin\Omega) + \cos I_J \sin I \sin\Omega, \\
R_2 &= \sin\Phi \sin I_J \sin\Omega \cos\epsilon_0 - \cos\Phi \sin I_J \times \\
&\times (\cos I \cos\Omega \cos\epsilon_0 - \sin I \sin\epsilon_0) + \\
&+ \cos I_J (-\sin I \cos\Omega \cos\epsilon_0 - \cos I \sin\epsilon_0), \\
R_3 &= \sin\Phi \sin I_J \sin\Omega \sin\epsilon_0 - \cos\Phi \sin I_J \times \\
&\times (\cos I \cos\Omega \sin\epsilon_0 + \sin I \cos\epsilon_0) + \\
&+ \cos I_J (-\sin I \cos\Omega \sin\epsilon_0 + \cos I \cos\epsilon_0),
\end{aligned}$$

$$\Phi = \psi - \Omega, \quad \psi = \psi_0 + \dot\psi(t - 2443000.5),$$

где ϵ_0 — наклон эклиптики к экватору Земли эпохи 1950 года, Ω — долгота восходящего узла орбиты Юпитера, I — наклон орбиты Юпитера к эклиптике, ψ_0 — долгота полюса Юпитера, I_J — наклон орбиты Юпитера к экватору. Все угловые величины (кроме ϵ_0) приведены на эпоху 2443000.5 JD. Постоянные численной модели, необходимые для моделирования возмущающих сил, представлены в табл.1. В таблице M_S — масса Солнца, M_{Sat} — масса Сатурна.

Анализ структуры возмущений

Для оценки полного вклада в движение спутников каждого из основных возмущающих факторов, на интервале времени 1000 оборотов Ио рассматривались разности эфемерид спутников (Бордовицына и др., 1991), вычисляемых с полным набором возмущений и с тем же набором, но без учета оцениваемого возмущающего фактора. Рассмотрены возмущения от взаимных притяжений спутников (Рис.1), от сжатия центрального тела (Рис.2) и от сил притяжения Солнца и Сатурна (Рис.3).

Как можно убедиться, рассматриваемые возмущающие факторы вносят достаточно весомый вклад в движение спутников. Полученные разности заметно превышают пределы точности наблюдательных данных и поэтому при построении теории движения галилеевых спутников эти факторы должны учитываться.

Таким же способом был оценен вклад прецессионного движения экватора Юпитера, проявляющегося при вычислении возмущений от несферичности центральной планеты. Полученные разности на рис.4 показывают, что полный вклад в движение спутников возмущений от движения экватора мал и на исследуемом интервале времени их можно не учитывать. Однако при увеличении временного интервала эти возмущения, безусловно, должны присутствовать в модели возмущающих сил.

Представленные на рисунках графики интересны еще и тем, что показывают, как может изменяться методическая ошибка численной модели за счет неучитываемых возмущений.

Оценка точности численной модели движения галилеевых спутников

Для исследования эффективности построенной численной модели была оценена ее внутренняя точность известным методом сравнения результатов прямого и обратного интегрирования. Ошибки численного интегрирования уравнений движения на интервале времени 20000 оборотов Ио (~ 100 лет) приведены в табл.2. Для сравнения здесь также приведены ошибки численной модели движения спутников в прямоугольных координатах. Как показывают результаты оценки, численное интегрирование в прямоугольных переменных дает точность более низкую, чем интегрирование в KS-элементах.

Кроме того, выполнена оценка внутренней точности численной модели при долгосрочном прогнозировании движения на интервале времени 200000 оборотов Ио (~ 1000 лет). При этом ошибка модели составила $\Delta r = 4 \cdot 10^{-10}$ а.е..

Таким образом, результаты оценки точности численной модели указывают на ее пригодность для целей долгосрочного прогнозирования движения галилеевых спутников на интервалах времени, значительно превышающих интервалы, охваченные наблюдательными данными.

Получение начальных параметров движения численной модели из теории Лиске

Как упоминалось ранее, для вычисления начальных координат и скоростей галилеевых спутников Юпитера была использована теория Лиске (E-5). Особенностью аналитических теорий вообще, и теории Лиске в частности, является то, что для вычисления координат и компонент скорости используются одни и те же ряды. В результате скорости вычисляются менее точно, чем координаты и не могут быть непосредственно использованы в численном интегрировании в качестве начальных параметров движения. Для повышения точности скоростей, получаемых по теории Лиске, мы применили обычную процедуру улучшения (Эльясберг, 1976), где в качестве наблюдений использовались координаты, полученные по теории Лиске.

Таким образом, процесс построения численной теории движения галилеевых спутников состоял из получения эфемериды путем численного интегрирования уравнений движения при заданных начальных условиях и определения поправок к начальным условиям, исходя из уклонений положений спутников, вычисляемых по аналитической теории Лиске, от вычисляемых численно.

Задача отыскания поправок к начальным условиям системы, которыми являются параметры $x_0, \dot{x}_0$ для каждого спутника, с точностью до членов первого порядка относительно поправок, заключается в решении условных уравнений

$$\Delta x = \frac{\partial x}{\partial X_0} \Delta X_0, \tag{8}$$

где Δx — вектор уклонений положений, получаемых по аналитической теории Лиске, от вычисляемых численно, $\Delta X_0 = (\Delta x_0, \Delta \dot{x}_0)$ — вектор поправок к исправляемым параметрам орбиты спутника, $\partial x / \partial X_0 = (\partial x / \partial x_0, \partial x / \partial \dot{x}_0)$ — матрица дифференциальных коэффициентов.

Исходя из уравнений движения в прямоугольных координатах

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F, \tag{9}$$

можно получить для определения элементов матрицы $\partial x / \partial X_0$ такую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial x}{\partial X_0} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial X_0}, \tag{10}$$

Матрица частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1,2,3} \tag{11}$$

складывается из трех составляющих, обусловленных центральной силой

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_J = \frac{k^2 (M + m)}{r^3} \left(3 \frac{x_i x_j}{r^2} - \delta_{ij} \right), \tag{12}$$

возмущениями гравитирующей материальной точки

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_P = \frac{k^2 m_P}{\Delta^3} \left(3 \frac{(x_{Pi} - x_i)(x_{Pj} - x_j)}{\Delta^2} - \delta_{ij} \right), \tag{13}$$

а также возмущениями от сжатия центральной планеты

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$
\begin{aligned}
&= -k^2(M+m)J_2b^2(15\frac{x_ix_j}{r^7}L_2(\sin\varphi) - \\
&- \frac{3}{r^5}(x_iA_j + x_jA_i)L_2^{'}(\sin\varphi) + \\
&+ \frac{A_iA_j}{r^3}L_2^{''}(\sin\varphi) + \frac{B_{ij}}{r^3}L_2^{'}(\sin\varphi) - \\
&- \delta_{ij}\frac{3}{r^5}L_2(\sin\varphi)) - \\
&- k^2(M+m)J_4b^4(35\frac{x_ix_j}{r^9}L_4(\sin\varphi) - \\
&- \frac{5}{r^7}(x_iA_j + x_jA_i)L_4^{'}(\sin\varphi) + \\
&+ \frac{A_iA_j}{r^5}L_4^{''}(\sin\varphi) + \frac{B_{ij}}{r^5}L_2^{'}(\sin\varphi) - \\
&- \delta_{ij}\frac{5}{r^7}L_4(\sin\varphi))
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
A_k = \frac{R_k}{r} - \frac{R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3}{r}\frac{x_k}{r^2},
$$

$$
B_{kl} = -\frac{R_kx_l + R_lx_k}{r^3} + 3\frac{R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3}{r}\frac{x_kx_l}{r^4} -
$$

$$
-\delta_{kl}\frac{R_1x_1 + R_2x_2 + R_3x_3}{r^3}
$$

Процесс улучшения орбит спутников (нахождения поправок к начальным условиям) строился по принципу двухконтурного алгоритма (Бордовицына и др., 1992). Эфемерида одного из спутников, являющаяся результатом численного интегрирования уравнений движения (4) при некоторых начальных условиях, на заданном интервале времени сравнивается с эфемеридой аналитической теории Лиске. На основе полученных при этом остаточных разностей Δx $(O - C)$ составляется система условных (линейных) уравнений (8), коэффициенты которой (дифференциальные коэффициенты) вычисляются из уравнений (10). Затем система условных уравнений решается методом наименьших квадратов относительно поправок ΔX_0.

Вычисление окончательной системы параметров орбит спутника осуществляется последовательными приближениями, поскольку зависимость между определяемыми поправками к начальным условиям ΔX_0 и остаточными разностями Δx фактически не является линейной. Итерационный процесс последовательных приближений завершается, когда приближения сойдутся на временном интервале с некоторой заданной точностью. Таким же приемом улучшаются начальные параметры орбит других спутников.

Так как движение галилеевых спутников подвержено взаимному гравитационному влиянию, на длительных интервалах времени (~ 1000 оборотов Ио) улучшение спутниковых орбит следует проводить в несколько этапов, повторяя вышеописанные процедуры также до сходимости последовательных приближений с заданной точностью.

В качестве начальных условий при численном интегрирования уравнений движения были взяты прямоугольные координаты (в а.е.) и скорости (в а.е./сут.), вычисленные по аналитической теории Лиске на эпоху 2443000.5 JD:

I Jupiter, Io

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -7.697425031945230\cdot 10^{-4} & \dot{x}_1 &= -9.595772987587166\cdot 10^{-3}\\
x_2 &= 2.461354299534133\cdot 10^{-3} & \dot{x}_2 &= -2.412428594221119\cdot 10^{-3}\\
x_3 &= 1.161184599176075\cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 &= -1.313080817227049\cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

II Jupiter, Europa

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -4.492267038928770 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 &= -5.243153001878025 \cdot 10^{-4}\\
x_2 &= 2.464377143600333 \cdot 10^{-4} & \dot{x}_2 &= -7.131581797898048 \cdot 10^{-3}\\
x_3 &= 8.459769502005670 \cdot 10^{-5} & \dot{x}_3 &= -3.386270185132422 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

III Jupiter, Ganymede

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3.620477736684591 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 &= -5.414852372797841 \cdot 10^{-3}\\
x_2 &= 5.598806869092752 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_2 &= -2.849950826314886 \cdot 10^{-3}\\
x_3 &= 2.606139240670871 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 &= -1.420542221160597 \cdot 10^{-3}
\end{aligned}
$$

IV Jupiter, Callisto

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$\begin{aligned} x_1 &= 1.039533492118005 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 &= -4.708349058226078 \cdot 10^{-3} \\ x_2 &= 1.135453555069757 \cdot 10^{-2} & \dot{x}_2 &= 4.071035306846125 \cdot 10^{-4} \\ x_3 &= 5.400369473950344 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 &= 1.262602077312160 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Улучшение орбит спутников производилось на интервале времени 625 оборотов Ио по равномерно распределенным остаточным разностям с интервалом 1.25 оборотов. В результате улучшения была получена окончательная система начальных параметров:

I Jupiter, Io

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$\begin{aligned} x_1 &= -7.697436663456493 \cdot 10^{-4} & \dot{x}_1 &= -9.595916953434196 \cdot 10^{-3} \\ x_2 &= 2.461350375916132 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_2 &= -2.412502729342631 \cdot 10^{-3} \\ x_3 &= 1.161179131258671 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 &= -1.313101409453861 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

II Jupiter, Europa

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$\begin{aligned} x_1 &= -4.492356474415055 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 &= -5.243891507361925 \cdot 10^{-4} \\ x_2 &= 2.465207691091043 \cdot 10^{-4} & \dot{x}_2 &= -7.131359672237104 \cdot 10^{-3} \\ x_3 &= 8.468198148993328 \cdot 10^{-5} & \dot{x}_3 &= -3.386247129395751 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

III Jupiter, Ganymede

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$\begin{aligned} x_1 &= -3.620607789259088 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 &= -5.414813207034545 \cdot 10^{-3} \\ x_2 &= 5.598752850577804 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_2 &= -2.850010525782788 \cdot 10^{-3} \\ x_3 &= 2.606123979473369 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 &= -1.420571414935975 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

IV Jupiter, Callisto

Экватор и равноденствие 1950.0

Эпоха 1976 август 10.0 эфемеридного времени

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = & 1.039491728963868 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_1 = & -4.708408803102755 \cdot 10^{-3} \\
x_2 = & 1.135449637220337 \cdot 10^{-2} & \dot{x}_2 = & 4.071184620950840 \cdot 10^{-4} \\
x_3 = & 5.400371489959603 \cdot 10^{-3} & \dot{x}_3 = & 1.262614212449278 \cdot 10^{-4}
\end{array}
$$

При этом средние квадратические ошибки для каждого спутника составили следующие величины. Для положений (в а.е.): $\sigma_1 = 3.065 \cdot 10^{-8}$, $\sigma_2 = 8.600 \cdot 10^{-8}$, $\sigma_3 = 4.187 \cdot 10^{-8}$, $\sigma_4 = 3.497 \cdot 10^{-8}$; и для скоростей (в а.е./сут.): $\sigma_1^* = 9.989 \cdot 10^{-8}$, $\sigma_2^* = 1.410 \cdot 10^{-7}$, $\sigma_3^* = 4.114 \cdot 10^{-8}$, $\sigma_4^* = 1.574 \cdot 10^{-8}$ (соответственно для Ио, Европы, Ганимеда и Каллисто).

Сопоставление численной модели движения галилеевых спутников с теорией Лиске

По найденным значениям начальных параметров численным интегрированием были построены эфемериды спутников с временным интервалом 10000 оборотов Ио (~ 50 лет) вперед и назад от начальной эпохи. Данная эфемерида сравнивалась с результатами аналитической теории Лиске. На рис.5 графически представлены отклонения вычисленных координат численной теории от аналитической. При этом максимумы отклонений координат для каждого спутника составили: $\Delta r_1 = 4.358 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_2 = 6.023 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_3 = 7.436 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_4 = 7.411 \cdot 10^{-6}$ а.е. (до 1995 года: $\Delta r_1 = 2.264 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_2 = 6.023 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_3 = 2.429 \cdot 10^{-6}$ а.е., $\Delta r_4 = 1.540 \cdot 10^{-6}$ а.е.).

Поведение отклонений результатов численного моделирования от аналитической теории Лиске носит явно колебательный характер и представляет собой комбинацию различных долгопериодических составляющих. По видимому, такие систематические изменения в отклонениях связаны с недостаточно точным учетом в теории Лиске членов долгого периода. На это в свое время уже обращал внимание Феррас-Меллу (Бианкале и др., 1982). Гармонический анализ позволяет выделить эти составляющие.

Применим к совокупности временного ряда отклонений $h_n (n = 1, N)$ объема $N = 2000$ на интервале времени $T = 35404.91$ суток (20000 оборотов Ио) дискретное преобразование Фурье (Бендат, Пирсол, 1983)

$$H_R(f_k) = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} h_n \cos 2\pi \frac{kn}{N},$$

$$H_I(f_k) = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N} h_n \sin 2\pi \frac{kn}{N},$$

где $f_k = k/T$ — частота гармонической составляющей. В результате преобразования каждой частоте f_k будет соответствовать так называемая амплитудная характеристика, вычисляемая по формуле

$$H_k = \sqrt{H_R^2(f_k) + H_I^2(f_k)}.$$

По амплитудным характеристикам H_k выделим частоты (в сут.$^{-1}$) более влиятельных гармоник. На графиках амплитудно-частотных характеристик (Рис.6) они проявляются в виде пиков и представляют следующие частоты.

Для Ио: $f_{12} = 3.39{\cdot}10^{-4}, f_{64} = 1.81{\cdot}10^{-3}, f_{89} = 2.51{\cdot}10^{-3}$ с периодами (в сут.) $T_{12} = 2950.41, T_{64} = 553.20, T_{89} = 397.81$. Для Европы: $f_5 = 1.41{\cdot}10^{-4}, f_{30} = 8.47{\cdot}10^{-4}, f_{46} = 1.30{\cdot}10^{-3}, f_{64} = 1.81{\cdot}10^{-3}, f_{108} = 3.05{\cdot}10^{-3}$ с периодами (в сут.) $T_5 = 7080.98, T_{30} = 1180.16, T_{46} = 769.67$, $T_{64} = 553.20, T_{108} = 327.82$. Для Ганимеда: $f_1 = 2.82{\cdot}10^{-5}, f_{103} = 2.91{\cdot}10^{-3}$ с периодами (в сут.) $T_1 = 35404.91, T_{103} = 343.74$. Для Каллисто: $f_1 = 2.82{\cdot}10^{-5}, f_{120} = 3.39{\cdot}10^{-3}$ с периодами (в сут.) $T_1 = 35404.91, T_{120} = 295.04$.

Заключение

Следует отметить, что разработанное математическое и программное обеспечение может использоваться для решения целого ряда задач, а именно, вычисления высокоточных эфемерид галилеевых спутников, исследования эволюции их орбит на больших интервалах времени, построения численных моделей движения других объектов. В рамках задачи многих тел начальные параметры численной модели галилеевых спутников могут использоваться при учете возмущений от этих спутников в движении других спутников системы Юпитера.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 98-02-16491.

Список литературы

1. Авдюшев В.А. Численные алгоритмы типа Энке в регуляризирующих элементах // Исследования по баллистике и смежным вопросам механике: Сборник статей. Томск: Изд-во ТГУ, 1997. С. 121–125.

2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. М.: Мир, 1983. 312 с.

3. Бианкале Р., Феррас-Меллу С., Цучида М. (Biancale R., Ferraz-Mello S., Tsuchida M.) Comparison of Sampson-Lieske theory of the Galilean satellites of Jupiter with observations // Cel. Mech. 1982. V. 26. P. 225–228.

4. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Бороненко Т.С., Тамаров В.А., Шарковский Н.А., Шмидт Ю.Б. Численные и численно-аналитические алгоритмы прогнозирования движения ИСЗ. Томск: Изд-во ТГУ, 1991. 156 с.

5. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Кардаш А.В., Федяев Ю.А., Шарковский Н.А. Эффективные алгоритмы численного моделирования движения ИСЗ // Изв. вузов. Физика. 1992. Т. 35. С. 62–70.

6. Бордовицына Т.В., Быкова Л.Е., Авдюшев В.А. Проблемы применения регуляризирующих и стабилизирующих преобразований в задачах динамики спутников планет и астероидов // Астрономия и геодезия. Томск: Изд-во ТГУ, 1998. Вып. 16. С. 33–57

7. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике/ Под ред. Г.Н. Дубошина. М.: Наука, 1971. 862 с.

8. Лиске Дж.Х. (Lieske J.H.) A Method of Revitalizing Sampson's Theory of the Galilean Satellites // Astron. Astrophys. 1974. V. 31. P. 137–150.

9. Лиске Дж.Х. (Lieske J.H.) Theory of Motion of Jupiter's Galilean Satellites // Astron. Astrophys. 1977. V. 56. P. 333–352.

10. Лиске Дж.Х. (Lieske J.H.) Galilean Satellites Ephemerides E-5 // Astron. Astrophys. 1998. V. 129. P. 205–217.

11. Феррас-Меллу С. Динамика галилеевых спутников Юпитера. М.: Мир, 1983. 136 с.

12. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.

13. Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.

Таблица 1

Постоянные параметры численной модели движения

Параметр	Значение	Параметр	Значение
m_1/M	$47.053 \cdot 10^{-6}$	b (км)	71398
m_2/M	$25.267 \cdot 10^{-6}$	I_J	$3^\circ.11987149$
m_3/M	$78.043 \cdot 10^{-6}$	Ω	$99^\circ.9985260$
m_4/M	$56.683 \cdot 10^{-6}$	I	$1^\circ.30673095$
M_S/M	1047.56545	ϵ_0	$23^\circ.4457889$
M_S/M_{Sat}	3498	ψ_0	$316^\circ.518203$
J_2	0.014736	$\dot{\psi}$	$-2.29 \cdot 10^{-6}$
J_4	-0.000587	k	$1.720209895 \cdot 10^{-2}$

Таблица 2

Оценка точности численных моделей движения спутников в различных переменных

Переменные	Ио Δr, а.е.	Европа Δr, а.е.	Ганимед Δr, а.е.	Каллисто Δr, а.е.
$x, \dot{x}, t$	$3.5 \cdot 10^{-8}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$2.2 \cdot 10^{-11}$
q, t, E	$7.8 \cdot 10^{-12}$	$6.2 \cdot 10^{-12}$	$5.8 \cdot 10^{-12}$	$3.7 \cdot 10^{-12}$